Ingeniería mecánica

DINÁMICA

Decimocuarta edición

R. C. Hibbeler

ALWAYS LEARNING

PEARSON

Ecuaciones fundamentales de dinámica

CINEMÁTICA

Movimiento rectilíneo de una partícula

Variable a	*Constante* $a = a_c$
$a = \dfrac{dv}{dt}$	$v = v_0 + a_c t$
$v = \dfrac{ds}{dt}$	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$
$a\,ds = v\,dv$	$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$

Movimiento curvilíneo de una partícula

Coordenadas x, y, z	*Coordenadas r, θ, z*
$v_x = \dot{x} \quad a_x = \ddot{x}$	$v_r = \dot{r} \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
$v_y = \dot{y} \quad a_y = \ddot{y}$	$v_\theta = r\dot{\theta} \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
$v_z = \dot{z} \quad a_z = \ddot{z}$	$v_z = \dot{z} \quad a_z = \ddot{z}$

Coordenadas n, t, b

$v = \dot{s}$	$a_t = \dot{v} = v\dfrac{dv}{ds}$
	$a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \quad \rho = \dfrac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{\lvert d^2y/dx^2 \rvert}$

Movimiento relativo

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$

Movimiento de un cuerpo rígido con respecto a un eje fijo

Variable α	*Constante* $\alpha = \alpha_c$
$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$	$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$
$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_c t^2$
$\omega\,d\omega = \alpha\,d\theta$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$

Para el punto P

$s = \theta r \quad v = \omega r \quad a_t = \alpha r \quad a_n = \omega^2 r$

Movimiento plano general relativo-ejes de traslación

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{pasador})} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A(\text{pasador})}$

Movimiento plano general relativo, eje de traslación y rotación

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \Omega \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\Omega \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

CINÉTICA

Momento de inercia de masa $I = \int r^2\,dm$

Teorema de los ejes paralelos $I = I_G + md^2$

Radio de giro $k = \sqrt{\dfrac{I}{m}}$

Ecuaciones de movimiento

Partícula	$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
Cuerpo rígido (Movimiento plano)	$\Sigma F_x = m(a_G)_x$ $\Sigma F_y = m(a_G)_y$ $\Sigma M_G = I_G\alpha$ o $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$

Principio de trabajo y energía

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

Energía cinética

Partícula	$T = \frac{1}{2}mv^2$
Cuerpo rígido (movimiento plano)	$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$

Trabajo

Fuerza variable	$U_F = \int F\cos\theta\,ds$
Fuerza constante	$U_F = (F_c\cos\theta)\,\Delta s$
Peso	$U_W = -W\Delta y$
Resorte	$U_s = -\left(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2\right)$
Momento de par	$U_M = M\Delta\theta$

Potencia y eficiencia

$P = \dfrac{dU}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \qquad \varepsilon = \dfrac{P_{\text{sal}}}{P_{\text{ent}}} = \dfrac{U_{\text{sal}}}{U_{\text{ent}}}$

Teorema de conservación de la energía

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Energía potencial

$V = V_g + V_e$, donde $V_g = \pm Wy$, $V_e = +\frac{1}{2}ks^2$

Principio del impulso y la cantidad de movimiento lineales

Partícula	$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\int \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2$
Cuerpo rígido	$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2$

Conservación de la cantidad de movimiento lineal

$\Sigma(\text{sist. } m\mathbf{v})_1 = \Sigma(\text{sist. } m\mathbf{v})_2$

Coeficiente de restitución $e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

Principio del impulso y la cantidad de movimiento angulares

Partícula	$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ donde $H_O = (d)(mv)$
Cuerpo rígido (movimiento plano)	$(\mathbf{H}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_G\,dt = (\mathbf{H}_G)_2$ donde $H_G = I_G\omega$ $(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$ donde $H_O = I_O\omega$

Conservación de la cantidad de movimiento angular

$\Sigma(\text{sist. } \mathbf{H})_1 = \Sigma(\text{sist. } \mathbf{H})_2$

Prefijos del SI

Múltiplo	*Forma exponencial*	*Prefijo*	*Símbolo SI*
1 000 000 000	10^9	giga	G
1 000 000	10^6	mega	M
1 000	10^3	kilo	k
Submúltiplo			
0.001	10^{-3}	mili	m
0.000 001	10^{-6}	micro	μ
0.000 000 001	10^{-9}	nano	n

Factores de conversión (FPS) a (SI)

Cantidad	*Unidad de medición (FPS)*	*Es igual a*	*Unidades de medición (SI)*
Fuerza	lb		4.448 N
Masa	slug		14.59 kg
Longitud	ft		0.3048 m

Factores de conversión (FPS)

1 pie = 12 in (pulgadas)
1 mi (milla) = 5280 ft
1 kip (kilolibra) = 1000 lb
1 ton = 2000 lb

INGENIERÍA MECÁNICA

DINÁMICA

INGENIERÍA MECÁNICA

DINÁMICA

DECIMOCUARTA EDICIÓN

R. C. HIBBELER

Traducción
Jesús Elmer Murrieta Murrieta
Tecnológico de Monterrey, campus Morelos

Revisión técnica
Jorge Fonseca Campos
Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnología Avanzada
Instituto Politécnico Nacional, México

PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

HIBBELER, R. C.
Ingeniería mecánica. Dinámica
Decimocuarta edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2016

ISBN: 978-607-32-3697-3

Área: Ingeniería

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 784

Todos los derechos reservados.

Authorized translation from the English language edition, entitled *Engineering Mechanics. Dynamics 14th* Edition, by *R. C. Hibbeler,* published by Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall, Copyright © 2016. All rights reserved.

ISBN 9780133915389

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, titulada *Engineering Mechanics. Dynamics 14ª* edición, por *R. C. Hibbeler,* publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Prentice Hall, Copyright © 2016. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Director General:	Sergio Fonseca Garza
Director de Contenidos y Servicios Digitales:	Alan David Palau
Gerente de Contenidos y Servicios Editoriales:	Jorge Luis Íñiguez Caso
Coordinador de Contenidos, Educación Superior:	Guillermo Domínguez Chávez e-mail: guillermo.dominguez@pearson.com
Especialista en Contenidos de Aprendizaje:	Luis Miguel Cruz Castillo
Especialista en Desarrollo de Contenidos:	Bernardino Gutiérrez Hernández
Supervisor de Arte y Diseño:	Enrique Trejo Hernández

DECIMOCUARTA EDICIÓN, 2016

D.R. © 2016 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Antonio Dovalí Jaime, Núm. 70
Torre B, Piso 6, Col. Zedec
Ed. Plaza Santa Fe
Delegación Álvaro Obregón
C. P. 01210 C. México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación puede reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN 978-607-32-3697-3
ISBN e-book 978-607-32-3691-1

Impreso en México. *Printed in Mexico*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 19 18 17 16

PEARSON

www.pearsonenespañol.com

Al estudiante

Con la esperanza de que este trabajo estimule un interés en la ingeniería mecánica y proporcione una guía aceptable para su comprensión.

PREFACIO

El propósito principal de este libro es ofrecer al estudiante una presentación clara e integral de la teoría y las aplicaciones de la ingeniería mecánica. Para alcanzar ese objetivo, la obra se ha enriquecido con los comentarios y las sugerencias de cientos de revisores que se dedican a la enseñanza, así como de muchos de los alumnos del autor.

Características nuevas en esta edición

Problemas preliminares. Esta nueva característica se encuentra a lo largo de todo el texto y se presenta justo antes de los problemas fundamentales. Su intención es poner a prueba la comprensión conceptual que logró el estudiante acerca de la teoría. Por lo general, las soluciones requieren la realización de pocos cálculos o de ninguno en absoluto; así, estos problemas proporcionan un entendimiento básico de los conceptos, antes de aplicarlos en forma numérica. Al final de este texto, se presentan todas las soluciones.

Ampliación de las secciones de puntos importantes. Se agregaron resúmenes que refuerzan el material de lectura y destacan las definiciones y los conceptos importantes en las secciones.

Revisión del material. En esta edición se logró una mayor claridad en los conceptos y ahora las definiciones importantes se presentan en negritas con la finalidad de resaltarlas.

Problemas de repaso al final del capítulo. En esta edición se incluyen las soluciones a todos los problemas de repaso al final del texto, por lo que los estudiantes pueden revisar su trabajo mientras estudian para sus exámenes y repasar sus conocimientos al concluir cada capítulo.

Nuevas fotografías. La importancia de conocer los temas de estudio se refleja en las aplicaciones al mundo real representadas en las más de 30 fotografías nuevas o actualizadas a lo largo del libro. Por lo general, esas fotografías se utilizan para explicar la forma en que los principios relevantes se aplican a situaciones cotidianas y la manera como se comportan los materiales bajo carga.

Nuevos problemas. En esta edición se agregaron cerca de 30% de problemas inéditos, los cuales involucran aplicaciones en muchos campos de la ingeniería.

Características particulares

Además de las nuevas características que se acaban de mencionar, hay otras que destacan el contenido del texto, entre ellas las siguientes.

Organización y enfoque. Cada capítulo está organizado en secciones bien definidas que incluyen una explicación de temas específicos, problemas de ejemplo ilustrativos y conjuntos de problemas de tarea. Los temas dentro de cada sección se colocan en subgrupos definidos por títulos en letras negritas. El propósito de esto es presentar un método estructurado para introducir cada definición o concepto nuevo, y convertir al libro en una útil y práctica referencia en repasos posteriores.

Contenido del capítulo. Cada capítulo comienza con una ilustración que muestra una aplicación relevante del tema, así como con una lista con viñetas de los objetivos del capítulo, para brindar una visión general del material que se cubrirá.

Énfasis en los diagramas de cuerpo libre. Al resolver problemas, es particularmente importante dibujar un diagrama de cuerpo libre; por tal razón este paso se enfatiza a lo largo del texto. En particular, se dedican secciones y ejemplos especiales para demostrar cómo trazar diagramas de cuerpo libre. También se agregaron problemas de tarea específicos para desarrollar dicha práctica.

Procedimientos para el análisis. Al final del primer capítulo, se presenta un procedimiento general para analizar cualquier problema de mecánica. Después, el procedimiento se adapta para resolver problemas específicos a lo largo del libro. Esta característica única ofrece al estudiante un método lógico y ordenado que puede seguir al aplicar la teoría. Los problemas de ejemplo se resuelven utilizando ese método esquemático con la finalidad de aclarar su aplicación numérica. Sin embargo, una vez que se tiene dominio de los principios relevantes y se ha obtenido confianza y buen juicio en el método, el estudiante podrá desarrollar sus propios procedimientos para la resolución de problemas.

Puntos importantes. Constituyen un repaso o un resumen de los conceptos más importantes en cada sección y destacan los aspectos más significativos que deberían observarse al aplicar la teoría para la resolución de problemas.

Problemas fundamentales. Estas series de problemas se ubican de manera selectiva justo después de la mayoría de los problemas de ejemplo. Con ellos, los estudiantes obtienen aplicaciones sencillas de los conceptos y, por lo tanto, la oportunidad de desarrollar sus habilidades en la resolución de problemas antes de intentar resolver cualquiera de los problemas generales que se presentan en seguida. Asimismo, se pueden utilizar de práctica para los exámenes y, más adelante, si está en sus planes, como preparación para el *Fundamentals in Engineering Exam*.

Comprensión conceptual. Mediante el uso de las fotografías que se incluyen a lo largo del libro se aplica la teoría, de una manera simplificada, con el propósito de ilustrar algunas de sus características conceptuales más importantes, y representar el significado físico de muchos de los términos que se usan en las ecuaciones. Las

aplicaciones simplificadas aumentan el interés en el tema estudiado y preparan de mejor forma al estudiante para entender los ejemplos y resolver los problemas.

Problemas de tarea. Además de los problemas fundamentales y conceptuales que se mencionaron, el libro incluye problemas de otro tipo, como los que se describen a continuación:

- **Problemas de diagrama de cuerpo libre.** Algunas secciones del libro incluyen problemas introductorios que sólo requieren dibujar el diagrama de cuerpo libre para una situación específica. Son asignaciones que harán que el estudiante reconozca la importancia de dominar esta habilidad como un requisito para obtener una solución integral de cualquier problema de equilibrio.

- **Problemas generales de análisis y diseño.** La mayoría de los problemas presentan situaciones reales en la práctica de la ingeniería. Algunos provienen de productos reales usados en la industria. Se espera que este realismo estimule el interés del estudiante en la ingeniería mecánica, y lo ayude a desarrollar la habilidad de reducir cualquier problema de este tipo desde su descripción física hasta un modelo o representación simbólica a la que se le puedan aplicar los principios de la mecánica.

A lo largo del libro existe cierto equilibrio entre los problemas que utilizan las unidades del SI y las del FPS. Asimismo, en todas las series se ha hecho un esfuerzo por ordenar los problemas de acuerdo con una dificultad creciente, excepto en los problemas de repaso al final de cada capítulo, los cuales se presentan en orden aleatorio.

- **Problemas por computadora.** Se ha hecho un esfuerzo por incluir algunos problemas que pueden resolverse usando un procedimiento numérico ejecutado en una computadora de escritorio o en una calculadora de bolsillo. La intención es ampliar la capacidad del estudiante para que utilice otras formas de análisis matemático sin sacrificar el tiempo, para enfocarse en la aplicación de los principios de la mecánica. Los problemas de este tipo, que pueden o deben resolverse mediante procedimientos numéricos, se identifican con un "cuadro" (■) antes del número del problema.

Esta edición contiene una gran cantidad de problemas de tarea que se clasifican en dos categorías. Los problemas que se indican sólo mediante un número tienen una respuesta, y en algunos casos un resultado numérico adicional, que se presenta en la parte final del libro. Cada cuarto problema tiene un asterisco (*) antes de su número, lo que indica que se trata de un problema sin respuesta.

Exactitud. Del mismo modo que en las ediciones anteriores, la precisión del texto y de las soluciones a los problemas ha sido verificada de manera profunda por el autor y por cuatro revisores adicionales: Scott Hendricks, del Virginia Polytechnic Institute and State University; Karim Nohra, de la University of South Florida; Kurt Norlin, del Bittner Development Group, y finalmente Kai Beng, un ingeniero practicante, que además de revisar la precisión brindó sugerencias para el desarrollo de problemas.

Contenido

El libro está dividido en 11 capítulos, en los que los principios se aplican primero en situaciones sencillas y después en contextos más complejos.

En el capítulo 12 se estudia la cinemática de una partícula, seguido de un análisis de la cinética de las partículas en los capítulos 13 (Fuerza y aceleración), capítulo 14 (Trabajo y energía) y capítulo 15 (Impulso y cantidad de movimiento). Los conceptos de la dinámica de partículas contenidos en estos cuatro capítulos se resumen posteriormente en una sección de "repaso", y el estudiante recibe la oportunidad de identificar y resolver una variedad de problemas. En el caso del movimiento plano de un cuerpo rígido, existe una sucesión similar de presentación: capítulo 16 (Cinemática plana), capítulo 17 (Ecuaciones de movimiento), capítulo 18 (Trabajo y energía) y Capítulo 19 (Impulso y cantidad de movimiento), seguida de un resumen y una serie de problemas de repaso para estos capítulos.

Si el tiempo lo permite, el curso podría incluir algún material que involucre el movimiento de cuerpos rígidos en tres dimensiones. La cinemática y la cinética de este movimiento se analizan en los capítulos 20 y 21, respectivamente. El capítulo 22 (Vibraciones) se puede incluir si el estudiante tiene la base matemática necesaria. Las secciones del libro que se consideran fuera del alcance del curso de dinámica básica se indican con un asterisco (*) y pueden ser omitidas. Tenga en cuenta que este material también proporciona una referencia adecuada para los principios básicos, cuando se estudian cursos más avanzados. Por último, el apéndice A proporciona una lista de fórmulas matemáticas necesarias para resolver los problemas del libro, en el apéndice B se presenta un breve repaso del análisis vectorial, y el apéndice C contiene un repaso de la aplicación de la regla de la cadena.

Cobertura alternativa. A discreción del profesor, es posible cubrir los capítulos 12 a 19 en el siguiente orden sin perder continuidad: capítulos 12 y 16 (Cinemática), capítulos 13 y 17 (Ecuaciones de movimiento), capítulos 14 y 18 (Trabajo y energía), y capítulos 15 y 19 (Impulso y cantidad de movimiento).

Reconocimientos

El autor se ha esforzado por escribir este libro de manera que resulte de interés tanto para el estudiante como para el profesor. A través de los años muchas personas han contribuido en su desarrollo y siempre estaré agradecido por sus valiosas sugerencias y comentarios. De forma específica, quisiera agradecer a todas las personas que han aportado comentarios relacionados con la preparación de la decimocuarta edición de esta obra y, en particular, a R. Bankhead del Highline Community College, K. Cook-Chennault de Rutgers, la State University of New Jersey, E. Erisman del College of Lake County Illinois, M. Freeman de la University of Alabama, H. Lu de la University of Texas en Dallas, J. Morgan de la Texas A & M University, R. Neptune de la University of Texas, I. Orabi de la University of New Haven, T. Tan de la University of Memphis, R. Viesca de la Tufts University, y G. Young de la Oklahoma State University.

Hay otras personas que me han enviado algunos comentarios y que también merecen un reconocimiento especial, entre ellos J. Dix, H. Kuhlman, S. Larwood, D. Pollock y H. Wenzel. Un viejo amigo y socio, Kai Beng Yap, fue de gran ayuda durante la preparación y revisión de las soluciones a los problemas. En este mismo sentido, va una nota especial de agradecimiento a Kurt Norlin del Bittner Development Group. Asimismo, agradezco la ayuda recibida durante el proceso de producción de Martha McMaster, mi correctora de pruebas, y de Rose Kernan, mi editora de producción. Además, agradezco a mi esposa, Conny, quien ayudó en la preparación del manuscrito para su publicación.

Por último, extiendo mi agradecimiento a todos mis alumnos y a los miembros del profesorado que se han tomado el tiempo de enviarme sus sugerencias y comentarios por correo electrónico. Como esta lista es demasiado larga, espero que aquellos que han proporcionado su ayuda de esta manera acepten este reconocimiento anónimo.

Estaré muy agradecido con ustedes si me envían algún comentario o sugerencia, o si me hacen saber la existencia de problemas de cualquier tipo en relación con esta edición.

Russell Charles Hibbeler
hibbeler@bellsouth.net

Recursos (en inglés) para los profesores que utilizan este texto como apoyo para su asignatura

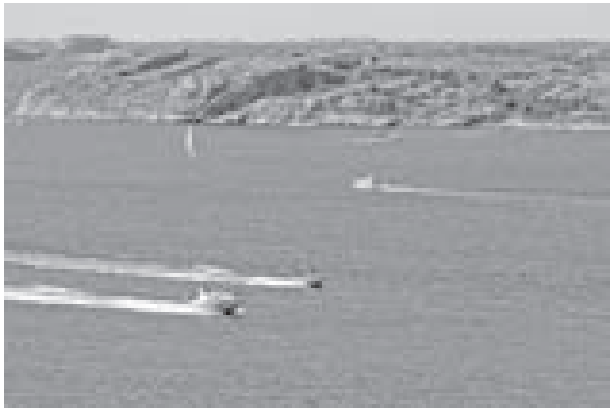
- **Manual de soluciones para el profesor.** Este suplemento incluye soluciones completas apoyadas por enunciados y figuras de los problemas. El manual de esta decimocuarta edición ha sido modificado para mejorar su legibilidad, y su precisión se revisó varias veces. El manual de soluciones para el profesor está disponible en: www.pearsonenespañol.com/hibbeler.

- **Recursos para el profesor.** Los recursos visuales que acompañan al texto se encuentran disponibles en: www.pearsonenespañol.com/hibbeler. Estos recursos incluyen todas las figuras del texto en formato de diapositivas de PowerPoint.

Por favor contacte a su representante de Pearson para obtener una clave de inicio y contraseña para acceder a estos recursos.

CONTENIDO

Prefacio 7



12 Cinemática de una partícula 3

Objetivos del capítulo 3
12.1 Introducción 3
12.2 Cinemática rectilínea: movimiento continuo 5
12.3 Cinemática rectilínea: movimiento errático 20
12.4 Movimiento curvilíneo general 34
12.5 Movimiento curvilíneo: componentes rectangulares 36
12.6 Movimiento de un proyectil 41
12.7 Movimiento curvilíneo: componentes normal y tangencial 56
12.8 Movimiento curvilíneo: componentes cilíndricas 71
12.9 Análisis del movimiento dependiente absoluto de dos partículas 85
12.10 Movimiento relativo de dos partículas utilizando ejes en traslación 91

13 Cinética de una partícula: fuerza y aceleración 113

Objetivos del capítulo 113
13.1 Segunda ley de Newton del movimiento 113
13.2 Ecuación de movimiento 116
13.3 Ecuación de movimiento de un sistema de partículas 118
13.4 Ecuaciones de movimiento: coordenadas rectangulares 120
13.5 Ecuaciones de movimiento: coordenadas normales y tangenciales 138
13.6 Ecuaciones de movimiento: coordenadas cilíndricas 152
13.7 Movimiento de fuerza central y mecánica espacial 164

14
Cinética de una partícula: trabajo y energía 179

Objetivos del capítulo 179
14.1 Trabajo de una fuerza 179
14.2 Principio de trabajo y energía 184
14.3 Principio de trabajo y energía para un sistema de partículas 186
14.4 Potencia y eficiencia 204
14.5 Fuerzas conservativas y energía potencial 213
14.6 Conservación de la energía 217

15
Cinética de una partícula: impulso y cantidad de movimiento 237

Objetivos del capítulo 237
15.1 Principio de impulso y cantidad de movimiento lineales 237
15.2 Principio de impulso y cantidad de movimiento lineales para un sistema de partículas 240
15.3 Conservación de la cantidad de movimiento lineal de un sistema de partículas 254
15.4 Impacto 266
15.5 Cantidad de movimiento angular 280
15.6 Relación entre el momento de una fuerza y la cantidad de movimiento angular 281
15.7 Principio de impulso y cantidad de movimiento angulares 284
15.8 Flujo continuo de una corriente de fluido 295
15.9 Propulsión con masa variable 300

16 Cinemática plana de un cuerpo rígido 319

Objetivos del capítulo 319
16.1 Movimiento plano de un cuerpo rígido 319
16.2 Traslación 321
16.3 Rotación alrededor de un eje fijo 322
16.4 Análisis del movimiento absoluto 338
16.5 Análisis de movimiento relativo: velocidad 346
16.6 Centro instantáneo de velocidad cero 360
16.7 Análisis del movimiento relativo: aceleración 373
16.8 Análisis del movimiento relativo mediante ejes rotatorios 389

17 Cinética plana de un cuerpo rígido: fuerza y aceleración 409

Objetivos del capítulo 409
17.1 Momento de inercia de masa 409
17.2 Ecuaciones de movimiento de cinética plana 423
17.3 Ecuaciones de movimiento: traslación 426
17.4 Ecuaciones de movimiento: rotación alrededor de un eje fijo 441
17.5 Ecuaciones de movimiento: movimiento plano general 456

18
Cinética plana de un cuerpo rígido: trabajo y energía 473

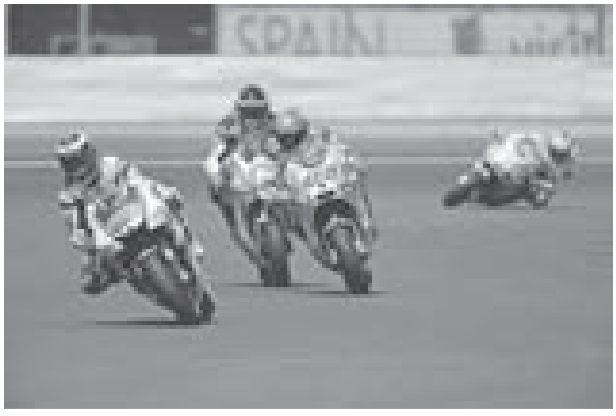
Objetivos del capítulo 473
18.1 Energía cinética 473
18.2 Trabajo de una fuerza 476
18.3 Trabajo de un momento de par 478
18.4 Principio de trabajo y energía 480
18.5 Conservación de la energía 496

19
Cinética plana de un cuerpo rígido: impulso y cantidad de movimiento 517

Objetivos del capítulo 517
19.1 Cantidad de movimiento lineal y angular 517
19.2 Principio de impulso y cantidad de movimiento 523
19.3 Conservación de la cantidad de movimiento 540
19.4 Impacto excéntrico 544

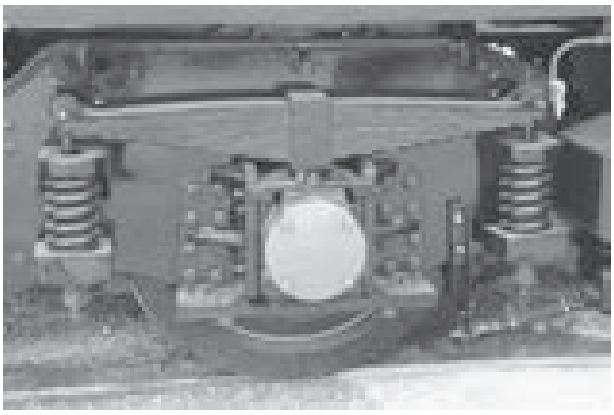
20 Cinemática tridimensional de un cuerpo rígido 561

Objetivos del capítulo 561
20.1 Rotación alrededor de un punto fijo 561
20.2 Derivada con respecto al tiempo de un vector medido desde un sistema fijo o desde un sistema en traslación-rotatorio 564
20.3 Movimiento general 569
20.4 Análisis de movimiento relativo por medio de ejes en traslación y en rotación 578



21 Cinética tridimensional de un cuerpo rígido 591

Objetivos del capítulo 591
21.1 Momentos y productos de inercia 591
21.2 Cantidad de movimiento angular 601
21.3 Energía cinética 604
21.4 Ecuaciones de movimiento 612
21.5 Movimiento giroscópico 626
21.6 Movimiento sin par de torsión 632



22 Vibraciones 643

Objetivos del capítulo 643
22.1 Vibración libre no amortiguada 643
22.2 Métodos de energía 657
22.3 Vibración forzada no amortiguada 663
22.4 Vibración libre amortiguada viscosa 667
22.5 Vibración forzada amortiguada viscosa 670
22.6 Análogos de un circuito eléctrico 673

Apéndice

A. Expresiones matemáticas 682
B. Análisis vectorial 684
C. Regla de la cadena 689

Soluciones parciales y respuestas a los problemas fundamentales 692

Soluciones a los problemas preliminares de Dinámica 713

Soluciones a los problemas de repaso 723

Respuestas a problemas seleccionados 733

Índice 745

CRÉDITOS

Las imágenes iniciales de los capítulos tienen los siguientes créditos:

Capítulo 12, Lars Johansson/Fotolia
Capítulo 13, Migel/Shutterstock
Capítulo 14, Oliver Furrer/Ocean/Corbis
Capítulo 15, David J. Green/Alamy
Capítulo 16, TFoxFoto/Shutterstock
Capítulo 17, Surasaki/Fotolia
Capítulo 18, Arinahabich/Fotolia
Capítulo 19, Hellen Sergeyeva/Fotolia
Capítulo 20, Philippe Psaila/Science Source
Capítulo 21, Derek Watt/Alamy
Capítulo 22, Daseaford/Fotolia

INGENIERÍA MECÁNICA

DINÁMICA

DECIMOCUARTA EDICIÓN

Capítulo 12

(© Lars Johansson/Fotolia)

Aunque cada uno de estos botes es bastante grande, a la distancia su movimiento puede analizarse como si cada uno fuera una partícula.

Cinemática de una partícula

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Presentar los conceptos de posición, desplazamiento, velocidad y aceleración.
- Estudiar el movimiento rectilíneo de una partícula y su representación gráfica.
- Investigar el movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva usando distintos sistemas de coordenadas.
- Analizar el movimiento dependiente que existe entre dos partículas.
- Examinar los principios del movimiento relativo de dos partículas mediante ejes en traslación.

12.1 Introducción

La ***mecánica*** es una rama de las ciencias físicas que se ocupa del estado de reposo o movimiento de cuerpos sometidos a la acción de fuerzas. La ingeniería mecánica se divide en dos áreas de estudio: estática y dinámica. La ***estática*** se ocupa del equilibrio de un cuerpo que está en reposo o que se mueve con velocidad constante. Este texto presenta la ***dinámica***, la cual se ocupa del movimiento acelerado de un cuerpo. La dinámica se estudiará en dos partes: *cinemática*, la cual trata sólo los aspectos geométricos del movimiento; y *cinética*, que analiza las fuerzas que provocan el movimiento. Para desarrollar estos principios, primero se verá la dinámica de una partícula, y a continuación se tratarán temas de dinámica de un cuerpo rígido en dos y luego en tres dimensiones.

Históricamente, los principios de la dinámica se desarrollaron cuando fue posible medir el tiempo con exactitud. Galileo Galilei (1564-1642) fue uno de los primeros que hizo contribuciones importantes a esta disciplina. Su trabajo consistió en experimentos con péndulos y cuerpos en caída libre. Sin embargo, las aportaciones más significativas a la dinámica las realizó Isaac Newton (1642-1727), quien se destacó por la formulación de las tres leyes fundamentales del movimiento y la ley universal de atracción gravitacional. Poco después de que se postularan esas leyes, Euler, D′Alembert, Lagrange y otros desarrollaron técnicas importantes para su aplicación.

En la ingeniería hay muchos problemas cuyas soluciones requieren la aplicación de los principios de la dinámica. Por lo común, el diseño estructural de cualquier vehículo, ya sea un automóvil o un avión, requiere considerar el movimiento al cual se somete. Esto también es cierto para muchos dispositivos mecánicos como motores eléctricos, bombas, herramientas portátiles, manipuladores industriales y maquinaria. Asimismo, las predicciones de los movimientos de satélites artificiales, proyectiles y naves espaciales se basan en la teoría de la dinámica. Conforme se presenten más avances tecnológicos, habrá incluso una mayor necesidad de saber cómo aplicar los principios de esta materia.

Solución de problemas. Se considera que la dinámica es más compleja que la estática, ya que en la primera se deben tomar en cuenta las fuerzas aplicadas a un cuerpo y se tiene que describir su movimiento. Asimismo, muchas aplicaciones requieren cálculo integral, más que sólo algebra y trigonometría. En cualquier caso, la forma más efectiva de aprender los principios de la dinámica es ***resolver problemas***. Para tener éxito en dicha labor, es necesario presentar el trabajo de una forma lógica y ordenada, como sugiere la siguiente secuencia de pasos:

1. Lea el problema con cuidado e intente correlacionar la situación física real con la teoría que haya estudiado.
2. Dibuje todos los diagramas necesarios y tabule los datos del problema.
3. Establezca un sistema de coordenadas y aplique los principios pertinentes, casi siempre en forma matemática.
4. Resuelva de manera algebraica las ecuaciones necesarias hasta donde sea práctico; luego, utilice un conjunto consistente de unidades y complete la solución numéricamente. Reporte la respuesta sin más cifras significativas que la precisión de los datos dados.
5. Estudie la respuesta con juicio técnico y sentido común para determinar si parece razonable o no.
6. Una vez completada la solución, repase el problema. Trate de pensar en otras formas de obtener la misma solución.

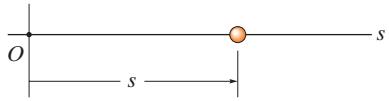
Al aplicar este procedimiento general, realice el trabajo lo más limpio posible. Por lo general, ser pulcro estimula una forma de pensar clara y ordenada, y viceversa.

12.2 Cinemática rectilínea: movimiento continuo

Iniciaremos nuestro estudio de la dinámica con el análisis de la cinemática de una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria rectilínea. Recuerde que una *partícula* tiene masa pero su tamaño y forma son despreciables. Por consiguiente, limitaremos la aplicación a aquellos objetos cuyas dimensiones no afecten el análisis del movimiento. En la mayoría de los problemas nos interesarán los cuerpos de tamaño finito, como cohetes, proyectiles o vehículos. Cada uno de estos objetos se considerará como una partícula, si el movimiento se caracteriza por el movimiento de su centro de masa y la rotación del cuerpo se puede despreciar.

Cinemática rectilínea. La cinemática de una partícula está caracterizada al especificar, en cualquier instante, su posición, velocidad y aceleración.

Posición. La trayectoria rectilínea de una partícula se definirá por medio de un sólo eje de coordenadas s (fig. 12-1a). El origen O en la trayectoria es un punto fijo, y a partir de él se utiliza la ***coordenada de posición*** s para especificar la ubicación de la partícula en cualquier instante dado. La magnitud de s es la distancia de O a la partícula, por lo general medida en metros (m) o pies (pies, ft) y su signo algebraico define el sentido de su dirección. Aunque la selección es arbitraria, en este caso s es positiva ya que el eje de coordenadas es positivo a la derecha del origen. Asimismo, es negativo si la partícula está a la izquierda de O. Tenga en cuenta que *la posición es una cantidad vectorial*, pues tiene tanto magnitud como dirección. En este caso, sin embargo, está representada por el escalar algebraico s, en vez del carácter en negritas **s**, ya que la dirección se mantiene a lo largo del eje de coordenadas.

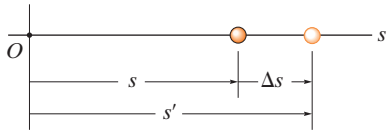


Posición

(a)

Desplazamiento. El ***desplazamiento*** de la partícula se define como el *cambio en su posición*. Por ejemplo, si la partícula se mueve de un punto a otro (fig. 12-1b), el desplazamiento es

$$\Delta s = s' - s$$



Desplazamiento

(b)

Fig. 12-1

En este caso, Δs es *positivo* puesto que la posición final de la partícula queda a la *derecha* de su posición inicial, es decir, $s' > s$. Asimismo, si la posición final quedara a la *izquierda* de su posición inicial, Δs sería *negativo*.

El desplazamiento de una partícula también es una *cantidad vectorial*, y deberá distinguirse de la distancia que recorre la partícula. Específicamente, la *distancia recorrida* es un *escalar positivo* que representa la longitud total de la trayectoria a lo largo de la cual viaja la partícula.

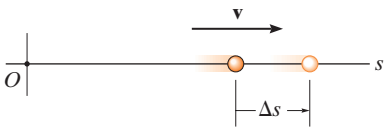
12

Velocidad. Si la partícula experimenta un desplazamiento Δs durante el intervalo Δt, su ***velocidad promedio*** durante este intervalo es

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Si tomamos valores de Δt cada vez más pequeños, la magnitud de Δs se aproxima a un valor diferencial. Por consiguiente, la ***velocidad instantánea*** es un vector definido como $v = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta s / \Delta t)$, o bien,

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad \boxed{v = \frac{ds}{dt}} \qquad (12\text{-}1)$$



Velocidad

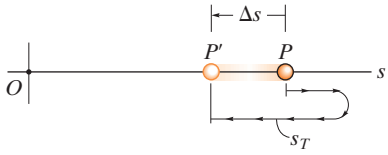
(c)

Como Δt o dt siempre es positivo, el signo utilizado para definir el *sentido* de la velocidad es el mismo que el de Δs o ds. Por ejemplo, si la partícula se está moviendo hacia la *derecha* (fig. 12-1*c*), la velocidad es *positiva*; pero si se mueve hacia la *izquierda*, la velocidad es *negativa*. (Esto se resalta aquí con la flecha que aparece a la izquierda de la ecuación 12-1.) La *magnitud* de la velocidad se conoce como ***rapidez***, y en general se expresa en unidades de m/s o ft/s.

De vez en cuando se utiliza el término "rapidez promedio". La ***rapidez promedio*** es siempre un escalar positivo y se define como la distancia total recorrida por una partícula, s_T, dividida entre el tiempo transcurrido Δt; es decir,

$$(v_{\text{rap}})_{\text{prom}} = \frac{s_T}{\Delta t}$$

Por ejemplo, la partícula en la figura 12-1*d* viaja a lo largo de la trayectoria de longitud s_T en el tiempo Δt, por lo que su rapidez promedio es $(v_{\text{rap}})_{\text{prom}} = s_T/\Delta t$, pero su velocidad promedio es $v_{\text{prom}} = -\Delta s/\Delta t$.



Velocidad promedio y rapidez promedio

(d)

Fig. 12.1 (cont.)

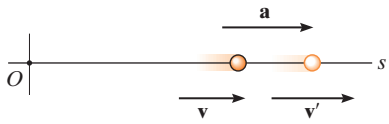
Aceleración. Siempre que se conoce la velocidad de la partícula en dos puntos, su ***aceleración promedio*** durante el intervalo Δt se define como

$$a_{\text{prom}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Aquí Δv representa la diferencia de la velocidad durante el intervalo Δt, es decir, $\Delta v = v' - v$ (fig. 12-1*e*).

La ***aceleración instantánea*** en el instante t es un vector que se determina al tomar valores cada vez más pequeños de Δt y los valores correspondientes de Δv que se aproximan a un valor diferencial, de modo que $a = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta v / \Delta t)$, o bien,

$$(\pm) \qquad \boxed{a = \frac{dv}{dt}} \qquad (12\text{-}2)$$



Aceleración

(e)

Si sustituimos la ecuación 12-1 en este resultado, también podemos escribir

$$(\pm) \qquad a = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Tanto la aceleración promedio como la instantánea pueden ser positivas o negativas. En particular, cuando la partícula *se va moviendo cada vez más lentamente*, o su rapidez se reduce, se dice que se está ***desacelerando***. En este caso, v' en la figura 12-1*f* es *menor* que v, de modo que $\Delta v = v' - v$ será negativa. Por consiguiente, a también será negativa y por lo tanto actuará a la *izquierda*, en el *sentido opuesto* a v. Además, observe que si la partícula está originalmente en reposo, entonces puede tener una aceleración si un instante después tiene una velocidad v'; y si la *velocidad es constante*, entonces la *aceleración es cero* puesto que $\Delta v = v - v = 0$. Las unidades que comúnmente se utilizan para expresar la magnitud de la aceleración son m/s^2 o ft/s^2.

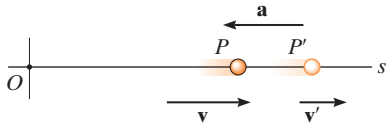
Por último, se puede obtener una relación diferencial importante que involucra el desplazamiento, la velocidad y la aceleración a lo largo de la trayectoria, si eliminamos la diferencial de tiempo dt entre las ecuaciones 12-1 y 12-2. Entonces,

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{dv}{a}$$

o

$$(\pm) \qquad \boxed{a\, ds = v\, dv} \qquad (12\text{-}3)$$

Aunque ya obtuvimos tres ecuaciones cinemáticas importantes, hay que tener en cuenta que la ecuación anterior no es independiente de las ecuaciones 12-1 y 12-2.



Desaceleración

(f)

Fig. 12-1 (cont.)

12

Cuando se suelta la pelota, ésta tiene velocidad cero pero una aceleración de 9.81 m/s^2. (© R. C. Hibbeler)

Aceleración constante, $a = a_c$. Cuando la aceleración es constante, se pueden integrar cada una de las tres ecuaciones cinemáticas $a_c = dv/dt$, $v = ds/dt$ y $a_c\,ds = v\,dv$ para obtener fórmulas que relacionen a_c, v, s y t.

Velocidad en función del tiempo. Integre $a_c = dv/dt$, considerando que inicialmente $v = v_0$ cuando $t = 0$.

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a_c\,dt$$

$$v = v_0 + a_c t \quad \text{Aceleración constante} \tag{12-4}$$

Posición en función del tiempo. Integre $v = ds/dt = v_0 + a_c t$, suponiendo que inicialmente $s = s_0$ cuando $t = 0$.

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t (v_0 + a_c t)\,dt$$

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_c t^2 \quad \text{Aceleración constante} \tag{12-5}$$

Velocidad en función de la posición. Despeje t en la ecuación 12-4 y sustituya en la ecuación 12-5 o integre $v\,dv = a_c\,ds$, considerando que inicialmente $v = v_0$ cuando $s = s_0$.

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{s_0}^{s} a_c\,ds$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0) \quad \text{Aceleración constante} \tag{12-6}$$

La dirección positiva del eje s, indicada por la flecha que aparece a la izquierda de cada ecuación, determina los signos algebraicos de s_0, v_0 y a_c, utilizados en las tres ecuaciones anteriores. Recuerde que estas ecuaciones son útiles *sólo cuando la aceleración es constante y cuando* $t = 0$, $s = s_0$, $v = v_0$. Un ejemplo típico de movimiento acelerado constante sucede cuando un cuerpo cae libremente hacia el suelo. Si se ignora la resistencia del aire y la distancia de caída es corta, entonces la aceleración *dirigida hacia abajo* del cuerpo, cuando se aproxima a la Tierra, es constante y aproximadamente de 9.81 m/s^2 o 32.2 ft/s^2. La comprobación de esto se da en el ejemplo 13.2.

Puntos importantes

- La dinámica se ocupa de cuerpos que tienen movimiento acelerado.
- La cinemática es el estudio de la geometría del movimiento.
- La cinética es un estudio de las fuerzas que causan el movimiento.
- La cinemática rectilínea se refiere al movimiento en línea recta.
- La rapidez se refiere a la magnitud de la velocidad.
- La rapidez promedio es la distancia total recorrida, dividida entre el tiempo total. Ésta es diferente de la velocidad promedio, la cual es el desplazamiento dividido entre el tiempo.
- Una partícula que se va moviendo cada vez más lentamente se está desacelerando.
- Una partícula puede tener una aceleración y, al mismo tiempo, una velocidad cero.
- La relación $a\,ds = v\,ds$ se deriva de $a = dv/dt$ y $v = ds/dt$, al eliminar dt.

Durante el tiempo en que este cohete experimenta movimiento rectilíneo, su altitud en función del tiempo puede medirse y expresarse como $s = s(t)$. Su velocidad se determina entonces por $v = ds/dt$, y su aceleración a partir de $a = dv/dt$. (© NASA)

Procedimiento para el análisis

Sistema de coordenadas

- Establezca una coordenada de posición s a lo largo de la trayectoria y especifique su *origen fijo* y su dirección positiva.
- Como el movimiento sucede a lo largo de una línea recta, las cantidades vectoriales de posición, velocidad y aceleración se pueden representar como escalares algebraicas. Para el trabajo analítico el sentido de s, v y a se define entonces por sus *signos algebraicos*.
- El sentido positivo de cada uno de estos escalares se puede indicar con una flecha mostrada al lado de cada ecuación cinemática empleada.

Ecuaciones cinemáticas

- Si se conoce una relación entre *dos* de las cuatro variables, a, v, s y t, entonces se puede obtener una tercera variable con una de las ecuaciones cinemáticas, $a = dv/dt$, $v = ds/dt$ o $a\,ds = v\,dv$, puesto que cada ecuación relaciona las tres variables*.
- Siempre que se realice una integración, es importante que se conozcan la posición y la velocidad en un instante dado para evaluar la constante de integración si se utiliza una integral indefinida, o los límites de integración si se utiliza una integral definida.
- Recuerde que las ecuaciones 12-4 a 12-6 tienen sólo un uso limitado, pues se aplican únicamente cuando la *aceleración es constante* y las condiciones iniciales son $s = s_0$ y $v = v_0$ cuando $t = 0$.

* En el apéndice A se dan algunas fórmulas de diferenciación e integración estándar.

12

EJEMPLO 12.1

(© R. C. Hibbeler)

El automóvil de la fotografía de la izquierda y la figura 12-2 se desplaza en línea recta, de modo que durante un corto tiempo su velocidad está definida por $v = (3t^2 + 2t)$ ft/s, donde t está en segundos. Determine su posición y aceleración si $t = 3$ s. Cuando $t = 0, s = 0$.

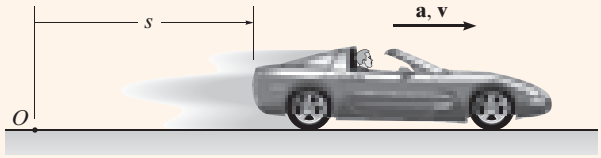


Fig. 12-2

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. La coordenada de posición se extiende desde el origen fijo O hasta el auto y es positiva a la derecha.

Posición. Como $v = f(t)$, la posición del automóvil se determina con $v = ds/dt$, puesto que esta ecuación relaciona v, s y t. Observe que $s = 0$ cuando $t = 0$, entonces*

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad v = \frac{ds}{dt} = (3t^2 + 2t)$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t (3t^2 + 2t)dt$$

$$s\Big|_0^s = t^3 + t^2\Big|_0^t$$

$$s = t^3 + t^2$$

Cuando $t = 3$ s,

$$s = (3)^3 + (3)^2 = 36 \text{ ft} \qquad \textit{Resp.}$$

Aceleración. Como $v = f(t)$, la aceleración se determina con $a = dv/dt$, puesto que esta ecuación relaciona a, v y t.

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 + 2t)$$

$$= 6t + 2$$

Cuando $t = 3$ s,

$$a = 6(3) + 2 = 20 \text{ ft/s}^2 \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Para resolver este problema no pueden utilizarse las fórmulas de aceleración constante, porque la aceleración es una función del tiempo.

*Se puede obtener *el mismo resultado* evaluando una constante de integración C en vez de utilizar los límites definidos en la integral. Por ejemplo, al integrar $ds = (3t^2 + 2t)dt$ resulta en $s = t^3 + t^2 + C$. Con la condición de que en $t = 0, s = 0$, entonces $C = 0$.

EJEMPLO 12.2

Se dispara un proyectil pequeño verticalmente *hacia abajo* en un medio fluido con una velocidad inicial de 60 m/s. Debido a la resistencia aerodinámica del fluido, el proyectil experimenta una desaceleración de $a = (-0.4v^3)\ \text{m/s}^2$, donde v está en m/s. Determine la velocidad del proyectil y su posición 4 s después de que se dispara.

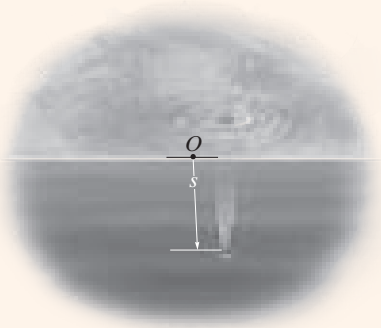


Fig. 12-3

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. Como el movimiento es hacia abajo, la coordenada de posición es positiva hacia abajo, con su origen localizado en O (fig. 12-3).

Velocidad. En este caso, $a = f(v)$ y, por lo tanto, debemos determinar la velocidad como una función del tiempo con $a = dv/dt$, ya que esta ecuación relaciona v, a y t. (¿Por qué no se utiliza $v = v_0 + a_c t$?). Al separar las variables e integrar, con $v_0 = 60$ m/s cuando $t = 0$, se obtiene

$$(+\downarrow) \qquad a = \frac{dv}{dt} = -0.4v^3$$

$$\int_{60\ \text{m/s}}^{v} \frac{dv}{-0.4v^3} = \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{-0.4}\left(\frac{1}{-2}\right)\frac{1}{v^2}\bigg|_{60}^{v} = t - 0$$

$$\frac{1}{0.8}\left[\frac{1}{v^2} - \frac{1}{(60)^2}\right] = t$$

$$v = \left\{\left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{-1/2}\right\}\ \text{m/s}$$

En este caso, se toma la raíz positiva ya que el proyectil continuará moviéndose hacia abajo. Cuando $t = 4$ s,

$$v = 0.559\ \text{m/s}\downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

Posición. Con $v = f(t)$ conocida, podemos obtener la posición del proyectil mediante $v = ds/dt$, pues esta ecuación relaciona s, v y t. Al utilizar la condición inicial $s = 0$, cuando $t = 0$,

$$(+\downarrow) \qquad v = \frac{ds}{dt} = \left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{-1/2}$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t \left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{-1/2} dt$$

$$s = \frac{2}{0.8}\left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{1/2}\bigg|_0^t$$

$$s = \frac{1}{0.4}\left\{\left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{1/2} - \frac{1}{60}\right\}\ \text{m}$$

Cuando $t = 4$ s,

$$s = 4.43\ \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 12.3

Durante una prueba un cohete asciende a 75 m/s y su motor falla cuando está a 40 m del suelo. Determine la altura máxima s_B alcanzada por el cohete y su velocidad justo antes de chocar contra el suelo. Mientras está en movimiento, el cohete se ve sometido a una aceleración constante dirigida hacia abajo de 9.81 m/s^2 debido a la gravedad. Ignore la resistencia del aire.

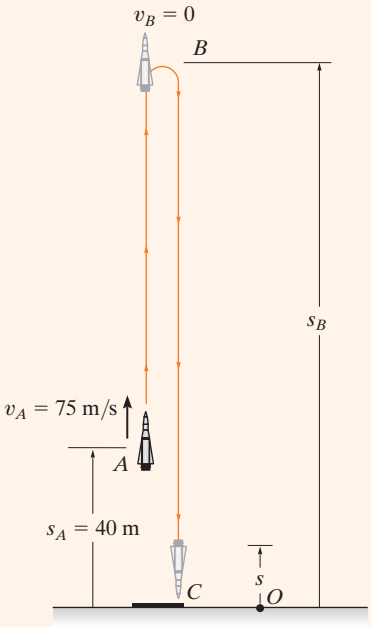


Fig. 12-4

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. El origen O de la coordenada de posición s se considera al nivel del suelo con signo positivo hacia arriba (fig. 12-4).

Altura máxima. Como el cohete *asciende*, $v_A = +75$ m/s cuando $t = 0$. A la altura máxima $s = s_B$ la velocidad $v_B = 0$. Durante todo el movimiento, la aceleración es $a_c = -9.81$ m/s^2 (negativa puesto que actúa en el sentido *opuesto* a la velocidad positiva o al desplazamiento positivo). Como a_c es *constante*, la posición del cohete se puede relacionar con su velocidad en los dos puntos A y B de la trayectoria mediante la ecuación 12-6, es decir,

$$(+\uparrow) \qquad v_B^2 = v_A^2 + 2a_c(s_B - s_A)$$
$$0 = (75 \text{ m/s})^2 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)(s_B - 40 \text{ m})$$
$$s_B = 327 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

Velocidad. Para obtener la velocidad del cohete justo antes de que choque contra el suelo, aplicamos la ecuación 12-6 entre los puntos B y C (fig. 12-4).

$$(+\uparrow) \qquad v_C^2 = v_B^2 + 2a_c(s_C - s_B)$$
$$= 0 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)(0 - 327 \text{ m})$$
$$v_C = -80.1 \text{ m/s} = 80.1 \text{ m/s} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

Se eligió la raíz negativa pues el cohete está descendiendo. Del mismo modo, también se puede aplicar la ecuación 12-6 entre los puntos A y C, es decir,

$$(+\uparrow) \qquad v_C^2 = v_A^2 + 2a_c(s_C - s_A)$$
$$= (75 \text{ m/s})^2 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)(0 - 40 \text{ m})$$
$$v_C = -80.1 \text{ m/s} = 80.1 \text{ m/s} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Observe que el cohete está sujeto a una *desaceleración* de A y B de 9.81 m/s^2 y, luego, de B a C se *acelera* a esta razón. Asimismo, aun cuando el cohete se *detiene* momentáneamente en B ($v_B = 0$), ¡la aceleración en B sigue siendo de 9.81 m/s^2 hacia abajo!

EJEMPLO 12.4

Una partícula metálica se somete a la influencia de un campo magnético a medida que desciende a través de un fluido que se extiende de la placa A a la placa B (fig. 12-5). Si la partícula se libera del reposo en el punto medio C, $s = 100$ mm y la aceleración es $a = (4s)\ \text{m/s}^2$, donde s está en metros, determine la velocidad de la partícula cuando llega a la placa B, $s = 200$ mm, y el tiempo que le lleva para ir de C a B.

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. Como se indica en la figura 12-5, s es positiva hacia abajo, medida a partir de la placa A.

Velocidad. Como $a = f(s)$, la velocidad como una función de la posición se obtiene con $v\,dv = a\,ds$. Ya que $v = 0$ en $s = 0.1$ m, tenemos

$$(+\downarrow) \qquad v\,dv = a\,ds$$

$$\int_0^v v\,dv = \int_{0.1\text{ m}}^{s} 4s\,ds$$

$$\frac{1}{2}v^2\Big|_0^v = \frac{4}{2}s^2\Big|_{0.1\text{ m}}^{s}$$

$$v = 2(s^2 - 0.01)^{1/2}\ \text{m/s}$$

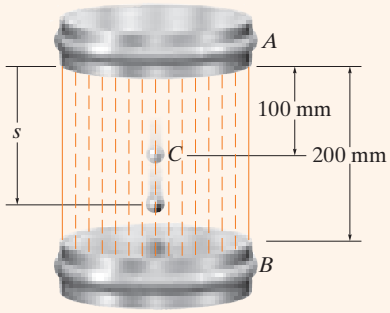


Fig. 12-5

En $s = 200\ \text{mm} = 0.2$ m,

$$v_B = 0.346\ \text{m/s} = 346\ \text{mm/s}\ \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

Se elige la raíz positiva porque la partícula está descendiendo, es decir, viaja en la dirección $+s$.

Tiempo. El tiempo para que la partícula vaya de C a B se obtiene con $v = ds/dt$ y la ecuación 1, donde $s = 0.1$ m cuando $t = 0$. Del apéndice A,

$$(+\downarrow) \qquad ds = v\,dt$$

$$= 2(s^2 - 0.01)^{1/2}dt$$

$$\int_{0.1}^{s} \frac{ds}{(s^2 - 0.01)^{1/2}} = \int_0^t 2\,dt$$

$$\ln\left(\sqrt{s^2 - 0.01} + s\right)\Big|_{0.1}^{s} = 2t\Big|_0^t$$

$$\ln\left(\sqrt{s^2 - 0.01} + s\right) + 2.303 = 2t$$

At $s = 0.2$ m,

$$t = \frac{\ln\sqrt{(0.2)^2 - 0.01} + 0.2 + 2.303}{2} = 0.658\ \text{s} \qquad \textit{Resp.}$$

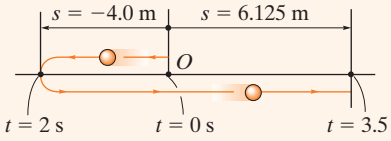
NOTA: Las fórmulas de aceleración constante no pueden utilizarse en este ejemplo porque la aceleración cambia con la posición, es decir, $a = 4s$.

12

EJEMPLO 12.5

Una partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria horizontal con una velocidad de $v = (3t^2 - 6t)$ m/s, donde t es el tiempo en segundos. Si inicialmente se encuentra en el origen O, determine la distancia recorrida en 3.5 s y la velocidad promedio, así como la rapidez promedio de la partícula, durante el intervalo de tiempo.

SOLUCIÓN



Sistema de coordenadas. Aquí el movimiento positivo es hacia la derecha, medido a partir del origen O (fig. 12-6*a*).

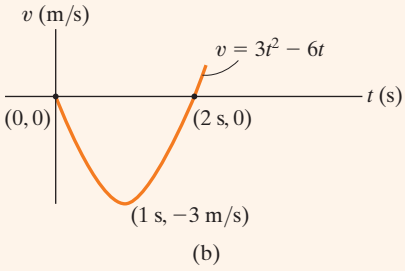
Distancia recorrida. Como $v = f(t)$, la posición como una función del tiempo se determina integrando $v = ds/dt$ con $t = 0, s = 0$.

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad ds = v\,dt$$

$$= (3t^2 - 6t)\,dt$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t (3t^2 - 6t)\,dt$$

$$s = (t^3 - 3t^2)\ \text{m} \qquad (1)$$



(b)

Fig. 12-6

Para determinar la distancia recorrida en 3.5 s, es necesario investigar la trayectoria del movimiento. Si consideramos una gráfica de la función de velocidad (fig. 12-6*b*), se observa que con $0 < t < 2$ s la velocidad es *negativa*, lo cual significa que la partícula se está desplazando hacia la *izquierda*; y para $t > 2$ s la velocidad es *positiva* y, por consiguiente, la partícula se desplaza hacia la *derecha*. Asimismo, observe que $v = 0$ cuando $t = 2$ s. La posición de la partícula cuando $t = 0, t = 2$ s y $t = 3.5$ s se determina ahora con la ecuación 1:

$$s\big|_{t=0} = 0 \quad s\big|_{t=2\,\text{s}} = -4.0\ \text{m} \quad s\big|_{t=3.5\,\text{s}} = 6.125\ \text{m}$$

La trayectoria se muestra en la figura 12-6*a*. De ahí que la distancia recorrida en 3.5 s sea

$$s_T = 4.0 + 4.0 + 6.125 = 14.125\ \text{m} = 14.1\ \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

Velocidad. El *desplazamiento* de $t = 0$ a $t = 3.5$ s es

$$\Delta s = s\big|_{t=3.5\,\text{s}} - s\big|_{t=0} = 6.125\ \text{m} - 0 = 6.125\ \text{m}$$

y, por lo tanto, la velocidad promedio es

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6.125\ \text{m}}{3.5\ \text{s} - 0} = 1.75\ \text{m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

La rapidez promedio se define en función de la *distancia recorrida* s_T. Este escalar positivo es

$$(v_{\text{rap}})_{\text{prom}} = \frac{s_T}{\Delta t} = \frac{14.125\ \text{m}}{3.5\ \text{s} - 0} = 4.04\ \text{m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: En este problema, la aceleración es $a = dv/dt = (6t - 6)\ \text{m/s}^2$, la cual no es constante.

Es muy recomendable que usted se ponga a prueba resolviendo los ejemplos; repáselos una y otra vez tratando de pensar qué ecuaciones de cinemática se deben utilizar y la forma como se aplican para determinar las incógnitas. Luego, antes de solucionar cualesquiera de los problemas, intente resolver algunos de los problemas preliminares y de los problemas fundamentales que se dan en las siguientes páginas. Las soluciones y las respuestas a todos estos problemas se incluyen en la parte final del libro. **Si hace esto a lo largo del texto, le ayudará a comprender cómo se aplica la teoría y, de este modo, desarrollará sus habilidades para resolver problemas.**

PROBLEMA PRELIMINAR

P12-1.

a) Si $s = (2t^3)$ m, donde t se da en segundos, determine v cuando $t = 2$ s.

b) Si $v = (5s)$ m/s, donde s se da en metros, determine a en $s = 1$ m.

c) Si $v = (4t + 5)$ m/s, donde t se da en segundos, determine a cuando $t = 2$ s.

d) Si $a = 2$ m/s^2, determine v cuando $t = 2$ s si $v = 0$ cuando $t = 0$.

e) Si $a = 2$ m/s^2, determine v en $s = 4$ m si $v = 3$ m/s en $s = 0$.

f) Si $a = (s)$ m/s^2, donde s se da en metros, determine v cuando $s = 5$ m si $v = 0$ en $s = 4$ m.

g) Si $a = 4$ m/s^2, determine s cuando $t = 3$ s si $v = 2$ m/s y $s = 2$ m cuando $t = 0$.

h) Si $a = (8t^2)$ m/s^2, determine v cuando $t = 1$ s si $v = 0$ en $t = 0$.

i) Si $s = (3t^2 + 2)$ m, determine v cuando $t = 2$ s.

j) Cuando $t = 0$ la partícula está en A. En cuatro segundos viaja hasta B, luego de otros seis segundos viaja hasta C. Determine la velocidad promedio y la rapidez promedio. El origen de las coordenadas está en O.

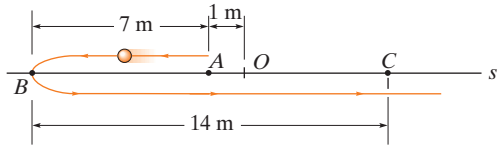


Fig. P12-1

12

PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F12-1. Inicialmente, el automóvil viaja a lo largo de una carretera recta a una rapidez de 35 m/s. Si se aplican los frenos y la rapidez del auto se reduce a 10 m/s en 15 s, determine su desaceleración constante.

Fig. F12-1

F12-2. Se lanza una bola verticalmente hacia arriba con una rapidez de 15 m/s. Determine el tiempo de vuelo cuando regresa a su posición original.

Fig. F12-2

F12-3. Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta a una velocidad de $v = (4t - 3t^2)$ m/s, donde t está en segundos. Determine la posición de la partícula cuando $t = 4$ s. $s = 0$ cuando $t = 0$.

F12-4. Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta a una rapidez de $v = (0.5t^3 - 8t)$ m/s, donde t está en segundos. Determine su aceleración cuando $t = 2$ s.

F12-5. La posición de una partícula está dada por $s = (2t^2 - 8t + 6)$ m, donde t está en segundos. Determine el tiempo cuando su velocidad es cero y la distancia total que recorre cuando $t = 3$ s.

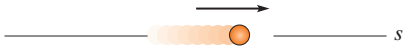


Fig. F12-5

F12-6. Una partícula viaja a lo largo de una línea recta con una aceleración de $a = (10 - 0.2s)$ m/s^2, donde s se mide en metros. Determine su velocidad cuando $s = 10$ m, si $v = 5$ m/s cuando $s = 0$.

Fig. F12-6

F12-7. Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta, de modo que su aceleración es $a = (4t^2 - 2)$ m/s^2, donde t está en segundos. Cuando $t = 0$, la partícula está 2 m a la izquierda del origen y cuando $t = 2$ s, está 20 m a la izquierda del origen. Determine su posición cuando $t = 4$ s.

F12-8. Una partícula viaja a lo largo de una línea recta a una velocidad de $v = (20 - 0.05s^2)$ m/s, donde s está en metros. Determine la aceleración de la partícula cuando $s = 15$ m.

PROBLEMAS

12.1. Partiendo del reposo, una partícula que se mueve en línea recta tiene una aceleración de $a = (2t - 6)\ \text{m/s}^2$, donde t se da en segundos. ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $t = 6$ s, y cuál es su posición cuando $t = 11$ s?

12-2. Si una partícula tiene una velocidad inicial de $v_0 = 12\ \text{ft/s}$ a la derecha, en $s_0 = 0$, determine su posición cuando $t = 10$ s, si $a = 2\ \text{ft/s}^2$ hacia la izquierda.

12-3. Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta con una velocidad $v = (12 - 3t^2)\ \text{m/s}$, donde t se da en segundos. Cuando $t = 1$ s, la partícula se encuentra a 10 metros a la izquierda del origen. Determine la aceleración cuando $t = 4$ s, el desplazamiento desde $t = 0$ hasta $t = 10$ s y la distancia que recorre la partícula durante este periodo de tiempo.

***12-4.** Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta con aceleración constante. Cuando $s = 4$ ft, $v = 3$ ft/s y cuando $s = 10$ ft, $v = 8$ ft/s. Determine la velocidad como una función de la posición.

12-5. La velocidad de una partícula que viaja en línea recta está dada por $v = (6t - 3t^2)\ \text{m/s}$, donde t se da en segundos. Si $s = 0$ cuando $t = 0$, determine la desaceleración de la partícula y su posición cuando $t = 3$ s. ¿Hasta dónde ha viajado la partícula durante el intervalo de tiempo de 3 s, y cuál ha sido su rapidez promedio?

12-6. La posición de una partícula a lo largo de una línea recta está dada por $s = (1.5t^3 - 13.5t^2 + 22.5t)$ ft, donde t se da en segundos. Determine la posición de la partícula cuando $t = 6$ s y la distancia total que se desplaza durante el intervalo de tiempo de 6 s. *Sugerencia:* Grafique la trayectoria para determinar la distancia total recorrida.

12-7. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta, de manera que su posición está definida por $s = (t^2 - 6t + 5)$ m. Determine la velocidad promedio, la rapidez promedio y la aceleración de la partícula cuando $t = 6$ s.

***12-8.** Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta, de manera que su posición está definida por $s = (10t^2 + 20)$ mm, donde t se da en segundos. Determine (a) el desplazamiento de la partícula durante el intervalo de tiempo desde $t = 1$ s hasta $t = 5$ s, (b) la velocidad promedio de la partícula durante este intervalo de tiempo, y (c) la aceleración cuando $t = 1$ s.

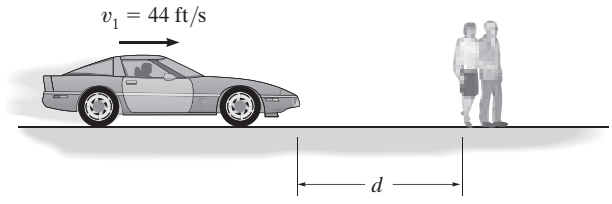
12-9. La aceleración de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta está dada por $a = (2t - 1)\ \text{m/s}^2$, donde t se da en segundos. Si $s = 1$ m y $v = 2$ m/s cuando $t = 0$, determine la velocidad y la posición de la partícula cuando $t = 6$ s. Asimismo, determine la distancia total que viaja la partícula durante este periodo de tiempo.

12-10. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una aceleración de $a = 5/(3s^{1/3} + s^{5/2})\ \text{m/s}^2$, donde s se da en metros. Determine la velocidad de la partícula cuando $s = 2$ m, si inicia desde el reposo cuando $s = 1$ m. Use un método numérico para evaluar la integral.

12-11. Una partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria en línea recta, de modo que en 4 s se mueve desde una posición inicial $s_A = -8$ m hasta una posición $s_B = +3$ m. Luego, en otros 5 s se mueve desde s_B hasta $s_C = -6$ m. Determine la velocidad promedio y la rapidez promedio de la partícula durante el intervalo de tiempo de 9 s.

***12-12.** Un automóvil que se desplaza con una rapidez inicial de 70 km/h acelera a 6000 km/h^2 a lo largo de un camino recto. ¿Cuánto tiempo se tarda en alcanzar una rapidez de 120 km/h? Además, ¿qué distancia viaja el automóvil durante este tiempo?

12-13. Las pruebas revelan que un conductor normal requiere alrededor de 0.75 s para *reaccionar* ante una situación y evitar una colisión. Un conductor que tiene un nivel de 0.1% de alcohol en su sangre se tarda alrededor de 3 s para hacer lo mismo. Si estos conductores están viajando en una carretera recta a 30 mph (44 ft/s) y sus automóviles pueden desacelerar a 2 ft/s^2, determine la menor distancia de frenado d que requieren desde el momento en que ven a los peatones. *Moraleja:* Si usted bebe, ¡por favor no maneje!



Prob. 12-13

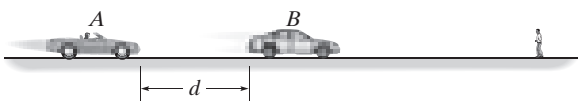
12

12-14. La posición de una partícula a lo largo de una trayectoria en línea recta está definida por $s = (t^3 - 6t^2 - 15t + 7)$ ft, donde t se da en segundos. Determine la distancia total recorrida cuando $t = 10$ s. ¿Cuáles son la velocidad promedio, la rapidez promedio, la velocidad instantánea y la aceleración de la partícula en este momento?

12-15. Una partícula se mueve con una velocidad v_0 cuando $s = 0$ y $t = 0$. Si se somete a una desaceleración de $a = -kv^3$, donde k es una constante, determine su velocidad y su posición en función del tiempo.

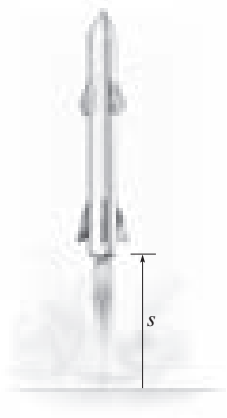
***12-16.** Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una velocidad inicial de 6 m/s, cuando se somete a una desaceleración de $a = (-1.5v^{1/2})$ m/s^2, donde v se da en m/s. Determine qué tan lejos viaja antes de detenerse. ¿Cuánto tiempo toma esto?

12-17. El automóvil B viaja a una distancia d adelante del automóvil A. Ambos autos se desplazan a 60 ft/s cuando el conductor del auto B aplica súbitamente los frenos, haciendo que su vehículo desacelere a 12 ft/s^2. Al conductor del automóvil A le toman 0.75 s reaccionar (éste es el tiempo de reacción normal para los conductores). Cuando aplica los frenos, desacelera a 15 ft/s^2. Determine la distancia mínima d entre los autos que evitaría una colisión.



Prob. 12-17

12-18. La aceleración de un cohete que viaja hacia arriba está dada por $a = (6 + 0.02s)$ m/s^2, donde s se da en metros. Determine el tiempo necesario para que el cohete llegue a una altitud de $s = 100$ m. Inicialmente, $v = 0$ y $s = 0$ cuando $t = 0$.

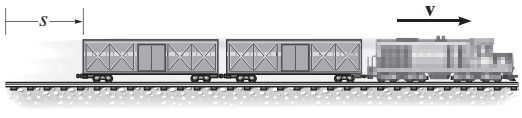


Prob. 12-18

12-19. Un tren parte del reposo en la estación A y acelera a 0.5 m/s^2 durante 60 s. Después se desplaza con una velocidad constante durante 15 minutos. A continuación, desacelera a 1 m/s^2 hasta que alcanza el reposo en la estación B. Determine la distancia entre las estaciones.

***12-20.** La velocidad de una partícula que viaja a lo largo de una línea recta es $v = (3t^2 - 6t)$ ft/s, donde t se da en segundos. Si $s = 4$ ft cuando $t = 0$, determine la posición de la partícula cuando $t = 4$ s. ¿Cuál es la distancia total recorrida durante el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 4$ s? Además, ¿cuál es la aceleración cuando $t = 2$ s?

12-21. Un tren de carga se desplaza a $v = 60(1 - e^{-t})$ ft/s, donde t es el tiempo transcurrido en segundos. Determine la distancia recorrida en tres segundos, y la aceleración en ese instante de tiempo.



Prob. 12-21

12-22. Una bolsa de arena se deja caer desde un globo que asciende verticalmente a una rapidez constante de 6 m/s. Si la bolsa se libera con la misma velocidad ascendente de 6 m/s cuando $t = 0$ y golpea el suelo cuando $t = 8$ s, determine la rapidez de la bolsa al golpear el suelo y la altitud del globo en ese instante.

12-23. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta, de modo que su aceleración está definida por $a = (-2v)$ m/s^2, donde v se da en metros por segundo. Si $v = 20$ m/s cuando $s = 0$ y $t = 0$, determine la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo.

***12-24.** La aceleración de una partícula que viaja a lo largo de una línea recta es $a = \frac{1}{4} s^{1/2}$ m/s^2, donde s se da en metros. Si $v = 0, s = 1$ m cuando $t = 0$, determine la velocidad de la partícula en $s = 2$ m.

12-25. Si se tienen en cuenta los efectos de la resistencia atmosférica, un cuerpo en caída libre tiene una aceleración definida por la ecuación $a = 9.81[1 - v^2(10^{-4})]$ m/s^2, donde v se da en m/s y la dirección positiva es hacia abajo. Si el cuerpo se libera desde el reposo a *una gran altura*, determine (a) la velocidad cuando $t = 5$ s, y (b) la velocidad terminal o máxima alcanzable del cuerpo (cuando $t \to \infty$).

12-26. La aceleración de una partícula a lo largo de una línea recta está definida por $a = (2t - 9)$ m/s^2, donde t se da en segundos. En $t = 0, s = 1$ m y $v = 10$ m/s. Cuando $t = 9$ s, determine (a) la posición de la partícula, (b) la distancia total recorrida y (c) la velocidad.

12-27. Cuando una partícula cae a través del aire, su aceleración inicial $a = g$ disminuye hasta llegar a cero y, a partir de entonces, cae a una velocidad constante o terminal v_f. Si esta variación de la aceleración se puede expresar como $a = (g/v_f^2)(v_f^2 - v^2)$, determine el tiempo necesario para que la velocidad sea $v = v_f/2$. En un inicio, la partícula cae desde el reposo.

***12-28.** Dos partículas A y B parten desde el reposo en el origen $s = 0$ y se mueven a lo largo de una línea recta, de modo que $a_A = (6t - 3)$ ft/s^2 y $a_B = (12t^2 - 8)$ ft/s^2, donde t se da en segundos. Determine la distancia entre ellas cuando $t = 4$ s y la distancia total que cada una ha viajado en $t = 4$ s.

12-29. Una bola A se lanza verticalmente hacia arriba desde la parte superior de un edificio de 30 m de altura con una velocidad inicial de 5 m/s. En el mismo instante, otra bola B se lanza hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 20 m/s. Determine la altura desde el suelo y el tiempo en que ambas se encuentran a la misma altura.

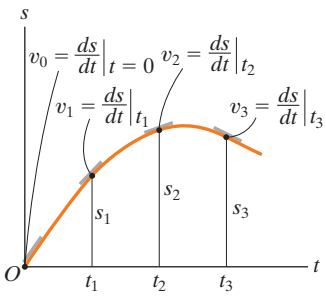
12-30. Una esfera se dispara hacia abajo en un medio con una rapidez inicial de 27 m/s. Si la esfera experimenta una desaceleración de $a = (-6t)$ m/s^2, donde t se da en segundos, determine la distancia que recorre antes de detenerse.

12-31. La velocidad de una partícula que viaja a lo largo de una línea recta es $v = v_0 - ks$, donde k es constante. Si $s = 0$ cuando $t = 0$, determine la posición y la aceleración de la partícula como una función del tiempo.

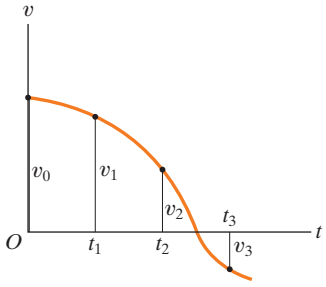
***12-32.** La bola A se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad v_0. La bola B se lanza hacia arriba desde el mismo punto y con la misma velocidad, pero t segundos después. Determine el tiempo transcurrido $t < 2v_0/g$ desde el instante en que se lanza la bola A hasta que las bolas pasan una junto a la otra, y encuentre la velocidad de cada bola en ese instante.

12-33. Cuando se lanza un cuerpo a una gran altitud por encima de la *superficie* de la Tierra, se debe tomar en cuenta la variación de la aceleración de la gravedad con respecto a la altitud y. Despreciando la resistencia del aire, esta aceleración se determina con la fórmula $a = -g_0[R^2/(R + y)^2]$, donde g_0 es la constante de aceleración gravitacional al nivel del mar, R es el radio de la Tierra y la dirección positiva se mide hacia arriba. Si $g_0 = 9.81$ m/s^2 y $R = 6356$ km, determine la velocidad inicial mínima (velocidad de escape) a la que se debe disparar un proyectil verticalmente desde la superficie terrestre, de modo que no caiga de regreso a la Tierra. *Sugerencia:* Esto requiere que $v = 0$ a medida que $y \to \infty$.

12-34. Teniendo en cuenta la variación de la aceleración de la gravedad a con respecto a la altitud y (vea el problema 12-36), derive una ecuación que relacione la velocidad de una partícula que cae libremente con su altitud. Suponga que la partícula se suelta desde el reposo a una altitud y_0 de la superficie de la Tierra. ¿Con qué velocidad choca la partícula contra la Tierra, si se suelta del reposo a una altitud $y_0 = 500$ km? Use los datos numéricos del problema 12-33.

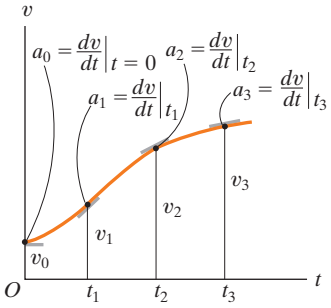


(a)

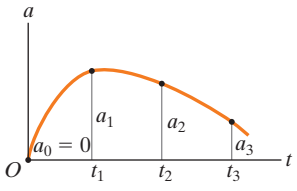


(b)

Fig. 12-7



(a)



(b)

Fig. 12-8

12.3 Cinemática rectilínea: movimiento errático

Cuando el movimiento de una partícula es errático o variable, su posición, velocidad y aceleración *no pueden* describirse mediante una sola función matemática continua a lo largo de toda la trayectoria. En su lugar, se requerirá una serie de funciones para especificar el movimiento en diferentes intervalos. Por eso, conviene representar gráficamente el movimiento. Si se puede trazar una gráfica del movimiento que relacione dos variables cualesquiera de las variables s, v, a, t, entonces esta gráfica puede utilizarse para construir gráficas subsecuentes que relacionen las dos variables restantes, ya que las variables están relacionadas por las relaciones diferenciales $v = ds/dt$, $a = dv/dt$ o $a\,ds = v\,dv$. Con frecuencia ocurren varias situaciones.

Gráficas de *s-t*, *v-t* y *a-t*. Para construir la gráfica de *v-t* dada la gráfica de *s-t* (fig. 12-7*a*), debería utilizarse la ecuación $v = ds/dt$, ya que relaciona las variables s y t con v. Esta ecuación establece que

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$$\text{Pendiente de la gráfica de } s\text{-}t = \text{velocidad}$$

Por ejemplo, si se mide la pendiente en la gráfica de *s-t* cuando $t = t_1$, la velocidad es v_1, la cual se traza en la figura 12-7*b*. La gráfica de *v-t* se construye trazando este punto y los otros valores en cada instante.

La gráfica de *a-t* se construye a partir de la gráfica de *v-t* del mismo modo (fig. 12-8), ya que

$$\frac{dv}{dt} = a$$

$$\text{pendiente de la gráfica de } v\text{-}t = \text{aceleración}$$

En la figura 12-8*a* se muestran ejemplos de varias mediciones de la pendiente de la gráfica *v-t* y se grafican en la figura 12-8*b*.

Si la curva *s-t* correspondiente en cada intervalo de movimiento puede expresarse mediante una función matemática $s = s(t)$, entonces la ecuación de la gráfica de *v-t* correspondiente al mismo intervalo se obtiene diferenciando esta función con respecto al tiempo, ya que $v = ds/dt$. Asimismo, la ecuación de la gráfica de *a-t* en el mismo intervalo se determina al diferenciar $v = v(t)$, dado que $a = dv/dt$. Como la diferenciación reduce un polinomio de grado n a uno de grado $n - 1$, entonces si la gráfica de *s-t* es parabólica (una curva de segundo grado), la gráfica de *v-t* será una línea recta inclinada (una curva de primer grado) y la gráfica de *a-t* será una constante o una línea horizontal (una curva de grado cero).

Si se proporciona la gráfica de a-t (fig. 12-9a), la gráfica de v-t se construye por medio de $a = dv/dt$, escrita como

$$\Delta v = \int a\, dt$$

cambio de velocidad = área bajo la gráfica de a-t

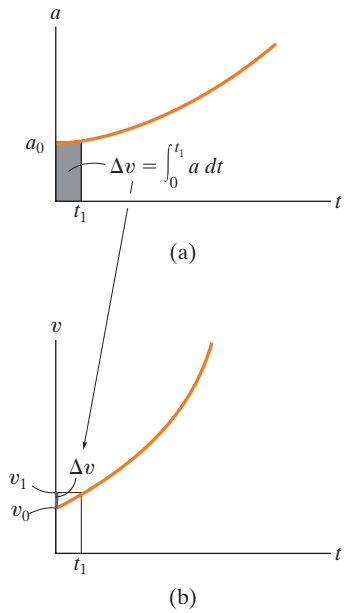


Fig. 12-9

Por consiguiente, para construir la gráfica de v-t, comenzamos con la velocidad inicial de la partícula v_0 y, luego, agregamos a ésta pequeños incrementos de área (Δv) determinados a partir de la gráfica de a-t. De este modo, se determinan puntos sucesivos, $v_1 = v_0 + \Delta v$, etcétera, para la gráfica de v-t (fig. 12-9b). Observe que es necesaria la suma algebraica de los incrementos de área de la gráfica de a-t, ya que las áreas situadas por encima del eje t corresponden a un incremento de v (área "positiva"), mientras que las que quedan debajo del eje indican una reducción de v (área "negativa").

Asimismo, si se presenta la gráfica de v-t (fig. 12-10a), es posible determinar la gráfica de s-t mediante $v = ds/dt$, escrita como

$$\Delta s = \int v\, dt$$

desplazamiento = área bajo la gráfica de v-t

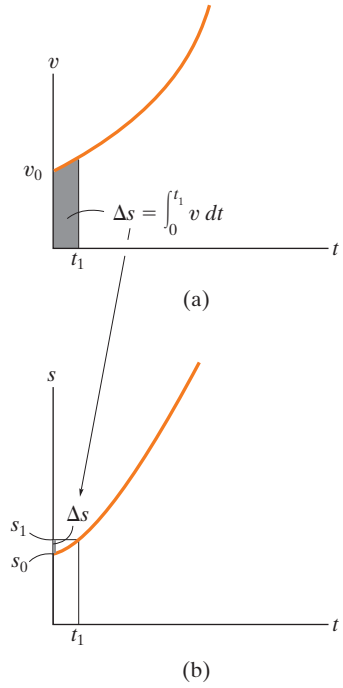
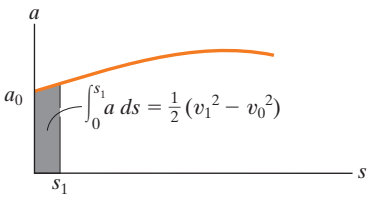


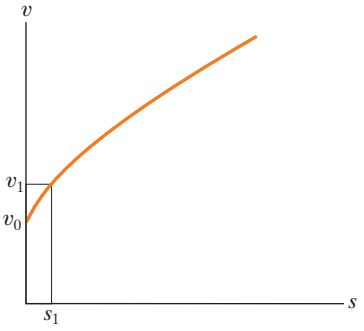
Fig. 12-10

Como se indicó previamente, comenzamos con la posición inicial de la partícula s_0 y sumamos a ésta (algebraicamente) pequeños incrementos de área Δs determinados a partir de la gráfica de v-t (fig. 12-10b).

Si segmentos de la gráfica de a-t pueden describirse mediante una serie de ecuaciones, entonces cada una de éstas puede *integrarse* para obtener las ecuaciones que describen los segmentos correspondientes de la gráfica de v-t. Del mismo modo, la gráfica de s-t se obtiene integrando las ecuaciones que describen los segmentos de la gráfica de v-t. Por consiguiente, si la gráfica de a-t es lineal (una curva de primer grado), la integración dará una gráfica de v-t que sea parabólica (una curva de segundo grado) y una gráfica de s-t que sea cúbica (una curva de tercer grado).



(a)



(b)

Fig. 12-11

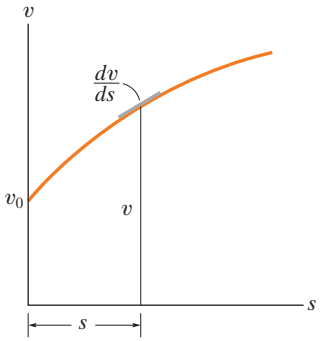
Gráficas de *v*-*s* y *a*-*s*. Si puede construirse la gráfica de *a*-*s*, entonces los puntos en la gráfica de *v*-*s* se determinan mediante $v\,dv = a\,ds$. Si integramos esta ecuación entre los límites $v = v_0$ con $s = s_0$ y $v = v_1$ con $s = s_1$, tenemos

$$\tfrac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = \int_{s_0}^{s_1} a\,ds$$

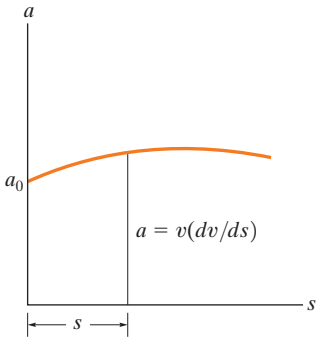
área bajo la gráfica de *a*-*s*

Por lo tanto, si se determina el área sombreada en la figura 12-11*a* y se conoce la velocidad inicial v_0 en $s_0 = 0$, entonces $v_1 = \left(2\int_0^{s_1} a\,ds + v_0^2\right)^{1/2}$, (fig. 12-11*b*). De esta manera se pueden construir puntos sucesivos en la gráfica de *v*-*s*.

Si se conoce la gráfica de *v*-*s*, la aceleración *a* en cualquier posición *s* se determina mediante $a\,ds = v\,dv$, escrita como



(a)



(b)

Fig. 12-12

$$a = v\left(\frac{dv}{ds}\right)$$

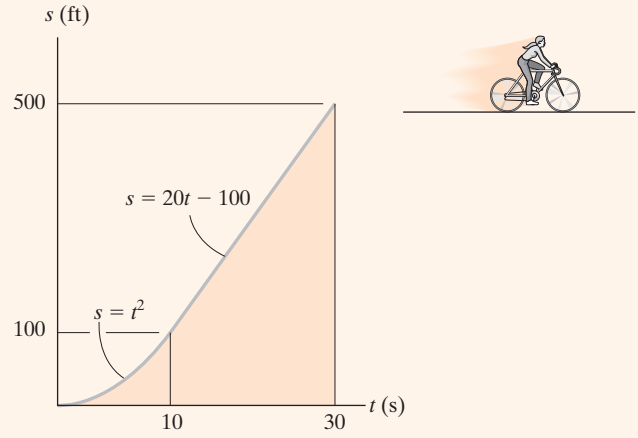
aceleración = velocidad por la pendiente de la gráfica de *v*-*s*

De ahí que, en cualquier punto (s, v) de la figura 12-12*a*, se mide la pendiente dv/ds de la gráfica de *v*-*s*. Entonces, con *v* y dv/ds conocidas, se calcula el valor de *a* (fig. 12-12*b*).

La gráfica de *v*-*s* también se construye a partir de la gráfica de *a*-*s* o viceversa, por aproximación de la gráfica conocida en varios intervalos con funciones matemáticas, $v = f(s)$ o $a = g(s)$ y, luego, mediante $a\,ds = v\,dv$ para obtener la otra gráfica.

EJEMPLO 12.6

Una bicicleta rueda a lo largo de una carretera recta, de modo que la gráfica de la figura 12-13*a* describe su posición. Construya las gráficas de *v*-*t* y *a*-*t* en el intervalo $0 \le t \le 30$ s.



(a)

SOLUCIÓN

Gráfica de *v*-*t*. Como $v = ds/dt$, la gráfica de *v*-*t* se determina diferenciando las ecuaciones que definen la gráfica de *s*-*t* (fig. 12-13*a*). Tenemos

$$0 \le t < 10 \text{ s}; \qquad s = (t^2) \text{ ft} \qquad v = \frac{ds}{dt} = (2t) \text{ ft/s}$$

$$10 \text{ s} < t \le 30 \text{ s}; \qquad s = (20t - 100) \text{ ft} \qquad v = \frac{ds}{dt} = 20 \text{ ft/s}$$

Los resultados se grafican en la figura 12-13*b*. También obtenemos valores específicos de *v* midiendo la *pendiente* de la gráfica de *s*-*t* en un instante dado. Por ejemplo, con $t = 20$ s, la pendiente de la gráfica de *s*-*t* se determina a partir de la línea recta de 10 s a 30 s, es decir,

$$t = 20 \text{ s}; \qquad v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{500 \text{ ft} - 100 \text{ ft}}{30 \text{ s} - 10 \text{ s}} = 20 \text{ ft/s}$$

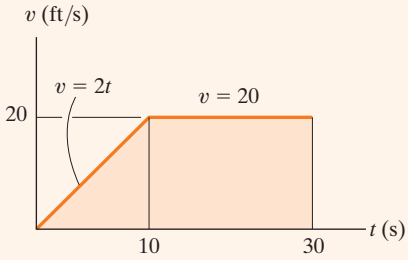
Gráfica de *a*-*t*. Como $a = dv/dt$, la gráfica de *a*-*t* se determina si se diferencian las ecuaciones que definen las líneas rectas de la gráfica de *v*-*t*. Esto da como resultado

$$0 \le t < 10 \text{ s}; \qquad v = (2t) \text{ ft/s} \qquad a = \frac{dv}{dt} = 2 \text{ ft/s}^2$$

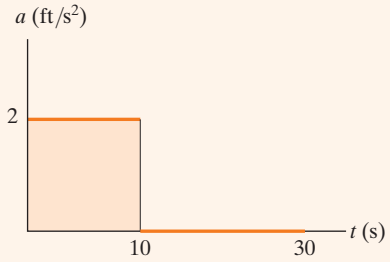
$$10 < t \le 30 \text{ s}; \qquad v = 20 \text{ ft/s} \qquad a = \frac{dv}{dt} = 0$$

Los resultados se grafican en figura 12-13*c*.

NOTA: Compruebe que $a = 2 \text{ ft/s}^2$ cuando $t = 5$ s al medir la pendiente de la gráfica de *v*-*t*.



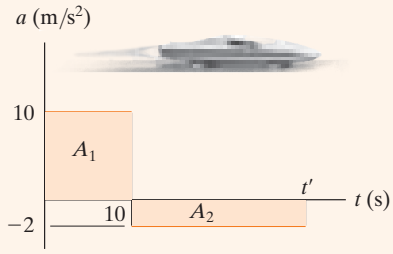
(b)



(c)

Fig. 12-13

EJEMPLO 12.7



(a)

El automóvil de la figura 12-14*a* arranca del reposo y viaja a lo largo de una pista recta, de modo que acelera a 10 m/s² durante 10 s y, luego, desacelera a 2 m/s². Trace las gráficas de *v*-*t* y *s*-*t* y determine el tiempo *t'* necesario para detener el vehículo. ¿Qué distancia ha recorrido el automóvil?

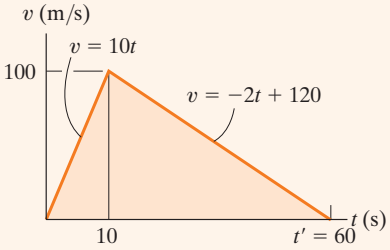
SOLUCIÓN

Gráfica de *v*-*t*. Como $dv = a\,dt$ la gráfica de *v*-*t* se determina integrando los segmentos de las líneas rectas de la gráfica de *a*-*t*. Con la *condición inicial* $v = 0$ cuando $t = 0$, tenemos

$$0 \le t < 10\text{ s}; \qquad a = (10)\text{ m/s}^2; \qquad \int_0^v dv = \int_0^t 10\,dt, \qquad v = 10t$$

Cuando $t = 10$ s, $v = (10)(10) = 100$ m/s. Con esto como la *condición inicial* para el siguiente intervalo de tiempo, tenemos

$$10\text{ s} < t \le t'; a = (-2)\text{ m/s}^2; \int_{100\text{ m/s}}^v dv = \int_{10\text{ s}}^t -2\,dt, v = (-2t + 120)\text{ m/s}$$



(b)

Cuando $t = t'$ requerimos $v = 0$. Esto resulta en (fig. 12-14*b*)

$$t' = 60\text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

Una solución más directa para *t'* es posible si se tiene en cuenta que el área bajo la gráfica de *a*-*t* es igual al cambio de la velocidad del automóvil. Requerimos $\Delta v = 0 = A_1 + A_2$ (fig. 12-14*a*). Por lo tanto,

$$0 = 10\text{ m/s}^2(10\text{ s}) + (-2\text{ m/s}^2)(t' - 10\text{ s})$$
$$t' = 60\text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

Gráfica de *s*-*t*. Ya que $ds = v\,dt$, al integrar las ecuaciones de la gráfica de *v*-*t* se obtienen las ecuaciones correspondientes de la gráfica de *s*-*t*. Al usar la *condición inicial* $s = 0$ cuando $t = 0$, tenemos

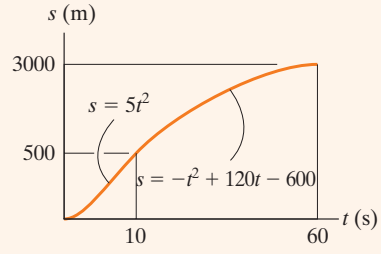
$$0 \le t \le 10\text{ s}; \qquad v = (10t)\text{ m/s}; \qquad \int_0^s ds = \int_0^t 10t\,dt, \qquad s = (5t^2)\text{ m}$$

Cuando $t = 10$ s, $s = 5(10)^2 = 500$ m. Al usar esta *condición inicial*,

$$10\text{ s} \le t \le 60\text{ s}; v = (-2t + 120)\text{ m/s}; \int_{500\text{ m}}^s ds = \int_{10\text{ s}}^t (-2t + 120)\,dt$$
$$s - 500 = -t^2 + 120t - [-(10)^2 + 120(10)]$$
$$s = (-t^2 + 120t - 600)\text{ m}$$

Cuando $t' = 60$ s, la posición es

$$s = -(60)^2 + 120(60) - 600 = 3000\text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

Fig. 12-14

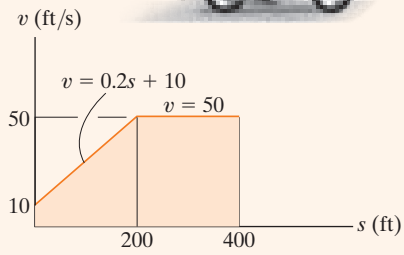
La gráfica de *s*-*t* se muestra en la figura 12-14*c*.

NOTA: Una solución directa para *s* es posible cuando $t' = 60$ s, puesto que el área triangular bajo la gráfica de *v*-*t* resulta en el desplazamiento $\Delta s = s - 0$ desde $t = 0$ a $t' = 60$ s. Por consiguiente,

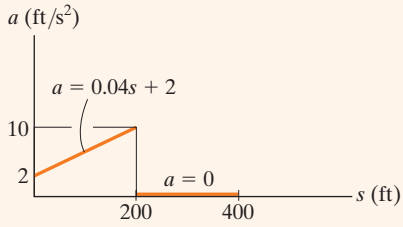
$$\Delta s = \tfrac{1}{2}(60\text{ s})(100\text{ m/s}) = 3000\text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 12.8

La gráfica de v-s que describe el movimiento de una motocicleta se muestra en la figura 12-15*a*. Trace la gráfica de a-s del movimiento y determine el tiempo requerido para que la motocicleta alcance la posición $s = 400$ ft.



(a)



(b)

Fig. 12-15

SOLUCIÓN

Gráfica de *a*-*s*. Como se dan las ecuaciones de los segmentos de la gráfica de v-s, la gráfica de a-s se determina con $a\,ds = v\,dv$.

$$0 \le s < 200 \text{ ft}; \qquad v = (0.2s + 10) \text{ ft/s}$$

$$a = v\frac{dv}{ds} = (0.2s + 10)\frac{d}{ds}(0.2s + 10) = 0.04s + 2$$

$$200 \text{ ft} < s \le 400 \text{ ft}; \qquad v = 50 \text{ ft/s}$$

$$a = v\frac{dv}{ds} = (50)\frac{d}{ds}(50) = 0$$

Los resultados se grafican en la figura 12-15*b*.

Tiempo. El tiempo se obtiene con la gráfica v-s y $v = ds/dt$, porque esta ecuación relaciona v, s y t. Para el primer segmento del movimiento, $s = 0$ cuando $t = 0$, por lo tanto,

$$0 \le s < 200 \text{ ft}; \qquad v = (0.2s + 10) \text{ ft/s}; \qquad dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{0.2s + 10}$$

$$\int_0^t dt = \int_0^s \frac{ds}{0.2s + 10}$$

$$t = (5 \ln(0.2s + 10) - 5 \ln 10) \text{ s}$$

Cuando $s = 200$ ft, $t = 5 \ln[0.2(200) + 10] - 5 \ln 10 = 8.05$ s. Por consiguiente, si utilizamos estas condiciones iniciales para el segundo segmento del movimiento,

$$200 \text{ ft} < s \le 400 \text{ ft}; \qquad v = 50 \text{ ft/s}; \qquad dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{50}$$

$$\int_{8.05\text{ s}}^{t} dt = \int_{200\text{ m}}^{s} \frac{ds}{50};$$

$$t - 8.05 = \frac{s}{50} - 4; \quad t = \left(\frac{s}{50} + 4.05\right) \text{s}$$

Entonces, cuando $s = 400$ ft,

$$t = \frac{400}{50} + 4.05 = 12.0 \text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

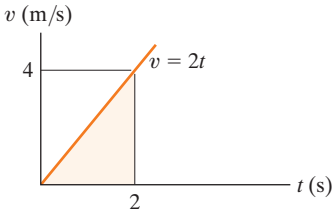
NOTA: Los resultados gráficos se comprueban en parte al calcular las pendientes. Por ejemplo, cuando $s = 0$, $a = v(dv/ds) = 10(50 - 10)/200 = 2$ m/s^2. Además, los resultados se comprueban en parte por inspección. La gráfica de v-s indica el incremento inicial de la velocidad (aceleración) seguido por velocidad constante ($a = 0$).

12

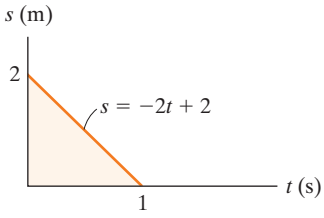
PROBLEMA PRELIMINAR

P12-2.

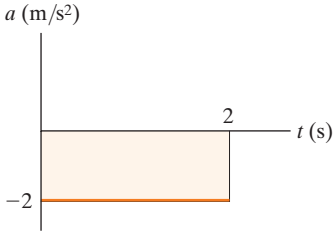
a) Trace las gráficas de s-t y a-t, si $s = 0$ cuando $t = 0$.



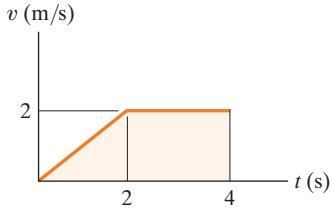
b) Trace las gráficas de a-t y v-t.



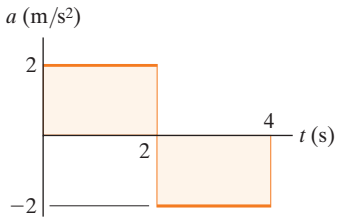
c) Trace las gráficas de v-t y s-t, si $v = 0, s = 0$ cuando $t = 0$.



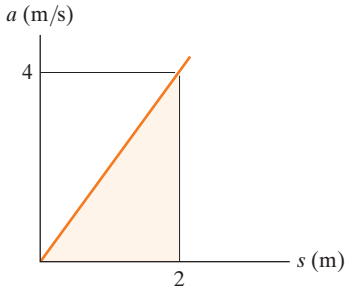
d) Determine s y a cuando $t = 3$ s, si $s = 0$ cuando $t = 0$.



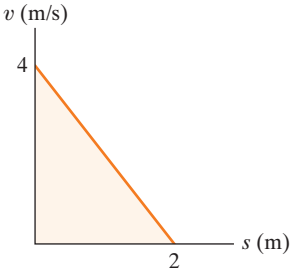
e) Trace la gráfica de v-t si $v = 0$ cuando $t = 0$. Encuentre la ecuación $v = f(t)$ para cada segmento.



f) Determine v en $s = 2$ m, si $v = 1$ m/s en $s = 0$.



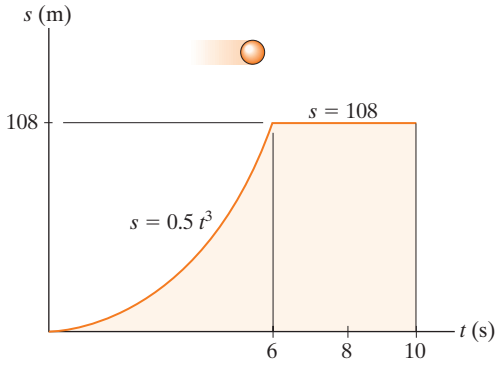
g) Determine a en $s = 1$ m.



Prob. P12-2

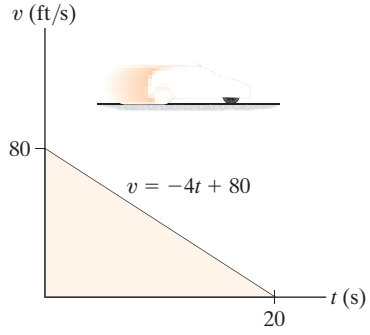
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F12-9. La partícula viaja a lo largo de una pista recta de modo que la gráfica de *s*-*t* describe su posición. Trace la gráfica de *v*-*t* para el mismo intervalo de tiempo.



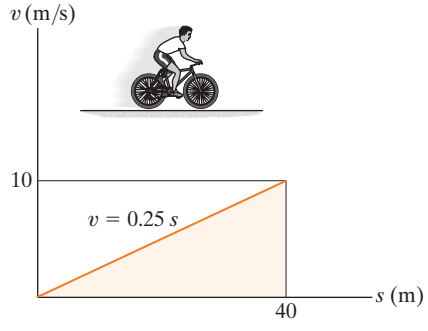
Prob. F12-9

F12-10. Una furgoneta viaja a lo largo de una carretera recta con una velocidad descrita por la gráfica. Trace las gráficas de *s*-*t* y *a*-*t* durante el mismo periodo. Considere $s = 0$ cuando $t = 0$.



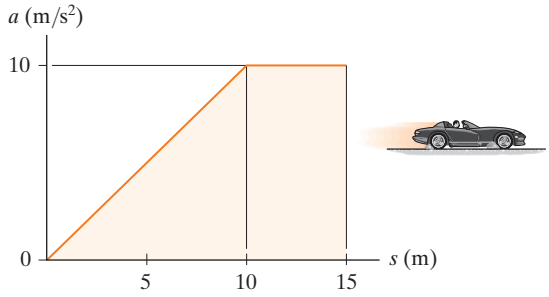
Prob. F12-10

F12-11. Una bicicleta rueda por una carretera recta donde la gráfica de *v*-*s* describe su velocidad. Construya la gráfica de *a*-*s* durante el mismo intervalo.



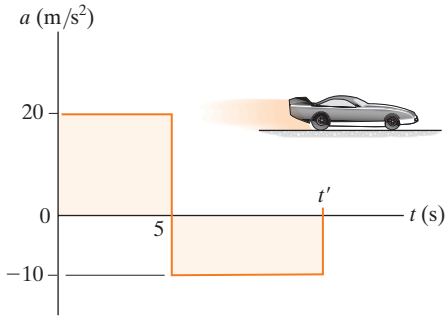
Prob. F12-11

F12-12. El auto deportivo viaja a lo largo de una carretera recta, de modo que su aceleración está descrita mediante la gráfica mostrada. Construya la gráfica de *v*-*s* para el mismo intervalo y especifique la velocidad del automóvil cuando $s = 10$ m y $s = 15$ m.



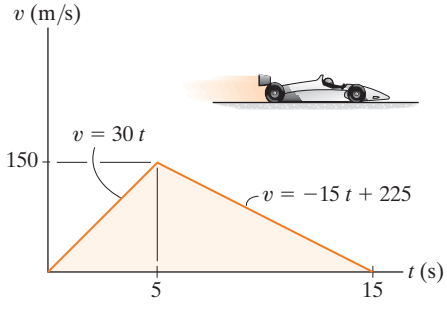
Prob. F12-12

F12-13. El *dragster* arranca del reposo con una aceleración descrita por la gráfica. Construya la gráfica de *v*-*t* durante el intervalo $0 \le t \le t'$, donde t' es el tiempo que le lleva al auto detenerse.



Prob. F12-13

F12-14. El *dragster* arranca del reposo y su velocidad es la descrita por la gráfica. Trace la gráfica de *s*-*t* durante el intervalo de tiempo $0 \le t \le 15$ s. Asimismo, determine la distancia total recorrida durante este intervalo.



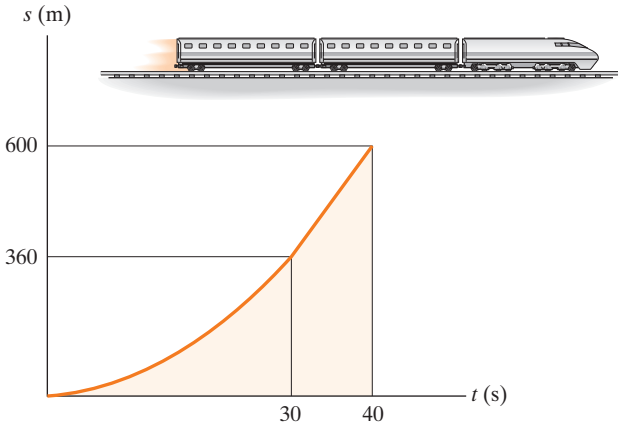
Prob. F12-14

12

PROBLEMAS

12-35. Un tren de carga parte del reposo y viaja con una aceleración constante de 0.5 ft/s^2. Después de un tiempo t' mantiene una rapidez constante, de modo que cuando $t = 160$ s ha recorrido 2000 ft. Determine el tiempo t' y trace la gráfica de v-t del movimiento.

***12-36.** La gráfica de s-t de un tren se ha determinado experimentalmente. A partir de los datos, construya las gráficas de v-t y a-t del movimiento; $0 \le t \le 40$ s. Para $0 \le t \le 30$ s, la curva es $s = (0.4t^2)$ m y después se vuelve recta para $t \ge 30$ s.



Prob. 12-36

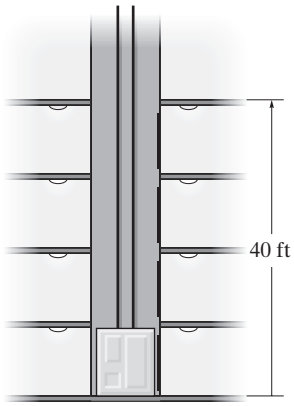
12-37. Dos cohetes parten desde el reposo a la misma elevación. El cohete A acelera verticalmente a 20 m/s^2 durante 12 s y luego mantiene una rapidez constante. El cohete B acelera a 15 m/s^2 hasta llegar a una rapidez constante de 150 m/s. Construya las gráficas de a-t, v-t y s-t para cada cohete hasta $t = 20$ s. ¿Cuál es la distancia entre los cohetes cuando $t = 20$ s?

12-38. Una partícula parte desde $s = 0$ y se desplaza a lo largo de una línea recta con una velocidad $v = (t^2 - 4t + 3)$ m/s, donde t se da en segundos. Construya las gráficas de v-t y a-t para el intervalo de tiempo $0 \le t \le 4$ s.

12-39. Si la posición de una partícula está definida por $s = [2 \text{ sen } (\pi/5)t + 4]$ m, donde t se da en segundos, construya las gráficas de s-t, v-t y a-t para $0 \le t \le 10$ s.

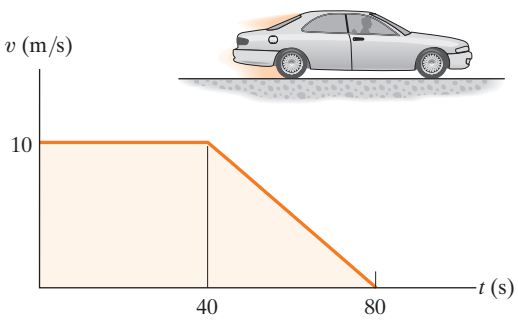
***12-40.** Un avión parte del reposo, se desplaza 5000 ft por una pista y, después de una aceleración uniforme, despega con una rapidez de 162 mi/h. Luego, se eleva en línea recta con una aceleración uniforme de 3 ft/s^2 hasta que alcanza una rapidez constante de 220 mi/h. Trace las gráficas de s-t, v-t y a-t que describen el movimiento.

12-41. El elevador parte del reposo en el primer piso del edificio. Puede acelerar a 5 ft/s^2 y, luego, desacelerar a 2 ft/s^2. Determine el menor tiempo que se requiere para llegar a un piso que está a 40 ft por encima del suelo. El elevador parte del reposo y después se detiene. Trace las gráficas de a-t, v-t y s-t para el movimiento.



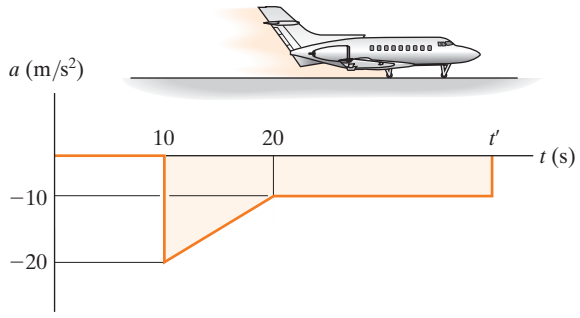
Prob. 12-41

12-42. La velocidad de un automóvil se representa gráficamente de la manera ilustrada. Determine la distancia total que se desplaza el automóvil hasta que se detiene ($t = 80$ s). Construya la gráfica de a-t.



Prob. 12-42

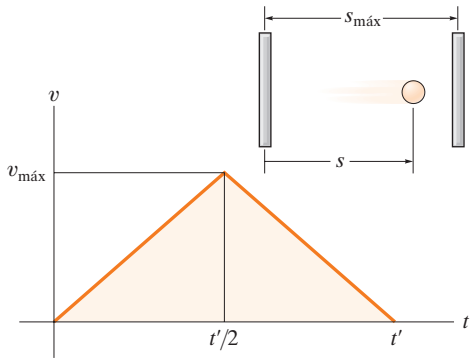
12-43. El movimiento de un avión a propulsión justo después de aterrizar en una pista se describe mediante la gráfica de *a-t*. Determine el tiempo t' cuando el avión se detiene. Construya las gráficas de *v-t* y *s-t* para el movimiento. Aquí, $s = 0$ y $v = 300$ ft/s cuando $t = 0$.



Prob. 12-43

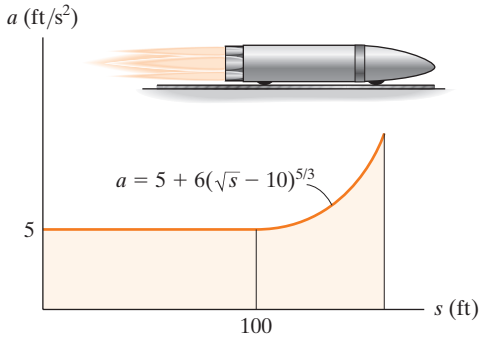
***12-44.** La gráfica de *v-t* para una partícula que se mueve a través de un campo eléctrico, desde una placa hasta otra, tiene la forma mostrada en la figura. La aceleración y la desaceleración que se producen son constantes y ambas tienen una magnitud de 4 m/s². Si las placas están a 200 mm entre sí, determine la velocidad máxima $v_{máx}$ y el tiempo t' que requiere la partícula para viajar de una placa a la otra; además, trace la gráfica de *s-t*. Cuando $t = t'/2$ la partícula está en $s = 100$ mm.

12-45. La gráfica de *v-t* para una partícula que se mueve a través de un campo eléctrico, desde una placa hasta otra, tiene la forma que se muestra en la figura, donde $t' = 0.2$ s y $v_{máx} = 10$ m/s. Trace las gráficas de *s-t* y *a-t* para la partícula. Cuando $t = t'/2$ la partícula está en $s = 0.5$ m.



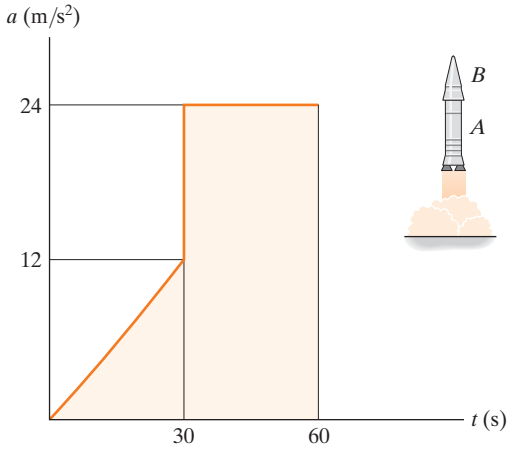
Probs. 12-44/45

12-46. La gráfica de *a-s* de un cohete en movimiento a lo largo de una pista recta se ha determinado experimentalmente. Si el cohete parte de $s = 0$ cuando $v = 0$, determine su rapidez cuando está en $s = 75$ ft y 125 ft, respectivamente. Use la regla de Simpson con $n = 100$ para evaluar v en $s = 125$ ft.



Prob. 12-46

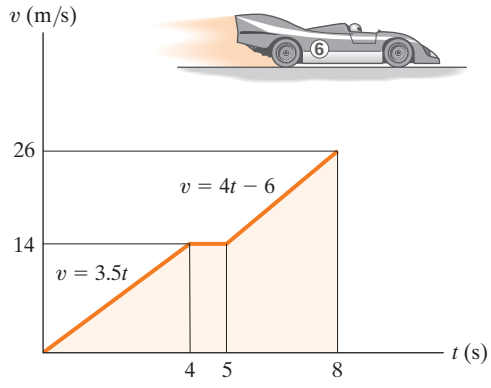
12-47. Un cohete de dos módulos se dispara verticalmente desde el reposo en $s = 0$ con la aceleración mostrada. Después de 30 s el primer módulo, *A*, se consume y el segundo módulo, *B*, empieza su ignición. Trace las gráficas de *v-t* y *s-t* que describen el movimiento del segundo módulo para $0 \leq t \leq 60$ s.



Prob. 12-47

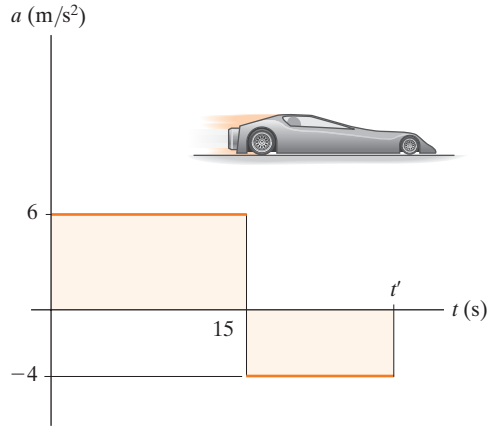
12

***12-48.** El auto de carreras parte desde el reposo y viaja a lo largo de una carretera recta hasta que alcanza una rapidez de 26 m/s en 8 s, como se muestra en la gráfica de *v*-*t*. La parte plana de la gráfica es causada por un cambio en la palanca de cambios. Trace la gráfica de *a*-*t* y determine la aceleración máxima del automóvil.



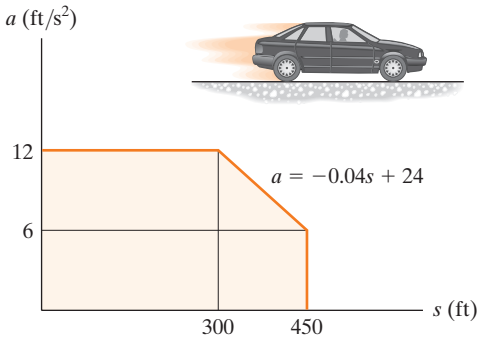
Prob. 12-48

12-49. El automóvil a propulsión viaja inicialmente a una velocidad de 10 m/s cuando se somete a la aceleración mostrada. Determine la velocidad máxima del vehículo y el tiempo *t*′ cuando se detiene. Cuando $t = 0, s = 0$.



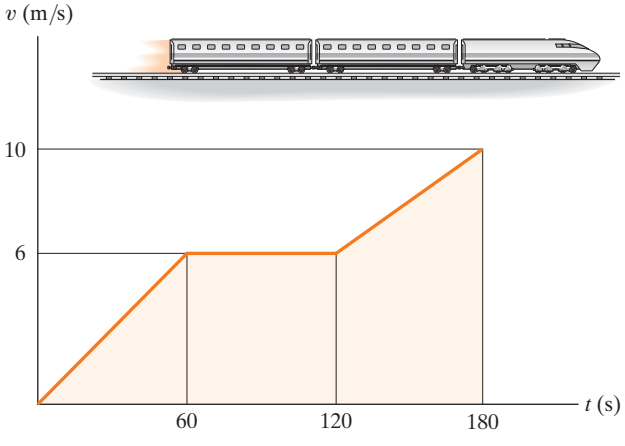
Prob. 12-49

12-50. El automóvil parte desde el reposo en $s = 0$ y se somete a una aceleración mostrada por la gráfica de *a*-*s*. Trace la gráfica de *v*-*s* y determine el tiempo necesario para recorrer 200 ft.



Prob. 12-50

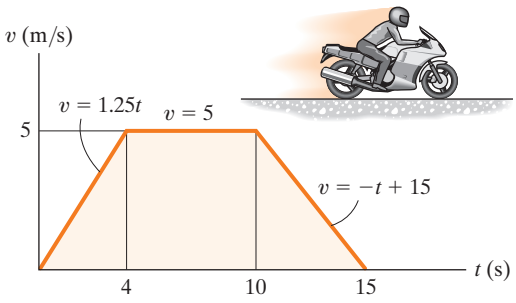
12-51. La gráfica de *v*-*t* para un tren se ha determinado experimentalmente. A partir de los datos, construya las gráficas de *s*-*t* y *a*-*t* del movimiento para $0 \le t \le 180$ s. Cuando $t = 0, s = 0$.



Prob. 12-51

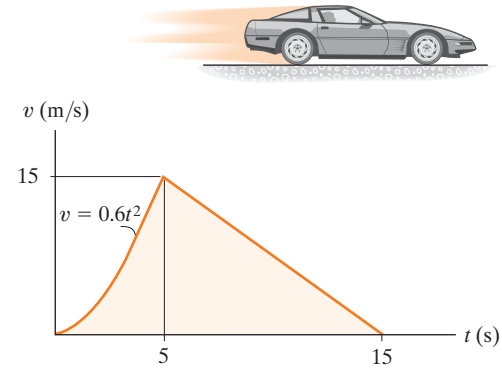
***12-52.** Una motocicleta parte del reposo en $s = 0$ y viaja por una carretera recta con la rapidez indicada por la gráfica de v-t. Determine la distancia total que recorre la motocicleta hasta que se detiene cuando $t = 15$ s. También trace las gráficas de a-t y s-t.

12-53. Una motocicleta parte del reposo en $s = 0$ y viaja por una carretera recta con la rapidez indicada por la gráfica de v-t. Determine la aceleración y la posición de la motocicleta cuando $t = 8$ s y $t = 12$ s.



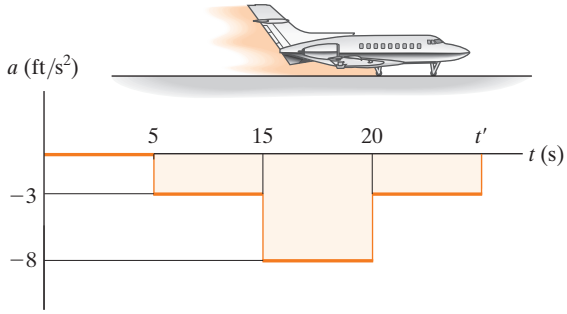
Probs. 12-52/53

12-54. Se muestra la gráfica v-t para el movimiento de un automóvil que se desplaza a lo largo de una carretera recta. Trace las gráficas de s-t y a-t. También determine la rapidez promedio y la distancia recorrida en el intervalo de tiempo de 15 s. Cuando $t = 0, s = 0$.



Prob. 12-54

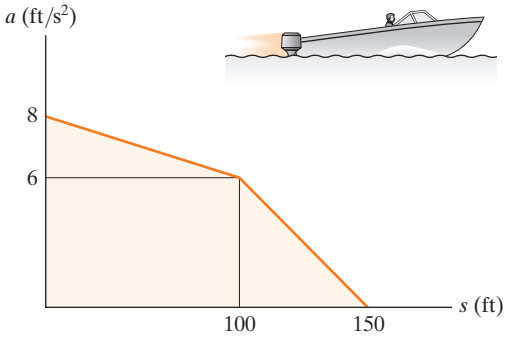
12-55. Un avión que aterriza sobre la pista recta originalmente viajaba a 110 ft/s, cuando $s = 0$. Si se somete a las desaceleraciones mostradas, determine el tiempo t' necesario para que el avión se detenga y construya la gráfica s-t para el movimiento.



Prob. 12-55

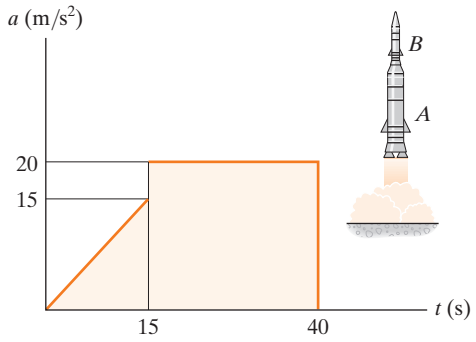
***12-56.** La lancha parte del reposo en $s = 0$ y se desplaza en línea recta con la aceleración indicada en la gráfica de a-s. Determine la rapidez de la lancha cuando $s = 50$ ft, 100 ft y 150 ft.

12-57. La lancha parte del reposo en $s = 0$ y se desplaza en línea recta con la aceleración mostrada en la gráfica de a-s. Construya la gráfica de v-s.



Probs. 12-56/57

12-58. Un cohete de dos módulos se dispara verticalmente desde el reposo con la aceleración mostrada. Después de 15 s el primer módulo, A, se consume y el segundo módulo, B, empieza su ignición. Trace las gráficas de v-t y s-t que describen el movimiento del segundo módulo para $0 \le t \le 40$ s.



Prob. 12-58

12-59. La rapidez de un tren durante el primer minuto se registró como sigue:

t (s)	0	20	40	60
v (m/s)	0	16	21	24

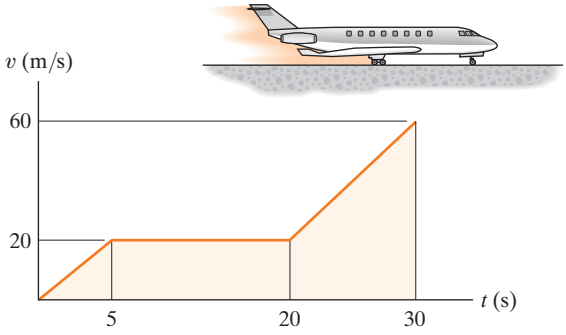
Trace la gráfica de v-t aproximando la curva a través de segmentos de línea recta entre los puntos dados. Determine la distancia total recorrida.

***12-60.** Un hombre que se encuentra sobre un elevador de carga, que está subiendo, deja caer accidentalmente un paquete del elevador cuando está a 100 ft del suelo. Si el elevador mantiene una velocidad constante hacia arriba de 4 ft/s, determine qué tan alto está el elevador con respecto a la tierra en el instante en que el paquete llega al suelo. Trace la curva de v-t para el paquete durante el tiempo que está en movimiento. Suponga que el paquete se libera con la misma rapidez ascendente del elevador.

12-61. Dos automóviles parten del reposo uno al lado del otro y se desplazan a lo largo de una carretera recta. El auto A acelera a 4 m/s^2 durante 10 s y, después, mantiene una rapidez constante. El auto B acelera a 5 m/s^2 hasta llegar a una rapidez constante de 25 m/s y luego mantiene esa rapidez. Construya las gráficas de a-t, v-t y s-t para cada vehículo hasta $t = 15$ s. ¿Cuál es la distancia entre los dos automóviles cuando $t = 15$ s?

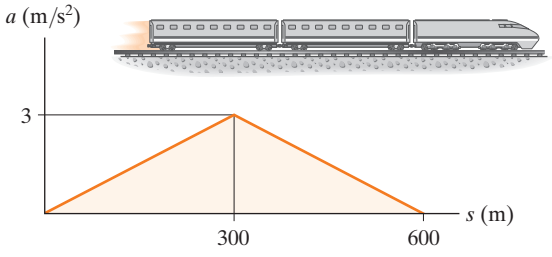
12-62. Si la posición de una partícula se define como $s = (5t - 3t^2)$ ft, donde t se da en segundos, construya las gráficas de s-t, v-t y a-t para $0 \le t \le 10$ s.

12-63. A partir de datos experimentales, el movimiento de un avión a propulsión, mientras viaja a lo largo de una pista de aterrizaje, está definido por la gráfica de v-t. Construya las gráficas de s-t y a-t para el movimiento. Cuando $t = 0$, $s = 0$.



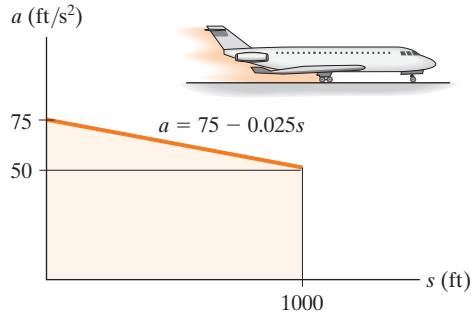
Prob. 12-63

***12-64.** El movimiento de un tren se describe mediante la gráfica de a-s mostrada. Trace la gráfica de v-s si $v = 0$ en $s = 0$.



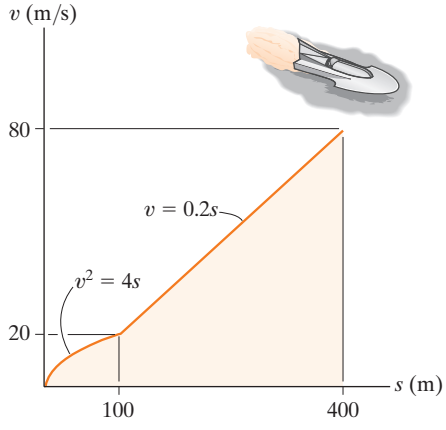
Prob. 12-64

12-65. El avión de propulsión parte del reposo en $s = 0$ y se somete a la aceleración indicada. Determine la rapidez del avión cuando ha recorrido 1000 ft. Además, ¿cuánto tiempo requiere el avión para viajar los 1000 ft?



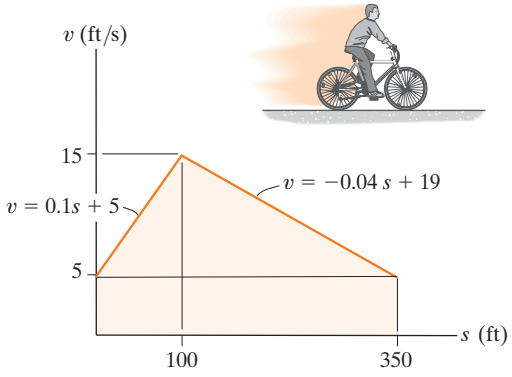
Prob. 12-65

12-66. La lancha viaja a lo largo de una línea recta con la rapidez descrita por la gráfica. Construya las gráficas de *s-t* y *a-s*. Asimismo, determine el tiempo necesario para que la lancha recorra una distancia $s = 400$ m si $s = 0$ cuando $t = 0$.



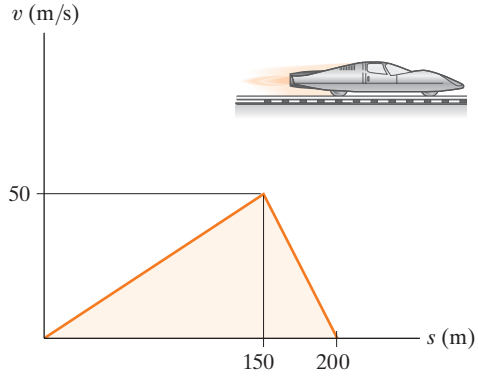
Prob. 12-66

12-67. Se muestra la gráfica de *v-s* de un ciclista que viaja a lo largo de una carretera recta. Construya la gráfica de *a-s*.



Prob. 12-67

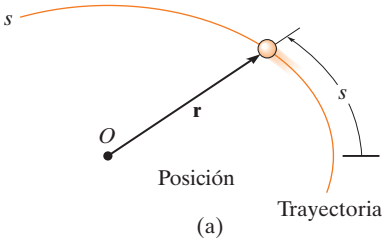
***12-68.** Se muestra la gráfica de *v-s* de un vehículo de pruebas. Determine su aceleración cuando $s = 100$ m y cuando $s = 175$ m.



Prob. 12-68

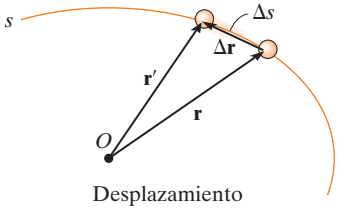
12.4 Movimiento curvilíneo general

El *movimiento curvilíneo* ocurre cuando una partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria curva. Como esta trayectoria a menudo se describe en tres dimensiones, se utilizará el análisis vectorial para formular la posición, la velocidad y la aceleración de una partícula*. En esta sección se analizan los aspectos generales del movimiento curvilíneo y en secciones subsiguientes consideraremos tres tipos de sistemas de coordenadas que se usan con frecuencia para analizar este movimiento.



(a)

Posición. Considere una partícula situada en un punto de una curva en el espacio, definida por la función de trayectoria $s(t)$ (fig. 12-16*a*). El *vector de posición* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ designará la posición de la partícula, medida con respecto a un punto fijo O. Observe que tanto la magnitud como la dirección de este vector cambiarán a medida que la partícula se mueve a lo largo de la curva.



(b)

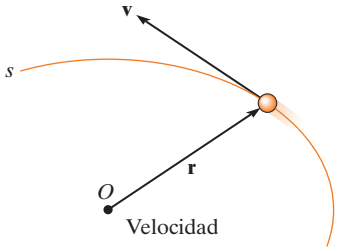
Desplazamiento. Suponga que durante un breve intervalo Δt la partícula se mueve una distancia Δs a lo largo de la curva hacia una nueva posición, definida por $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ (fig. 12-16*b*). El *desplazamiento* $\Delta\mathbf{r}$ representa el cambio de posición de la partícula y se determina mediante una resta vectorial, es decir, $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$.

Velocidad. Durante el tiempo Δt, la *velocidad promedio* de la partícula es

$$\mathbf{v}_{\text{prom}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

La *velocidad instantánea* se determina con esta ecuación cuando $\Delta t \to 0$ y, por consiguiente, la dirección de $\Delta\mathbf{r}$ *aproxima* a la *tangente* hacia la curva. Entonces, $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta\mathbf{r}/\Delta t)$ o

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{12-7}$$



(c)

Fig. 12-16

Como $d\mathbf{r}$ será tangente a la curva, la *dirección* de $\mathbf{v}$ también es *tangente a la curva* (fig. 12-16*c*). La *magnitud* de $\mathbf{v}$, conocida como la *rapidez*, se obtiene al considerar que la longitud del segmento de línea recta $\Delta\mathbf{r}$ (fig. 12-16*b*) se aproxima a la longitud de arco Δs a medida que $\Delta t \to 0$, y tenemos $v = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta r/\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta s/\Delta t)$, o

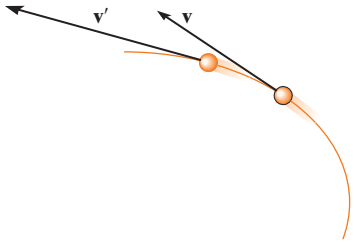
$$v = \frac{ds}{dt} \tag{12-8}$$

Por lo tanto, la *rapidez* se obtiene al diferenciar la función de la trayectoria s con respecto al tiempo.

* En el apéndice B se presenta un resumen de algunos de los conceptos importantes del análisis vectorial.

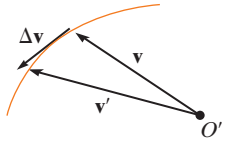
Aceleración. Si la velocidad de la partícula es $\mathbf{v}$ en el instante t y la velocidad es $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ en el instante $t + \Delta t$ (fig. 12-16*d*), entonces la *aceleración promedio* de la partícula durante el intervalo Δt es

$$\mathbf{a}_{\text{prom}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$$



(d)

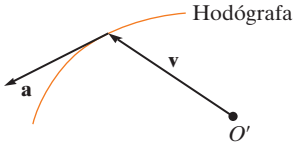
donde $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$. Para estudiar este cambio, los dos vectores de velocidad en la figura 12-16*d* se trazan en la figura 12-16*e*, de modo que sus colas queden en el punto fijo O' y sus puntas de flecha toquen puntos situados en la curva. Esta curva se llama *hodógrafa* y, cuando se construye, describe el lugar geométrico de puntos para la punta de flecha del vector de velocidad, del mismo modo en que la *trayectoria* s describe el lugar geométrico de puntos para la punta de flecha del vector de posición (fig. 12-16*a*).



(e)

Para obtener la *aceleración instantánea*, hacemos que $\Delta t \to 0$ en la ecuación anterior. En el límite $\Delta\mathbf{v}$ tenderá a la *tangente de la hodógrafa* y por ende $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0}(\Delta\mathbf{v}/\Delta t)$, o bien,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{12-9}$$

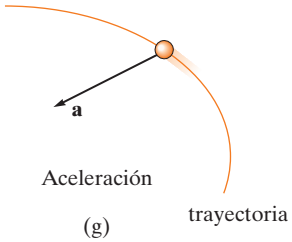


(f)

Si sustituimos la ecuación 12-7 en este resultado, también podemos escribir

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

Por definición de la derivada, $\mathbf{a}$ actúa *tangente a la hodógrafa* (fig. 12-16*f*) y, *en general no es tangente a la trayectoria del movimiento* (fig. 12-16*g*). Para aclarar este punto, tenga en cuenta que $\Delta\mathbf{v}$, y por consiguiente $\mathbf{a}$, deben responder el cambio *tanto* de magnitud *como* de dirección de la velocidad $\mathbf{v}$, a medida que la partícula se mueve de un punto al siguiente a lo largo de la trayectoria (fig. 12-16*d*). Sin embargo, para que la partícula siga cualquier trayectoria curva, el cambio direccional siempre "cambia" el vector de velocidad hacia el "interior" o "lado cóncavo" de la trayectoria y, por consiguiente, $\mathbf{a}$ *no puede* permanecer tangente a la trayectoria. En resumen, $\mathbf{v}$ siempre es tangente a la *trayectoria* y $\mathbf{a}$ siempre es tangente a la *hodógrafa*.

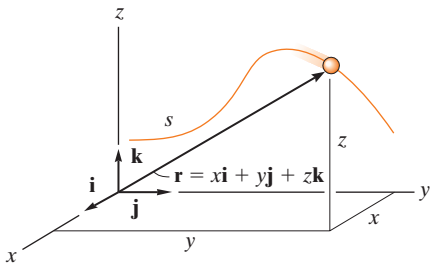


(g)

Fig. 12-16 (cont.)

12.5 Movimiento curvilíneo: componentes rectangulares

De vez en cuando el movimiento de una partícula puede describirse mejor a lo largo de una trayectoria que logre expresarse en función de sus coordenadas x, y, z.



Posición

(a)

Posición. Si la partícula está en el punto (x, y, z) de la trayectoria curva s mostrada en la figura 12-17*a*, entonces su posición se define mediante el *vector de posición*

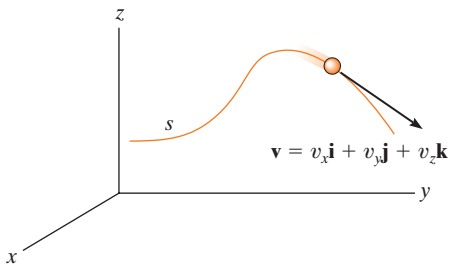
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{12-10}$$

Cuando la partícula se mueve, las componentes x, y, z de $\mathbf{r}$ serán funciones del tiempo, es decir, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, de modo que $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

En cualquier instante la ecuación B-3 del apéndice B define la *magnitud* de $\mathbf{r}$.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Y la *dirección* de $\mathbf{r}$ se especifica por el vector unitario $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/r$.



Velocidad

(b)

Fig. 12-17

Velocidad. La primera derivada con respecto al tiempo de $\mathbf{r}$ proporciona la velocidad de la partícula. Por consiguiente,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i}) + \frac{d}{dt}(y\mathbf{j}) + \frac{d}{dt}(z\mathbf{k})$$

Cuando se toma esta derivada, es necesario tener en cuenta los cambios *tanto* de la magnitud *como* de la dirección en cada una de las componentes vectoriales. Por ejemplo, la derivada de la componente $\mathbf{i}$ de $\mathbf{r}$ es

$$\frac{d}{dt}(x\mathbf{i}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt}$$

El segundo término del lado derecho es cero, siempre que el marco de referencia x, y, z esté *fijo* y, por consiguiente, la *dirección* (y la *magnitud*) de $\mathbf{i}$ no cambie con el tiempo. La diferenciación de las componentes $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ se realiza de la misma manera, la cual proporciona el resultado final,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \tag{12-11}$$

donde

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z} \tag{12-12}$$

La notación "de punto", $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ representa las primeras derivadas con respecto al tiempo de $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, respectivamente.

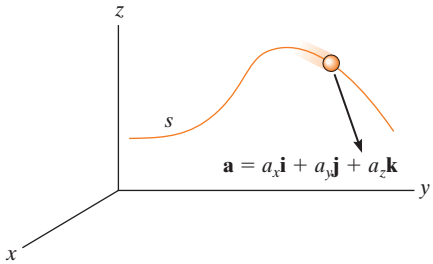
La *magnitud* de la velocidad se determina como

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

y el vector unitario $\mathbf{u}_v = \mathbf{v}/v$ especifica su *dirección*. Como se vio en la sección 12.4, esta dirección *siempre es tangente a la trayectoria*, como se indica en la figura 12-17*b*.

Aceleración. La aceleración de la partícula se obtiene de la primera derivada con respecto al tiempo de la ecuación 12-11 (o la segunda derivada con respecto al tiempo de la ecuación 12-10). Tenemos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \tag{12-13}$$



Aceleración

(c)

Fig. 12-17 (cont.)

donde

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y &= \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z &= \dot{v}_z = \ddot{z} \end{aligned} \tag{12-14}$$

Aquí, a_x, a_y, a_z representan, respectivamente, las primeras derivadas con respecto al tiempo de $v_x = v_x(t), v_y = v_y(t), v_z = v_z(t)$ o las segundas derivadas con respecto al tiempo de las funciones $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.

La aceleración tiene una *magnitud*

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

y una *dirección* especificada por el vector unitario $\mathbf{u}_a = \mathbf{a}/a$. Como $\mathbf{a}$ representa el *cambio* tanto de la magnitud como de la dirección de la velocidad, en general $\mathbf{a}$ *no* será tangente a la trayectoria (fig. 12-17*c*).

Puntos importantes

- El movimiento curvilíneo puede hacer que cambie *tanto* la magnitud *como* la dirección de los vectores de posición, velocidad y aceleración.
- El vector de velocidad siempre es *tangente* a la trayectoria.
- En general, el vector de aceleración *no* es tangente a la trayectoria, sino que más bien es tangente a la hodógrafa.
- Si el movimiento se describe mediante coordenadas cartesianas, entonces las componentes a lo largo de cada uno de los ejes no cambian de dirección, sólo cambiarán su magnitud y sentido (signo algebraico).
- Al considerar los movimientos de las componentes, el cambio de magnitud y dirección de la posición y velocidad de la partícula se toman automáticamente en cuenta.

Procedimiento para el análisis

Sistema de coordenadas

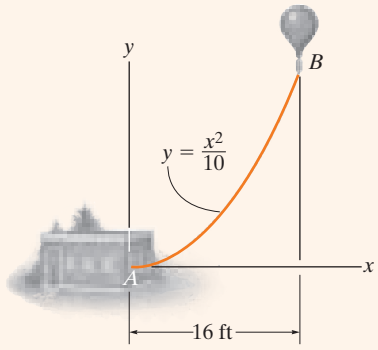
- Un sistema de coordenadas rectangulares puede usarse para resolver problemas para los cuales el movimiento puede expresarse en términos de sus componentes x, y, z.

Cantidades cinemáticas

- Como el *movimiento rectilíneo* ocurre a lo largo de *cada eje de coordenadas*, el movimiento a lo largo de cada eje se determina mediante $v = ds/dt$ y $a = dv/dt$; o cuando el movimiento no está expresado en función del tiempo, puede utilizarse la ecuación $a\,ds = v\,dv$.
- La ecuación de la trayectoria $y = f(x)$ puede utilizarse, en dos dimensiones, para relacionar las componentes x y y de la velocidad y aceleración, si se aplica la regla de la cadena del cálculo. Este concepto se revisa en el apéndice C.
- Una vez que se determinan las componentes x, y, z, de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ las magnitudes de estos vectores se calculan con el teorema de Pitágoras, ecuación B-3, y sus ángulos de dirección coordenados a partir de las componentes de sus vectores unitarios, ecuaciones B-4 y B-5.

EJEMPLO 12.9

En cualquier instante, $x = (8t)$ ft, donde t está en segundos, define la posición horizontal del globo atmosférico de la figura 12-18*a*. Si la ecuación de la trayectoria es $y = x^2/10$, determine la magnitud y dirección de la velocidad y la aceleración cuando $t = 2$ s.



(a)

SOLUCIÓN

Velocidad. La componente de velocidad en la dirección x es

$$v_x = \dot{x} = \frac{d}{dt}(8t) = 8 \text{ ft/s} \rightarrow$$

Para determinar la relación entre las componentes de velocidad utilizaremos la regla de la cadena del cálculo. Cuando $t = 2s, x = 8(2) = 16$ ft (fig. 12-18*a*) y, por lo tanto,

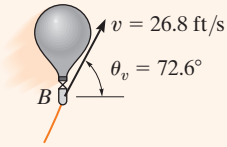
$$v_y = \dot{y} = \frac{d}{dt}(x^2/10) = 2x\dot{x}/10 = 2(16)(8)/10 = 25.6 \text{ ft/s} \uparrow$$

Cuando $t = 2$ s, la magnitud de la velocidad es entonces

$$v = \sqrt{(8 \text{ ft/s})^2 + (25.6 \text{ ft/s})^2} = 26.8 \text{ ft/s} \qquad \textit{Resp.}$$

La dirección es tangente a la trayectoria (fig. 12-18*b*), donde

$$\theta_v = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\frac{25.6}{8} = 72.6° \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Aceleración. La relación entre las componentes de aceleración se determina con la regla de la cadena. (Vea el apéndice C). Tenemos,

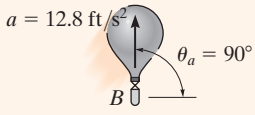
$$a_x = \dot{v}_x = \frac{d}{dt}(8) = 0$$

$$a_y = \dot{v}_y = \frac{d}{dt}(2x\dot{x}/10) = 2(\dot{x})\dot{x}/10 + 2x(\ddot{x})/10$$

$$= 2(8)^2/10 + 2(16)(0)/10 = 12.8 \text{ ft/s}^2 \uparrow$$

Por lo tanto,

$$a = \sqrt{(0)^2 + (12.8)^2} = 12.8 \text{ ft/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

Fig. 12-18

La dirección de **a**, como se muestra en la figura 12-18*c*, es

$$\theta_a = \tan^{-1}\frac{12.8}{0} = 90° \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: También es posible obtener v_y y a_y si se expresa primero $y = f(t) = (8t)^2/10 = 6.4t^2$ y luego se toman sucesivamente las derivadas con respecto al tiempo.

EJEMPLO 12.10

(© R. C. Hibbeler)

Durante un breve lapso, $y = (0.001x^2)$ m describe la trayectoria del avión que se muestra en la figura 12-19*a*. Si el avión se eleva con una velocidad constante hacia arriba de 10 m/s, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del avión cuando alcanza una altitud de $y = 100$ m.

SOLUCIÓN

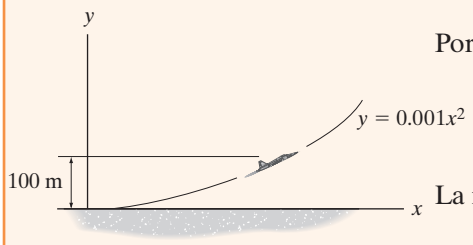
Cuando $y = 100$ m, entonces $100 = 0.001x^2$, o bien, $x = 316.2$ m. También, debido a la velocidad constante, $v_y = 10$ m/s, por lo tanto,

$$y = v_y t \qquad 100\text{ m} = (10\text{ m/s})t \qquad t = 10\text{ s}$$

Velocidad. Si utilizamos la regla de la cadena (vea el apéndice C) para determinar la relación entre las componentes de la velocidad, tenemos

$$y = 0.001x^2$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{d}{dt}(0.001x^2) = (0.002x)\dot{x} = 0.002xv_x \qquad (1)$$



(a)

Por lo tanto,

$$10\text{ m/s} = 0.002(316.2\text{ m})(v_x)$$
$$v_x = 15.81\text{ m/s}$$

La magnitud de la velocidad es, por consiguiente,

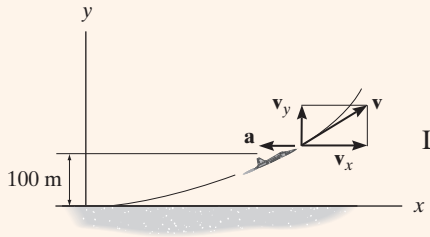
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(15.81\text{ m/s})^2 + (10\text{ m/s})^2} = 18.7\text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Aceleración. Con la regla de la cadena, la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (1) proporciona la relación entre las componentes de la aceleración.

$$a_y = \dot{v}_y = (0.002\dot{x})\dot{x} + 0.002x(\ddot{x}) = 0.002(v_x^2 + xa_x)$$

Cuando $x = 316.2$ m, $v_x = 15.81$ m/s, $\dot{v}_y = a_y = 0$,

$$0 = 0.002[(15.81\text{ m/s})^2 + 316.2\text{ m}(a_x)]$$
$$a_x = -0.791\text{ m/s}^2$$



(b)

Fig. 12-19

La magnitud de la aceleración del avión es, por consiguiente,

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0.791\text{ m/s}^2)^2 + (0\text{ m/s}^2)^2}$$
$$= 0.791\text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Estos resultados se muestran en la figura 12-19*b*.

12.6 Movimiento de un proyectil

El movimiento de vuelo libre de un proyectil a menudo se estudia en función de sus componentes rectangulares. Para ilustrar el análisis cinemático, considere un proyectil lanzado en el punto (x_0, y_0), con una velocidad inicial de $\mathbf{v}_0$, cuyas componentes son $(\mathbf{v}_0)_x$ y $(\mathbf{v}_0)_y$ (fig. 12-20). Cuando se desprecia la resistencia del aire, la única fuerza que actúa en el proyectil es su peso, el cual hace que el proyectil tenga una *aceleración dirigida hacia abajo constante* de aproximadamente $a_c = g = 9.81\ \text{m/s}^2$ o bien $g = 32.2\ \text{ft/s}^2$*.

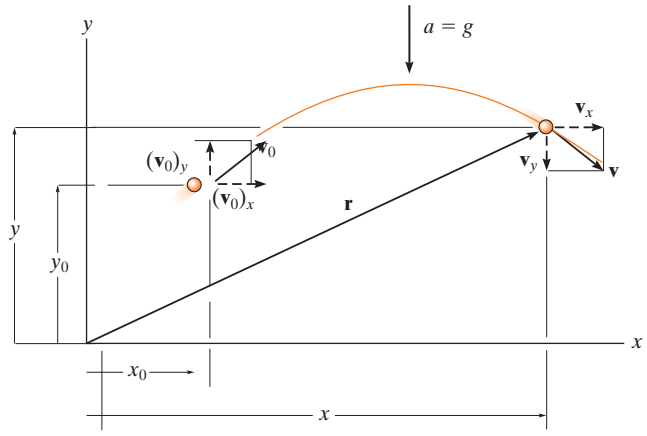
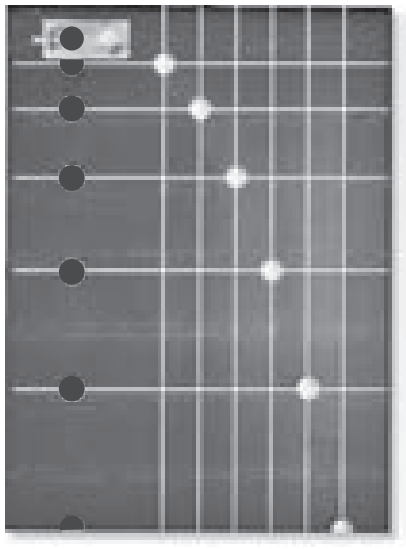


Fig. 12-20



Cada imagen en esta secuencia se tomó separada por el mismo intervalo de tiempo. La bola gris oscuro cae del reposo, en tanto que la bola gris claro recibe una velocidad horizontal cuando se libera. Ambas bolas se aceleran hacia abajo a la misma razón y, por lo tanto, permanecen a la misma altura en todo momento. Esta aceleración hace que la diferencia de altura entre las dos bolas se incremente entre fotografías sucesivas. También, observe que la distancia horizontal entre fotos sucesivas de la bola gris es constante, ya que la velocidad en la dirección horizontal permanece constante. (© R. C. Hibbeler)

Movimiento horizontal. Como $a_x = 0$, la aplicación de las ecuaciones de aceleración constante, 12-4 a 12-6, resulta en

$$(\pm\rightarrow) \qquad v = v_0 + a_c t; \qquad v_x = (v_0)_x$$
$$(\pm\rightarrow) \qquad x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_c t^2; \qquad x = x_0 + (v_0)_x t$$
$$(\pm\rightarrow) \qquad v^2 = v_0^2 + 2a_c(x - x_0); \qquad v_x = (v_0)_x$$

La primera y la última de las ecuaciones indican que la *componente horizontal de la velocidad siempre permanece constante durante el movimiento*.

Movimiento vertical. Como el eje y positivo está dirigido hacia arriba, entonces $a_y = -g$. Al aplicar las ecuaciones 12-4 a 12-6, obtenemos

$$(+\uparrow) \qquad v = v_0 + a_c t; \qquad v_y = (v_0)_y - gt$$
$$(+\uparrow) \qquad y = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_c t^2; \qquad y = y_0 + (v_0)_y t - \tfrac{1}{2} g t^2$$
$$(+\uparrow) \qquad v^2 = v_0^2 + 2a_c(y - y_0); \qquad v_y^2 = (v_0)_y^2 - 2g(y - y_0)$$

Recuerde que la última ecuación puede formularse con base en la eliminación del tiempo t de las dos primeras ecuaciones y, por consiguiente, *sólo dos de las tres ecuaciones anteriores son independientes entre sí.*

*Esto supone que el campo gravitacional terrestre no varía con la altitud.

12

Una vez lanzado, el balón de basquetbol sigue una trayectoria parabólica. (© R. C. Hibbeler)

En resumen, los problemas que implican el movimiento de un proyectil pueden tener cuando mucho tres incógnitas, puesto que sólo pueden escribirse tres ecuaciones independientes, es decir, *una* ecuación en la *dirección horizontal* y *dos* en la *dirección vertical*. Una vez obtenidas $\mathbf{v}_x$ y $\mathbf{v}_y$, la velocidad resultante $\mathbf{v}$, la cual *siempre es tangente* a la trayectoria, se determina mediante la *suma vectorial* como se indica en la figura 12-20.

Procedimiento para el análisis

Sistema de coordenadas

- Establezca el eje de coordenadas x, y, fijo y trace la trayectoria de la partícula. Entre *dos puntos* cualesquiera de la trayectoria, especifique los datos dados del problema e identifique las *tres incógnitas*. En todos los casos, la aceleración de la gravedad actúa hacia abajo y es igual a 9.81 m/s^2 o 32.2 ft/s^2. Las velocidades inicial y final de la partícula se representarán en función de sus componentes x y y.

- Recuerde que las componentes positivas y negativas de posición, velocidad y aceleración siempre actúan de acuerdo con sus direcciones coordenadas asociadas.

Ecuaciones cinemáticas

- Dependiendo de los datos conocidos y de lo que se va a determinar, se decidirá cuáles tres de las cuatro ecuaciones siguientes se aplicarán entre los dos puntos de la trayectoria, para obtener la solución más directa del problema.

Movimiento horizontal

- La *velocidad* en la dirección horizontal o x es *constante*, es decir, $v_x = (v_0)_x$, y

$$x = x_0 + (v_0)_x t$$

Movimiento vertical

- En la dirección vertical o y, *sólo dos* de las tres ecuaciones siguientes pueden utilizarse para la solución.

$$v_y = (v_0)_y + a_c t$$

$$y = y_0 + (v_0)_y t + \tfrac{1}{2} a_c t^2$$

$$v_y^2 = (v_0)_y^2 + 2a_c(y - y_0)$$

Por ejemplo, si no se requiere la velocidad final v_y de la partícula, no serán útiles la primera ni la tercera de estas ecuaciones.

La grava que cae por el extremo de esta banda transportadora sigue una trayectoria que puede pronosticarse con las ecuaciones de aceleración constante. De esta manera se determina la ubicación de la pila acumulada. Se utilizan coordenadas rectangulares para el análisis, puesto que la aceleración ocurre sólo en la dirección vertical. (© R. C. Hibbeler)

EJEMPLO 12.11

Un saco se desliza por la rampa, como se indica en la figura 12-21, con una velocidad horizontal de 12 m/s. Si la altura de la rampa es de 6 m con respecto al piso, determine el tiempo necesario para que el saco choque contra el suelo y la distancia R donde los sacos comienzan a apilarse.

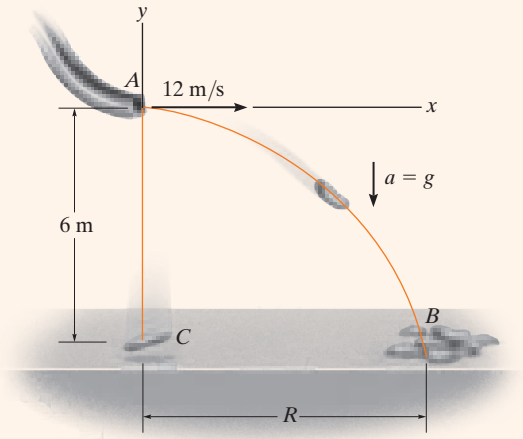


Fig. 12-21

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. El origen de las coordenadas se establece al principio de la trayectoria, punto A (fig. 12-21). La velocidad inicial de un saco tiene las componentes $(v_A)_x = 12\ \text{m/s}^2$ y $(v_A)_y = 0$. Asimismo, entre los puntos A y B la aceleración es de $a_y = -9.81\ \text{m/s}^2$. En vista de que $(v_B)_x = (v_A)_x = 12\ \text{m/s}$, las tres incógnitas son $(v_B)_y$, R y el tiempo de vuelo t_{AB}. En este caso, no necesitamos determinar $(v_B)_y$.

Movimiento vertical. Se conoce la distancia vertical de A a B y, por consiguiente, podemos obtener una solución directa para t_{AB} con la ecuación

$$(+\uparrow) \qquad y_B = y_A + (v_A)_y t_{AB} + \tfrac{1}{2} a_c t_{AB}^2$$

$$-6\ \text{m} = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}(-9.81\ \text{m/s}^2) t_{AB}^2$$

$$t_{AB} = 1.11\ \text{s} \qquad \textit{Resp.}$$

Movimiento horizontal. Con t_{AB} calculado, R se determina como sigue:

$$(\pm\rightarrow) \qquad x_B = x_A + (v_A)_x t_{AB}$$

$$R = 0 + 12\ \text{m/s}\ (1.11\ \text{s})$$

$$R = 13.3\ \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: El cálculo de t_{AB} también indica que si se soltara un saco *desde el reposo* en A, le llevaría el mismo tiempo chocar contra el suelo en C (fig. 12-21).

12

EJEMPLO 12.12

La máquina desmenuzadora está diseñada para expulsar virutas de madera a $v_O = 25$ ft/s, como se ilustra en la figura 12-22. Si el tubo está orientado a 30° con respecto a la horizontal, determine a qué altura, h, las virutas chocan contra la pila, si en este instante caen en la pila a 20 ft del tubo.

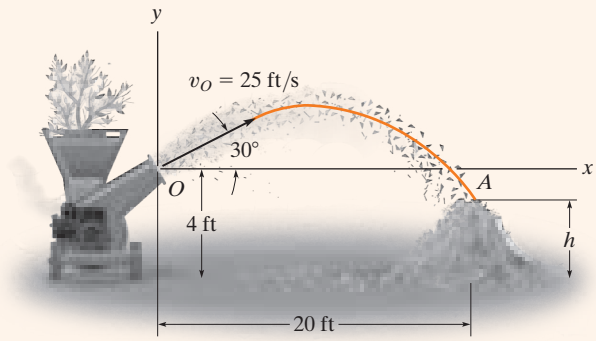


Fig. 12-22

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. Cuando se analiza el movimiento entre los puntos O y A, las tres incógnitas son la altura h, el tiempo de vuelo t_{OA} y la componente vertical de la velocidad $(v_A)_y$ [observe que $(v_A)_x = (v_O)_x$]. Con el origen de las coordenadas en O (fig. 12-22), la velocidad inicial de una viruta tiene las componentes de

$$(v_O)_x = (25 \cos 30°)\ \text{ft/s} = 21.65\ \text{ft/s} \rightarrow$$
$$(v_O)_y = (25 \operatorname{sen} 30°)\ \text{ft/s} = 12.5\ \text{ft/s} \uparrow$$

Asimismo, $(v_A)_x = (v_O)_x = 21.65$ ft/s y $a_y = -32.2$ ft/s^2. Como no necesitamos determinar $(v_A)_y$, entonces

Movimiento horizontal

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad x_A = x_O + (v_O)_x t_{OA}$$
$$20\ \text{ft} = 0 + (21.65\ \text{ft/s}) t_{OA}$$
$$t_{OA} = 0.9238\ \text{s}$$

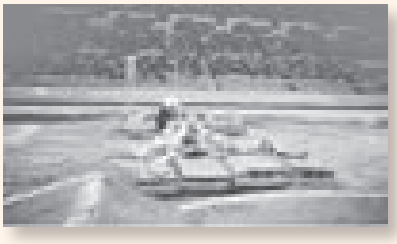
Movimiento vertical. Si relacionamos t_{OA} con las elevaciones inicial y final de una viruta,

$$(+\uparrow) \quad y_A = y_O + (v_O)_y t_{OA} + \tfrac{1}{2} a_c t_{OA}^2$$
$$(h - 4\ \text{ft}) = 0 + (12.5\ \text{ft/s})(0.9238\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}(-32.2\ \text{ft/s}^2)(0.9238\ \text{s})^2$$
$$h = 1.81\ \text{ft} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Podemos determinar $(v_A)_y$ por medio de $(v_A)_y = (v_O)_y + a_c t_{OA}$.

EJEMPLO 12.13

La pista para este evento de carreras se diseñó de manera que los competidores salten la pendiente a 30°, desde una altura de 1 m. Durante una carrera se observó que el corredor de la figura 12-23*a* permanecía en el aire durante 1.5 s. Determine la rapidez a la cual estaba saliendo de la rampa, la distancia horizontal que recorre antes de chocar contra el suelo y la altura máxima que alcanza. No tome en cuenta el tamaño de la motocicleta ni del corredor.



(© R. C. Hibbeler)

(a)

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. Como se muestra en la figura 12-23*b*, el origen de las coordenadas se establece en A. Entre los puntos extremos de la trayectoria AB las tres incógnitas son la velocidad inicial v_A, la distancia R y la componente vertical de la velocidad $(v_B)_y$.

Movimiento vertical. Como se conocen el tiempo de vuelo y la distancia vertical entre los extremos de la trayectoria, podemos determinar v_A.

$$(+\uparrow) \qquad y_B = y_A + (v_A)_y t_{AB} + \tfrac{1}{2} a_c t_{AB}^2$$

$$-1\text{ m} = 0 + v_A \operatorname{sen} 30°(1.5\text{ s}) + \tfrac{1}{2}(-9.81\text{ m/s}^2)(1.5\text{ s})^2$$

$$v_A = 13.38\text{ m/s} = 13.4\text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Movimiento horizontal. Ahora determinamos la distancia R.

$$(\pm\rightarrow) \qquad x_B = x_A + (v_A)_x t_{AB}$$

$$R = 0 + 13.38 \cos 30°\text{ m/s}\,(1.5\text{ s})$$

$$= 17.4\text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

Para determinar la altura máxima h consideraremos la trayectoria AC (fig. 12-23*b*). En este caso, las tres incógnitas son el tiempo de vuelo t_{AC}, la distancia horizontal de A a C y la altura h. A la altura máxima $(v_C)_y = 0$ y como v_A se conoce, podemos determinar h *directamente* sin considerar t_{AC} mediante la siguiente ecuación:

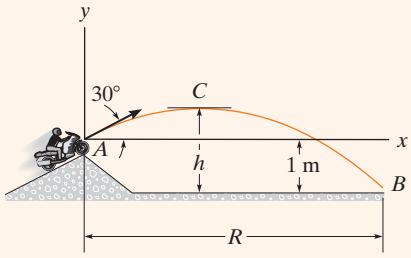
$$(v_C)_y^2 = (v_A)_y^2 + 2a_c[y_C - y_A]$$

$$0^2 = (13.38 \operatorname{sen} 30°\text{ m/s})^2 + 2(-9.81\text{ m/s}^2)[(h - 1\text{ m}) - 0]$$

$$h = 3.28\text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Demuestre que la motocicleta golpeará el suelo en B con una velocidad cuyas componentes son

$$(v_B)_x = 11.6\text{ m/s} \rightarrow, \quad (v_B)_y = 8.02\text{ m/s} \downarrow$$



(b)

Fig. 12-23

12

PROBLEMA PRELIMINAR

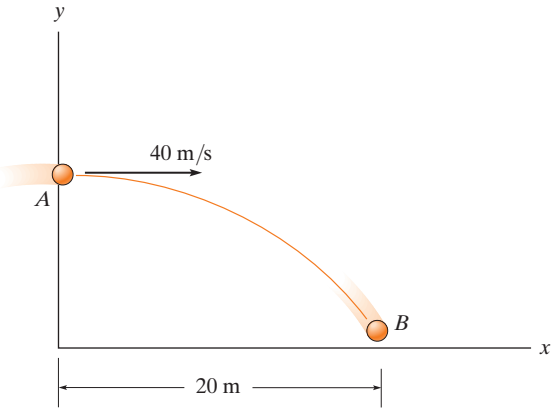
P12-3. Use la regla de la cadena y encuentre $\dot{y}$ y $\ddot{y}$ en términos de $x, \dot{x}$ y $\ddot{x}$ si

a) $y = 4x^2$

b) $y = 3e^x$

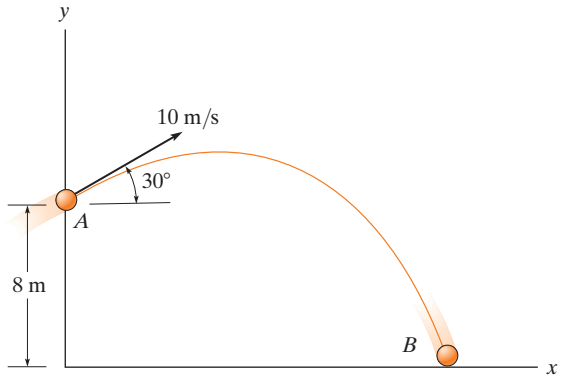
c) $y = 6 \operatorname{sen} x$

P12-4. La partícula viaja desde A hasta B. Identifique las tres incógnitas y escriba las tres ecuaciones necesarias para resolverlas.



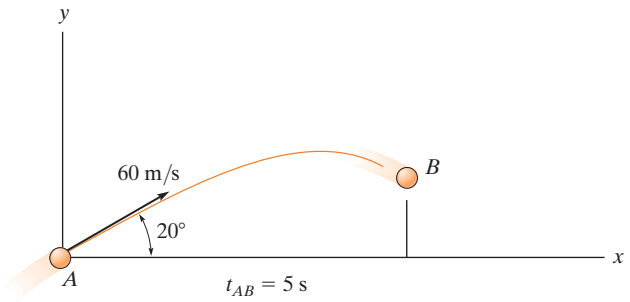
Prob. P12-4

P12-5. La partícula viaja desde A hasta B. Identifique las tres incógnitas y escriba las tres ecuaciones necesarias para resolverlas.



Prob. P12-5

P12-6. La partícula viaja desde A hasta B. Identifique las tres incógnitas y escriba las tres ecuaciones necesarias para resolverlas.

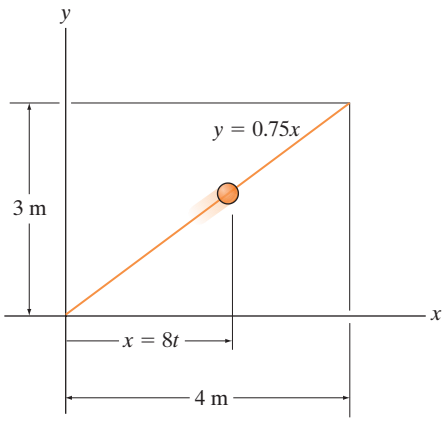


Prob. P12-6

PROBLEMAS FUNDAMENTALES

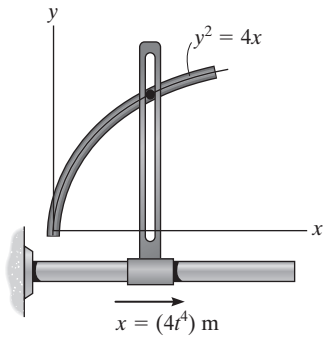
F12-15. Si las componentes x y y de la velocidad de una partícula son $v_x = (32t)$ m/s y $v_y = 8$ m/s, determine la ecuación de la trayectoria $y = f(x)$, si $x = 0$ y $y = 0$ cuando $t = 0$.

F12-16. Una partícula se desplaza a lo largo de la trayectoria recta. Si su posición a lo largo del eje x es $x = (8t)$ m, donde t está en segundos, determine la rapidez cuando $t = 2$ s.



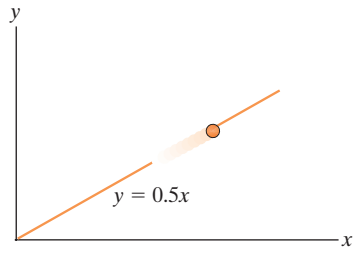
Prob. F12-16

F12-17. Se hace que una partícula viaje a lo largo de la trayectoria. Si $x = (4t^4)$ m, donde t está en segundos, determine la magnitud de la velocidad y aceleración de la partícula cuando $t = 0.5$ s.



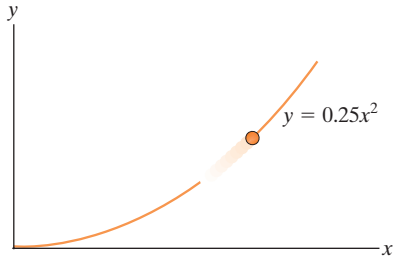
Prob. F12-17

F12-18. Una partícula viaja a lo largo de una trayectoria de línea recta $y = 0.5x$. Si la componente x de la velocidad de la partícula es $v_x = (2t^2)$ m/s, donde t está en segundos, determine la magnitud de la velocidad y aceleración de la partícula cuando $t = 4$ s.



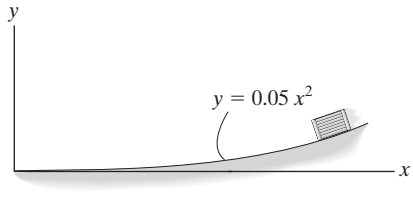
Prob. F12-18

F12-19. Una partícula viaja a lo largo de una trayectoria parabólica $y = 0.25x^2$. Si $x = 8$ m, $v_x = 8$ m/s y $a_x = 4$ m/s^2 cuando $t = 2$ s, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la partícula en este instante.



Prob. F12-19

F12-20. La caja se desliza hacia abajo sobre la pendiente descrita por la ecuación $y = (0.05x^2)$ m, donde x se da en metros. Si la caja tiene las componentes x de la velocidad y la aceleración de $v_x = -3$ m/s y $a_x = -1.5$ m/s^2 en $x = 5$ m, determine las componentes y de la velocidad y la aceleración de la caja en ese instante.

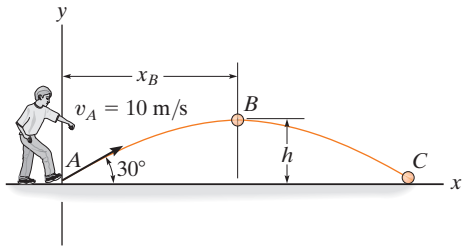


Prob. F12-20

12

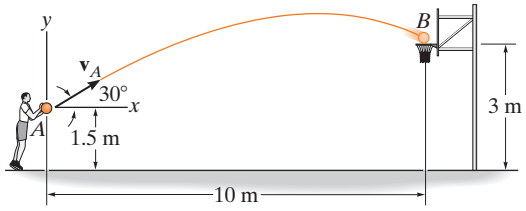
F12-21. La pelota se patea desde el punto A con la velocidad inicial $v_A = 10$ m/s. Determine la altura máxima h que alcanza.

F12-22. La pelota se patea desde el punto A con la velocidad inicial $v_A = 10$ m/s. Determine la distancia R y la rapidez con que la pelota golpea el suelo.



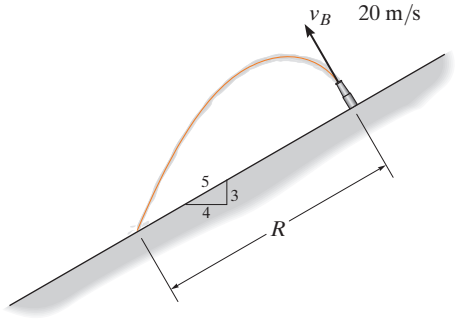
Probs. F12-21/22

F12-23. Determine la rapidez a que se debe lanzar el balón de basquetbol en A al ángulo de 30°, de modo que llegue a la canasta en B.



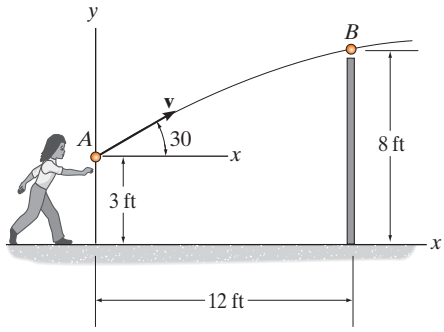
Prob. F12-23

F12-24. Se rocía agua a un ángulo de 90° desde la pendiente a 20 m/s. Determine la distancia R.



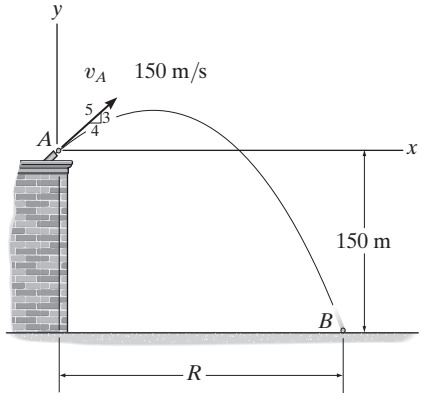
Prob. F12-24

F12-25. Se lanza una pelota desde A. Si se requiere salvar el muro en B, determine la magnitud mínima de su velocidad inicial $\mathbf{v}_A$.



Prob. F12-25

F12-26. Se dispara un proyectil con una velocidad inicial de $v_A = 150$ m/s desde la azotea de un edificio. Determine la distancia R donde golpea el suelo en B.



Prob. F12-26

PROBLEMAS

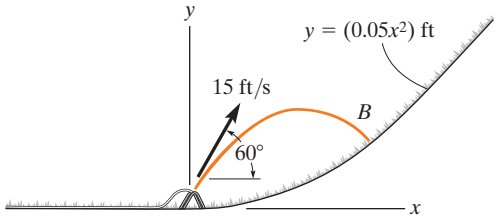
12-69. Si la velocidad de una partícula se define como $\mathbf{v}(t) = \{0.8t^2\mathbf{i} + 12t^{1/2}\mathbf{j} + 5\mathbf{k}\}$ m/s, determine la magnitud y los ángulos directores coordenados α, β, γ de la aceleración de la partícula, cuando $t = 2$ s.

12-70. La velocidad de una partícula es $\mathbf{v} = \{3\mathbf{i} + (6 - 2t)\mathbf{j}\}$ m/s, donde t se da en segundos. Si $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ cuando $t = 0$, determine el desplazamiento de la partícula durante el intervalo de tiempo desde $t = 1$ s hasta $t = 3$ s.

12-71. Una partícula que originalmente está en reposo, y que se ubica en el punto (3 ft, 2 ft, 5 ft), se somete a una aceleración de $\mathbf{a} = \{6t\mathbf{i} + 12t^2\mathbf{k}\}$ ft/s^2. Determine la posición (x, y, z) de la partícula en $t = 1$ s.

***12-72.** La velocidad de una partícula está dada por $v = \{16t^2\mathbf{i} + 4t^3\mathbf{j} + (5t + 2)\mathbf{k}\}$ m/s, donde t se da en segundos. Si la partícula está en el origen cuando $t = 0$, determine la magnitud de la aceleración de la partícula cuando $t = 2$ s. Además, ¿cuál es la posición x, y, z de la partícula en ese instante?

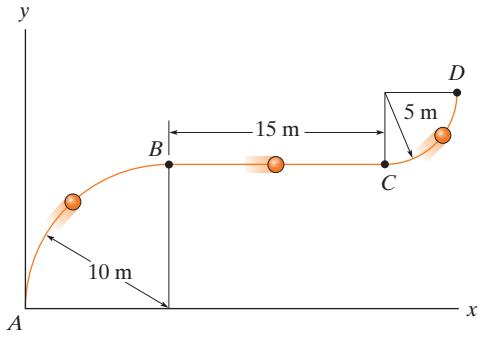
12-73. El aspersor de agua, colocado en la base de una colina, lanza un chorro de agua con una velocidad de 15 ft/s, de la manera indicada. Determine el punto $B(x, y)$, donde el agua golpea al suelo en la colina. Suponga que la colina está definida por la ecuación $y = (0.05x^2)$ ft y desprecie el tamaño del aspersor.



Prob. 12-73

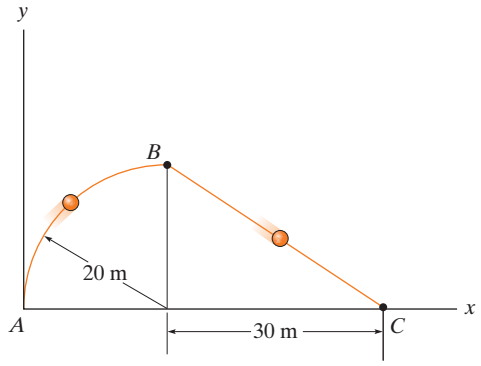
12-74. Una partícula, que inicialmente está en reposo y que se encuentra en el punto (3 ft, 2 ft, 5 ft), se somete a una aceleración $\mathbf{a} = \{6t\mathbf{i} + 12t^2\mathbf{k}\}$ ft/s^2. Determine la posición (x, y, z) de la partícula cuando $t = 2$ s.

12-75. Una partícula se desplaza a lo largo de la curva desde A hasta B en 2 s. Tarda 4 s en ir de B a C y, luego, 3 s en ir de C a D. Determine su rapidez promedio cuando va desde A hasta D.



Prob. 12-75

***12-76.** Una partícula se desplaza a lo largo de la curva desde A hasta B en 5 s. Tarda 8 s en ir desde B hasta C y después 10 s en ir desde C hasta A. Determine su rapidez promedio cuando recorre toda la trayectoria cerrada.



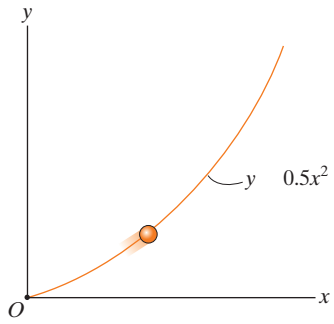
Prob. 12-76

12

12-77. La posición de una caja que se desliza hacia abajo sobre una rampa está dada por $x = (0.25t^3)$ m, $y = (1.5t^2)$ m, $z = (6 - 0.75t^{5/2})$ m, donde t está en segundos. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la caja, cuando $t = 2$ s.

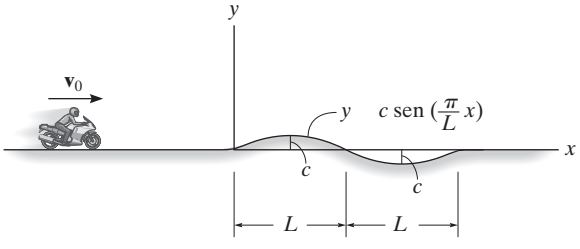
12-78. Un cohete se dispara desde el reposo en $x = 0$ y viaja a lo largo de una trayectoria parabólica descrita por $y^2 = [120(10^3)x]$ m. Si la componente x de la aceleración es $a_x = \left(\frac{1}{4}t^2\right)$ m/s^2, donde t se da en segundos, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del cohete cuando $t = 10$ s.

12-79. La partícula se desplaza a lo largo de la trayectoria definida por la parábola $y = 0.5x^2$. Si la componente de velocidad a lo largo del eje x es $v_x = (5t)$ ft/s, donde t está en segundos, determine la distancia de la partícula desde el origen O y la magnitud de su aceleración cuando $t = 1$ s. Cuando $t = 0$, $x = 0$ y $y = 0$.



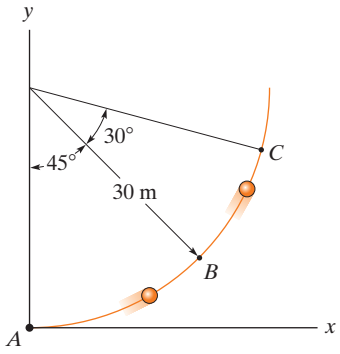
Prob. 12-79

***12-80.** La motocicleta viaja con rapidez constante v_0 a lo largo de la trayectoria que, durante una corta distancia, adopta la forma de una curva sinusoidal. Determine las componentes x y y de su velocidad en cualquier instante sobre la curva.



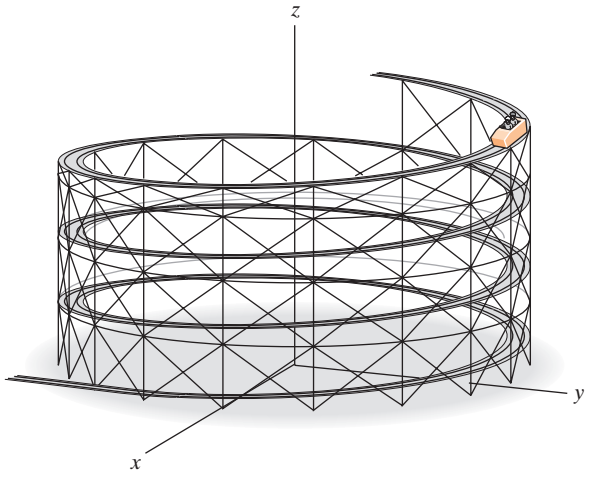
Prob. 12-80

12-81. Una partícula se desplaza a lo largo de la curva desde A hasta B en 1 s. Si tarda 3 s para ir desde A hasta C, determine su *velocidad promedio* cuando va de B a C.



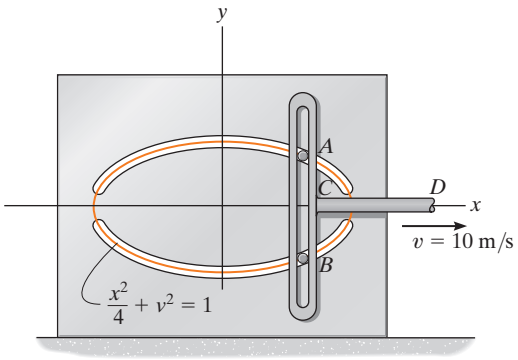
Prob. 12-81

12-82. El carro de montaña rusa desciende por la trayectoria helicoidal a una rapidez constante, de modo que las ecuaciones paramétricas que definen su posición son $x = c$ sen kt, $y = c$ cos kt, $z = h - bt$, donde c, h y b son constantes. Determine las magnitudes de su velocidad y su aceleración.



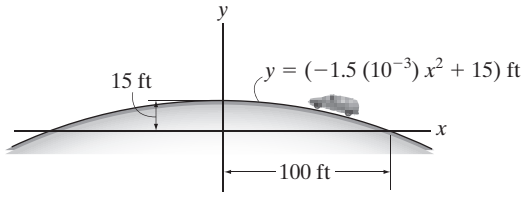
Prob. 12-82

12-83. Los pernos guía A y B están restringidos a moverse en las ranuras elípticas debido al movimiento del eslabón ranurado. Si el eslabón se mueve con una rapidez constante de 10 m/s, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del perno guía A cuando $x = 1$ m.



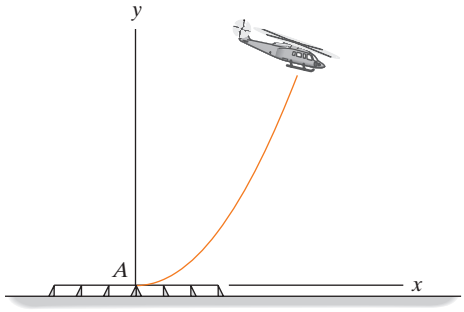
Prob. 12-83

***12-84.** La furgoneta se desplaza sobre la colina descrita por $y = (-1.5(10^{-3})x^2 + 15)$ ft. Si tiene una rapidez constante de 75 ft/s, determine las componentes x y y de la velocidad y la aceleración de la furgoneta cuando $x = 50$ ft.



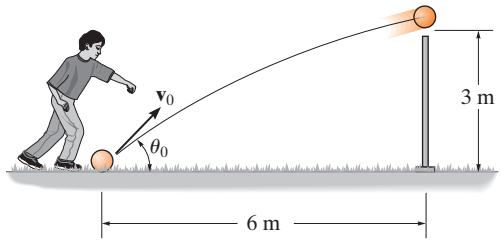
Prob. 12-84

12-85. La trayectoria de vuelo del helicóptero cuando despega desde A está definida por las ecuaciones paramétricas $x = (2t^2)$ m y $y = (0.04t^3)$ m, donde t es el tiempo en segundos. Determine la distancia a la que está el helicóptero desde el punto A y las magnitudes de su velocidad y su aceleración cuando $t = 10$ s.



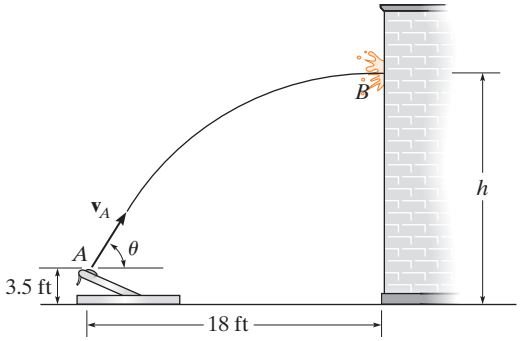
Prob. 12-85

12-86. Determine la velocidad inicial v_0 mínima y el ángulo correspondiente θ_0 a los cuales debe patearse el balón para que pase justo sobre la valla que tiene 3 m de altura.



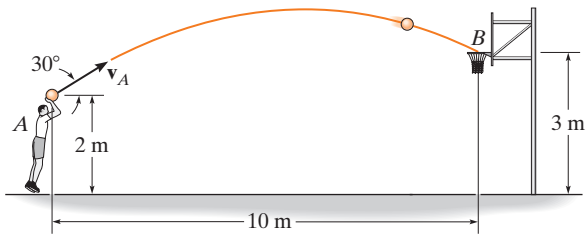
Prob. 12-86

12-87. La catapulta se utiliza para lanzar una bola de modo que golpea la pared del edificio en la altura máxima de su trayectoria. Si tarda 1.5 s en desplazarse desde A hasta B, determine la velocidad $\mathbf{v}_A$ a la que se lanza, el ángulo θ del lanzamiento y la altura h.



Prob. 12-87

***12-88.** Si se desprecia el tamaño del balón, determine la magnitud v_A de la velocidad inicial del balón de basquetbol y su velocidad cuando pasa a través de la canasta.

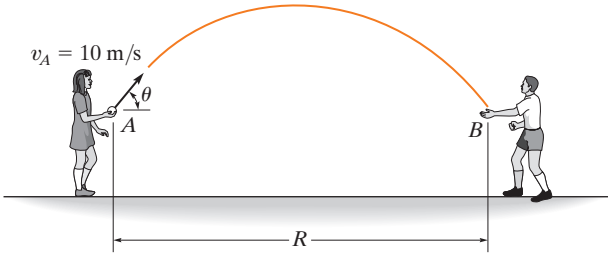


Prob. 12-88

12

12-89. La niña en A puede lanzar una pelota con $v_A = 10$ m/s. Calcule la distancia máxima, $R = R_{máx}$, que puede alcanzar y el ángulo θ asociado al que se debería lanzar. Suponga que la pelota es atrapada en B a la misma altura desde la que se lanza.

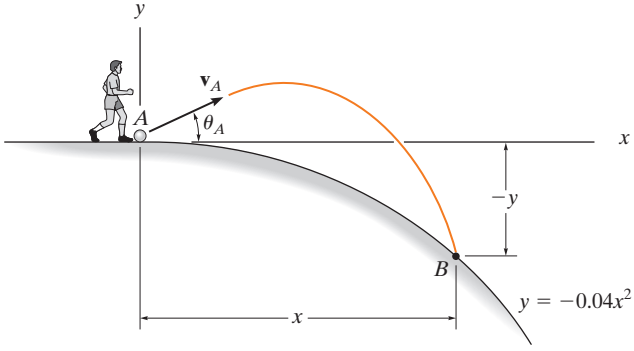
12-90. Demuestre que la niña en A puede arrojar la pelota al niño en B al lanzarla a cualquiera de los ángulos $45° - \alpha$ o $45° + \alpha$. Si $v_a = 10$ m/s, determine la distancia R si $\alpha = 15°$, es decir, $\theta_1 = 45° - 15° = 30°$ y $\theta_2 = 45° + 15° = 60°$. Suponga que la pelota es atrapada a la misma elevación desde la que se lanza.



Probs. 12-89/90

12-91. El balón se patea en A con una rapidez $v_A = 80$ ft/s y a un ángulo $\theta_A = 30°$. Determine el punto $(x, -y)$ donde golpea el suelo. Suponga que el suelo tiene la forma de la parábola que se muestra en la figura.

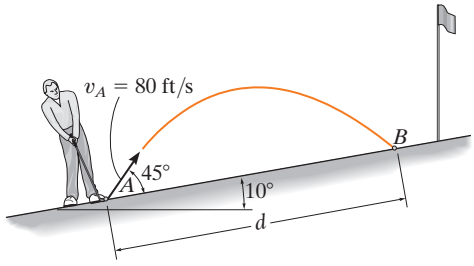
***12-92.** El balón se patea en A de modo que $\theta_A = 30°$. Si golpea el suelo en B, que tiene coordenadas $x = 15$ ft, $y = -9$ ft, determine la rapidez con la que fue pateado y la rapidez con la que golpea el suelo.



Probs. 12-91/92

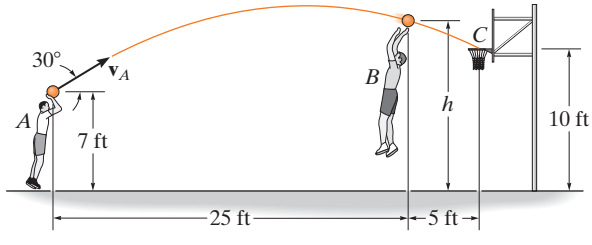
12-93. Una pelota de golf es golpeada con una velocidad de 80 ft/s como se muestra. Determine la distancia d donde caerá.

12-94. Una pelota de golf es golpeada con una velocidad de 80 ft/s como se indica. Determine la rapidez con la que golpea el suelo en B y su tiempo de vuelo desde A hasta B.



Probs. 12-93/94

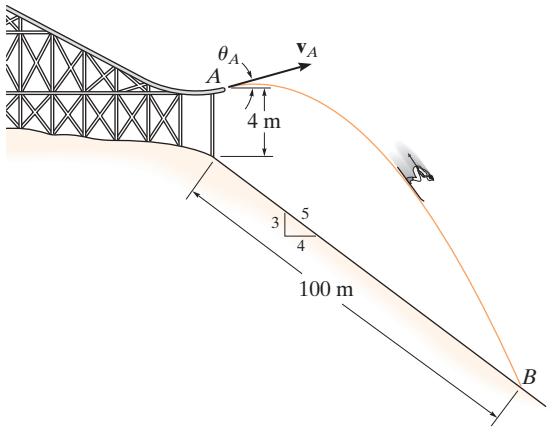
12-95. El balón de basquetbol pasó a través del aro aunque apenas superó las manos del jugador B, quien intentaba bloquearlo. Sin tomar en cuenta el tamaño del balón, determine la magnitud v_A de su velocidad inicial y la altura h del balón cuando pasa por encima del jugador B.



Prob. 12-95

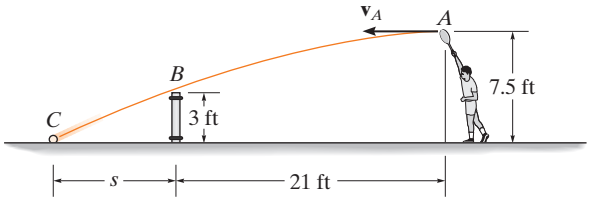
***12-96.** Se observa que el esquiador sale de la rampa en A a un ángulo $\theta_A = 25°$ con respecto a la horizontal. Si golpea el suelo en B, determine su rapidez inicial v_A y el tiempo de vuelo t_{AB}.

12-97. Se observa que el esquiador sale de la rampa en A a un ángulo $\theta_A = 25°$ con respecto a la horizontal. Si golpea el suelo en B, determine su rapidez inicial v_A y la rapidez con la que golpea el suelo.



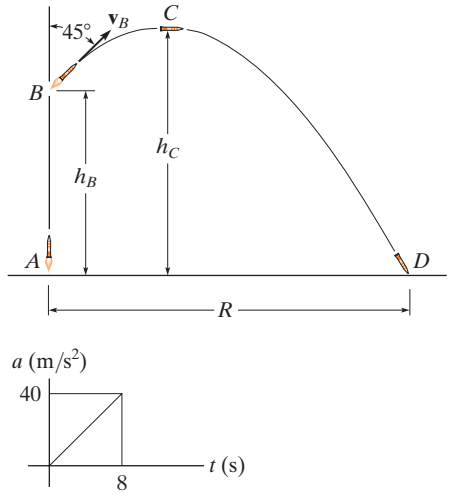
Probs. 12-96/97

12-98. Determine la velocidad horizontal v_A de una pelota de tenis en A para que apenas pasa la red en B. Asimismo, calcule la distancia s donde la pelota golpea el suelo.



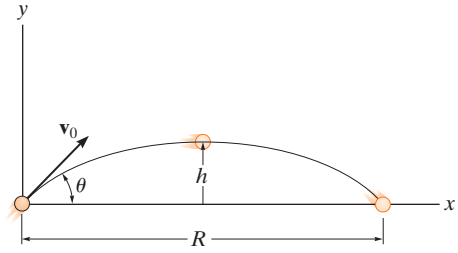
Prob. 12-98

12-99. El misil en A parte del reposo y se eleva verticalmente hasta B, donde su combustible se agota en 8 s. Si la aceleración varía con el tiempo de la manera mostrada, determine la altura h_B y la rapidez v_B del misil. Si mediante los controles internos del misil, éste se apunta repentinamente a 45°, de la forma mostrada en la figura, y se le deja viajar en vuelo libre, determine su altura máxima alcanzada, h_C, y la distancia R en la que choca en D.



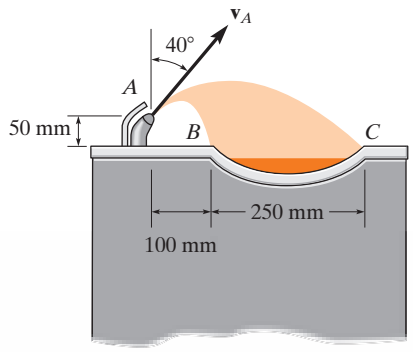
Prob. 12-99

***12-100.** El proyectil se lanza con una velocidad $\mathbf{v}_0$. Determine la distancia R, la altura máxima h alcanzada, y el tiempo de vuelo. Exprese los resultados en términos del ángulo θ y de v_0. La aceleración debida a la gravedad es g.



Prob. 12-100

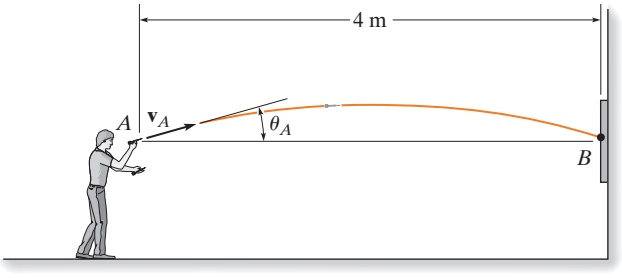
12-101. El bebedero de agua está diseñado de modo que la boquilla se ubica a la distancia mostrada desde el borde del lavabo. Determine la rapidez máxima y la rapidez mínima a las que puede lanzarse el agua desde la boquilla para que no salpique los lados de la cavidad del lavabo en B y C.



Prob. 12-101

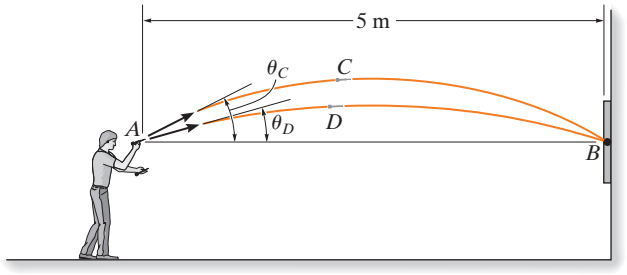
12-102. Si el dardo se lanza con una rapidez de 10 m/s, determine el menor tiempo que puede transcurrir hasta golpear el blanco. Además, ¿cuál es el ángulo correspondiente θ_A al que debería lanzarse y cuál es la velocidad del dardo cuando golpea el blanco?

12-103. Si el dardo se lanza con una rapidez de 10 m/s, determine el mayor tiempo que puede transcurrir hasta golpear el blanco. Además, ¿cuál es el ángulo correspondiente θ_A al que debería lanzarse y cuál es la velocidad del dardo cuando golpea el blanco?



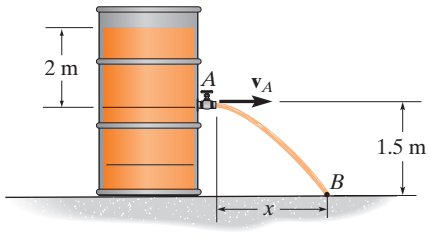
Probs. 12-102/103

***12-104.** El hombre en A desea lanzar dos dardos hacia el blanco en B, de modo que lleguen *al mismo tiempo*. Si cada dardo se lanza con una rapidez de 10 m/s, determine los ángulos θ_C y θ_D a los que deberían lanzarse los dardos y el tiempo entre cada uno de los lanzamientos. Tenga en cuenta que el primer dardo debe lanzarse a θ_C ($> \theta_D$), entonces el segundo dardo se lanza a θ_D.



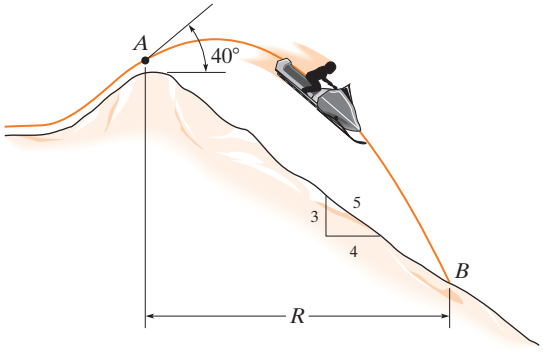
Prob. 12-104

12-105. La velocidad del chorro de agua que sale por el orificio se obtiene con $v = \sqrt{2\,gh}$, donde $h = 2$ m es la profundidad del orificio con respecto a la superficie libre del agua. Determine el tiempo para que una partícula de agua que salga por el orificio llegue al punto B, así como la distancia horizontal x donde golpea la superficie.



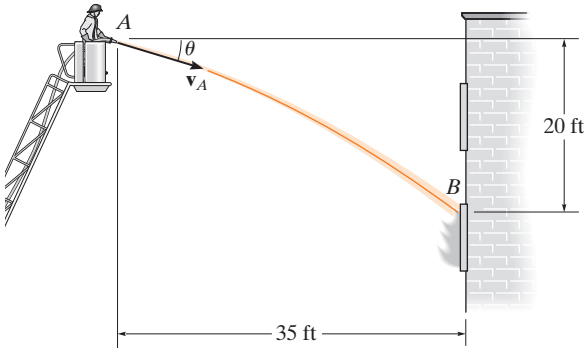
Prob. 12-105

12-106. La moto de nieve viaja a 10 m/s cuando sale del terraplén en A. Determine el tiempo de vuelo desde A hasta B, y la distancia R de la trayectoria.



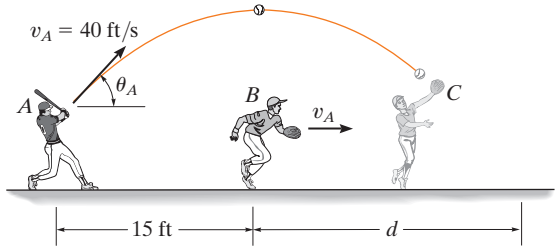
Prob. 12-106

12-107. El bombero desea dirigir el flujo de agua de su manguera al fuego en B. Determine los dos ángulos posibles θ_1 y θ_2 a los cuales puede hacerse esto. El agua fluye de la manguera a $v_A = 80$ ft/s.



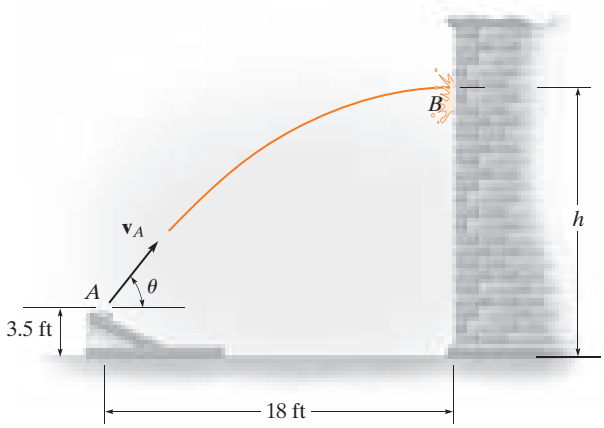
Prob. 12-107

***12-108.** El beisbolista A batea la pelota con $v_A = 40$ ft/s y $\theta_A = 60°$ con respecto a la horizontal. Cuando la pelota está exactamente arriba del jugador B éste comienza a correr debajo de ella. Determine la rapidez constante y la distancia d a la cual B debe correr para hacer la atrapada a la misma altura a la cual se bateó la pelota.



Prob. 12-108

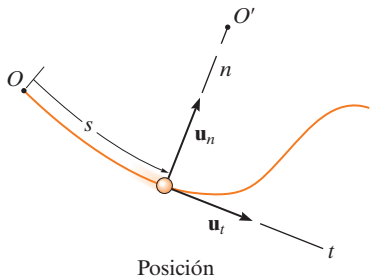
12-109. La catapulta se utiliza para lanzar una bola de modo que golpea la pared del edificio en la altura máxima de su trayectoria. Si tarda 1.5 s en desplazarse desde A hasta B, determine la velocidad $\mathbf{v}_A$ a la que se lanza, el ángulo θ del lanzamiento y la altura h.



Prob. 12-109

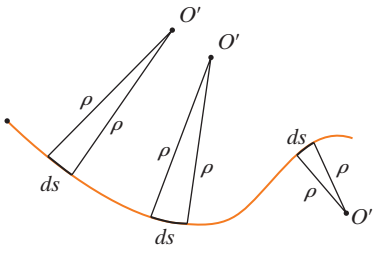
12.7 Movimiento curvilíneo: componentes normal y tangencial

Cuando se *conoce* la trayectoria a lo largo de la cual viaja una partícula, entonces a menudo conviene describir el movimiento por medio de los ejes de coordenadas *n* y *t*, los cuales actúan de manera normal y tangente a la trayectoria, respectivamente, y en el instante considerado tienen su *origen en la partícula*.



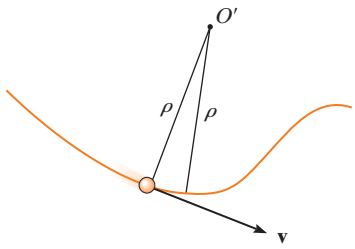
Posición

(a)



Radio de curvatura

(b)



Velocidad

(c)

Fig. 12-24

Movimiento plano. Considere la partícula de la figura 12-24*a*, la cual se desplaza en un plano a lo largo de una curva fija, de modo que en un instante dado está en la posición *s*, medida con respecto al punto *O*. A continuación consideraremos un sistema de coordenadas que tiene su origen sobre la curva, y en el instante considerado este origen *coincide* con la ubicación de la partícula. El eje *t* es *tangente* a la curva en el punto y es positivo en la dirección de *s creciente*. Designaremos esta dirección positiva con el vector unitario $\mathbf{u}_t$. Sólo puede haber una opción para el *eje normal*, ya que geométricamente la curva está formada por una serie de segmentos de arco diferenciales *ds* (fig. 12-24*b*). Cada segmento *ds* está formado por el arco de un círculo asociado con un *radio de curvatura* ρ (rho) y un *centro de curvatura* *O′*. El eje normal *n* es perpendicular al eje *t* con su sentido positivo dirigido *hacia* el centro de curvatura *O′* (fig. 12-24*a*). Esta dirección positiva, la cual *siempre* está en el lado cóncavo de la curva, será designada por el vector unitario $\mathbf{u}_n$. El plano que contiene los ejes *n* y *t* se conoce como *plano osculador* y, en este caso, se encuentra fijo en el plano del movimiento*.

Velocidad. Como la partícula se mueve, *s* es una función del tiempo. Como se indica en la sección 12.4, la *dirección* de la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula *siempre es tangente a la trayectoria* (fig. 12-24*c*) y su *magnitud* se determina por la derivada con respecto al tiempo de la función de la trayectoria $s = s(t)$, es decir, $v = ds/dt$ (ecuación 12-8). Por consiguiente,

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_t \tag{12-15}$$

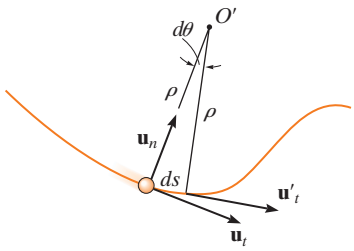
donde

$$v = \dot{s} \tag{12-16}$$

*El plano osculador también se define como el plano que tiene el mayor contacto con la curva en un punto. Es la posición limitante de un plano que está en contacto con el punto y con el segmento de arco *ds*. Como vimos antes, el plano osculador siempre coincide con una curva plana; sin embargo, cada uno de los puntos de una curva tridimensional tiene un plano osculador único.

Aceleración. La aceleración de la partícula es la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo. Por lo tanto,

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\mathbf{u}_t + v\dot{\mathbf{u}}_t \tag{12-17}$$



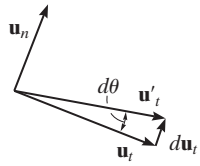
(d)

Para determinar la derivada con respecto al tiempo $\dot{\mathbf{u}}_t$, observe que a medida que la partícula se desplaza a lo largo del arco ds en el tiempo dt, $\mathbf{u}_t$ conserva su magnitud de la unidad; no obstante, su *dirección* cambia y se vuelve $\mathbf{u}'_t$, (fig. 12-24*d*). Como se indica en la figura 12-24*e*, requerimos $\mathbf{u}'_t = \mathbf{u}_t + d\mathbf{u}_t$. En este caso, $d\mathbf{u}_t$ se extiende entre las puntas de flecha de $\mathbf{u}_t$ y $\mathbf{u}'_t$, las cuales quedan en un arco infinitesimal de radio $u_t = 1$. Por consiguiente, $d\mathbf{u}_t$ tiene una *magnitud* de $du_t = (1)d\theta$ y $\mathbf{u}_n$ define su *dirección*. Por consiguiente, $d\mathbf{u}_t = d\theta\mathbf{u}_n$ y, por lo tanto, la derivada con respecto al tiempo es $\dot{\mathbf{u}}_t = \dot{\theta}\mathbf{u}_n$. Como $ds = \rho dq$ (fig. 12-24*d*, entonces $\dot{\theta} = \dot{s}/\rho$, y de esta manera

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \dot{\theta}\mathbf{u}_n = \frac{\dot{s}}{\rho}\mathbf{u}_n = \frac{v}{\rho}\mathbf{u}_n$$

Al sustituir en la ecuación 12-17, **a** se escribe como la suma de sus dos componentes,

$$\boxed{\mathbf{a} = a_t\mathbf{u}_t + a_n\mathbf{u}_n} \tag{12-18}$$



(e)

donde

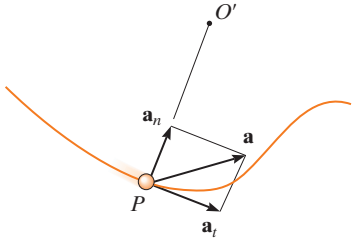
$$\boxed{a_t = \dot{v}} \quad \text{o} \quad \boxed{a_t ds = v\, dv} \tag{12-19}$$

y

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho}} \tag{12-20}$$

Estas dos componentes mutuamente perpendiculares se muestran en la figura 12-24*f*. Por consiguiente, la *magnitud* de la aceleración es el valor positivo de

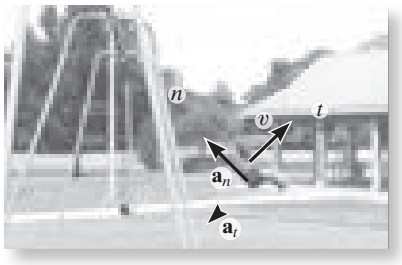
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \tag{12-21}$$



Aceleración

(f)

Fig. 12-24 (cont.)



Cuando el niño se balancea hacia arriba con una velocidad **v**, su movimiento puede analizarse usando las coordenadas *n-t*. Al elevarse, la magnitud de su velocidad (rapidez) está disminuyendo, por lo que a_t será negativa. La razón a la que cambia la dirección de su velocidad es a_n, que siempre será positiva, esto es, se dirige hacia el centro de la rotación. (© R. C. Hibbeler)

Para entender mejor estos resultados, considere los dos casos especiales de movimiento.

1. Si la partícula se mueve a lo largo de una línea recta, entonces $\rho \to \infty$, según la ecuación 12-20, $a_n = 0$. Por lo tanto, $a = a_t = \dot{v}$, y podemos concluir que la *componente tangencial de la aceleración representa la razón de cambio con respecto al tiempo en la magnitud de la velocidad.*
2. Si la partícula se mueve a lo largo de una curva con una rapidez constante, entonces $a_t = \dot{v} = 0$ y $a = a_n = v^2/\rho$. Por consiguiente, la *componente normal de la aceleración representa la razón de cambio con respecto al tiempo en la dirección de la velocidad*. Como $\mathbf{a}_n$ *siempre* actúa hacia el centro de la curvatura, esta componente en ocasiones se conoce como la *aceleración centrípeta* (o que busca el centro).

Como consecuencia de estas interpretaciones, una partícula que se mueve a lo largo de la trayectoria curva de la figura 12-25 tendrá una dirección para su aceleración como se muestra.

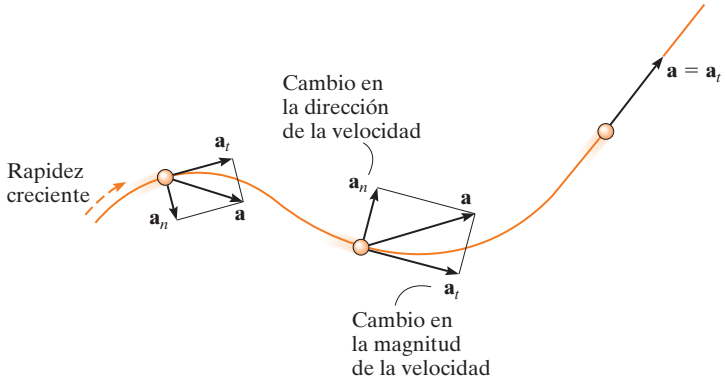


Fig. 12-25

Movimiento tridimensional. Si la partícula se mueve a lo largo de una curva espacial (fig. 12-26), entonces en un instante dado, el eje *t* queda especificado de forma única; sin embargo, puede construirse un número infinito de líneas rectas normales al eje tangencial. Como en el caso del movimiento plano, elegiremos el eje *n* positivo dirigido hacia el centro de curvatura *O′* de la trayectoria. Este eje se conoce como la *normal principal* a la curva. Con los ejes *n* y *t* así definidos, se utilizan las ecuaciones 12-15 a 12-21 para determinar **v** y **a**. Como $\mathbf{u}_t$ y $\mathbf{u}_n$ siempre son perpendiculares entre sí y quedan en el plano osculador, en el caso de movimiento espacial un tercer vector unitario, $\mathbf{u}_b$, define el *eje binormal b* que es perpendicular a $\mathbf{u}_t$ y $\mathbf{u}_n$ (fig. 12-26).

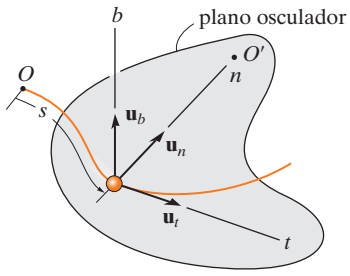


Fig. 12-26

Como los tres vectores unitarios están relacionados entre sí por el producto cruz vectorial, $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_n$ (fig. 12-26), es posible utilizar esta relación para establecer la dirección de uno de los ejes, si se conocen las direcciones de los otros dos. Por ejemplo, si no ocurre movimiento en la dirección $\mathbf{u}_b$ y se conocen esta dirección y $\mathbf{u}_t$, entonces $\mathbf{u}_n$ puede determinarse, donde en este caso $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_b \times \mathbf{u}_t$ (fig. 12-26). Recuerde, sin embargo, que $\mathbf{u}_n$ siempre está en el lado cóncavo de la curva.

Procedimiento para el análisis

Sistema de coordenadas

- Siempre que se *conozca* la *trayectoria* de la partícula, podremos establecer un sistema de coordenadas *n* y *t* con *origen fijo*, el cual coincide con la partícula en el instante considerado.
- El eje tangencial positivo actúa en la dirección del movimiento y el eje normal positivo está dirigido hacia el centro de curvatura de la trayectoria.

Velocidad

- La *velocidad de la partícula* siempre es tangente a la trayectoria.
- La magnitud de la velocidad se determina a partir de la derivada con respecto al tiempo de la función de trayectoria

$$v = \dot{s}$$

Aceleración tangencial

- La componente tangencial de aceleración es el resultado de la razón de cambio con respecto al tiempo en la *magnitud* de la velocidad. Esta componente actúa en la dirección *s* positiva, si la rapidez de la partícula se incrementa, o en la dirección opuesta si la rapidez se reduce.
- Las relaciones entre a_t, v, t y s son las mismas que las del movimiento rectilíneo, es decir,

$$a_t = \dot{v} \quad a_t\,ds = v\,dv$$

- Si a_t es constante, $a_t = (a_t)_c$, y cuando se integran las ecuaciones anteriores resultan

$$\begin{aligned} s &= s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}(a_t)_c t^2 \\ v &= v_0 + (a_t)_c t \\ v^2 &= v_0^2 + 2(a_t)_c (s - s_0) \end{aligned}$$

Aceleración normal

- La componente normal de la aceleración es el resultado de la razón de cambio con respecto al tiempo en la *dirección* de la velocidad. Esta componente *siempre* está dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria, es decir, a lo largo del eje *n* positivo.
- La magnitud de esta componente se determina como sigue:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

- Si la trayectoria se expresa como $y = f(x)$, el radio de curvatura ρ en cualquier punto de la trayectoria se determina con la ecuación

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$$

La derivación de este resultado aparece en cualquier texto estándar de cálculo.

Una vez que la rotación sea constante, los pasajeros tendrán solamente una componente normal de aceleración. (© R. C. Hibbeler)

Los automovilistas que circulan por este trébol experimentan una aceleración normal provocada por el cambio en la dirección de su velocidad. Se presenta una componente tangencial de la aceleración cuando se incrementa o se reduce la rapidez de los automóviles. (© R. C. Hibbeler)

12

EJEMPLO 12.14

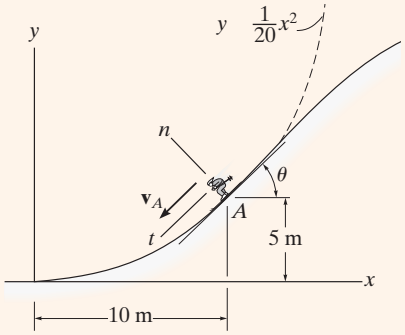
Cuando el esquiador llega al punto A a lo largo de la trayectoria parabólica en la figura 12-27*a*, su rapidez es de 6 m/s, la cual se incrementa a 2 m/s^2. Determine la dirección de su velocidad y la dirección y magnitud de su aceleración en este instante. Al hacer el cálculo, desprecie la estatura del esquiador.

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. Aunque la trayectoria está expresada en función de sus coordenadas x y y, aun así podemos establecer el origen de los ejes n, t en el punto fijo A de la trayectoria, y determinar las componentes de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ a lo largo de tales ejes (fig. 12-27*a*).

Velocidad. Por definición, la velocidad siempre es tangente a la trayectoria. Como $y = \frac{1}{20}x^2$, $dy/dx = \frac{1}{10}x$, entonces cuando $x = 10$ m, $dy/dx = 1$. Por consiguiente, en A, $\mathbf{v}$ forma un ángulo $\theta = \tan^{-1} 1 = 45°$ con respecto al eje x (fig. 12-27*b*). De esta manera,

$$v_A = 6 \text{ m/s} \quad 45° \measuredangle \qquad \textit{Resp.}$$



(a)

La aceleración está determinada por $\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{u}_t + (v^2/\rho)\mathbf{u}_n$. Sin embargo, primero se tiene que determinar el radio de curvatura de la trayectoria en $A(10 \text{ m}, 5 \text{ m})$. Como $d^2y/dx^2 = \frac{1}{10}$, entonces

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|} = \frac{\left[1 + \left(\frac{1}{10}x\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{1}{10}\right|}\bigg|_{x=10\text{ m}} = 28.28 \text{ m}$$

La aceleración es

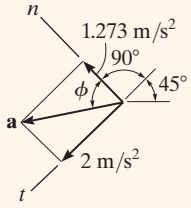
$$\begin{aligned}\mathbf{a}_A &= \dot{v}\mathbf{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{u}_n \\ &= 2\mathbf{u}_t + \frac{(6 \text{ m/s})^2}{28.28 \text{ m}}\mathbf{u}_n \\ &= \{2\mathbf{u}_t + 1.273\mathbf{u}_n\} \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

Como se indica en la figura 12-27*b*,

$$a = \sqrt{(2 \text{ m/s}^2)^2 + (1.273 \text{ m/s}^2)^2} = 2.37 \text{ m/s}^2$$
$$\phi = \tan^{-1}\frac{2}{1.273} = 57.5°$$

Por lo tanto, $45° + 90° + 57.5° - 180° = 12.5°$ de modo que,

$$a = 2.37 \text{ m/s}^2 \quad 12.5° \measuredangle \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Fig. 12-27

NOTA: Al utilizar las coordenadas n, t, fuimos capaces de resolver con facilidad este problema mediante la ecuación 12-18, puesto que considera por separado los cambios en la magnitud y la dirección de $\mathbf{v}$.

EJEMPLO 12.15

Un automóvil de carreras C circula alrededor de la pista circular horizontal de 300 ft de radio (fig. 12-28). Si el auto aumenta su rapidez a un ritmo constante de 7 ft/s^2, a partir del reposo, determine el tiempo que necesita para alcanzar una aceleración de 8 ft/s^2. ¿Cuál es su rapidez en este instante?

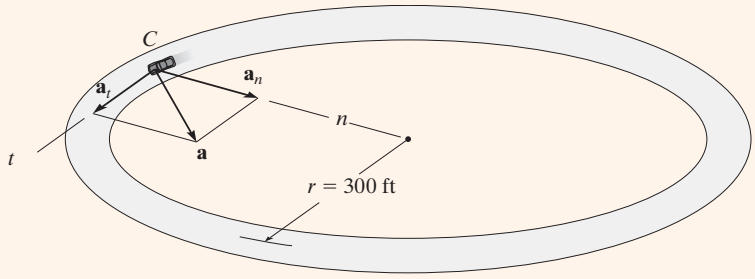


Fig. 12-28

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. El origen de los ejes n y t coincide con el automóvil en el instante considerado. El eje t está en la dirección del movimiento y el eje n positivo está dirigido hacia el centro del círculo. Se selecciona este sistema de coordenadas puesto que se conoce la trayectoria.

Aceleración. La magnitud de la aceleración puede relacionarse con sus componentes por medio de $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$. En este caso, $a_t = 7$ ft/s^2. Como $a_n = v^2/\rho$, primero debe determinarse la velocidad como una función del tiempo.

$$v = v_0 + (a_t)_c t$$
$$v = 0 + 7t$$

Por lo tanto,

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(7t)^2}{300} = 0.163t^2 \text{ ft/s}^2$$

El tiempo requerido para que la aceleración llegue a ser de 8 ft/s^2 es, entonces,

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$
$$8 \text{ ft/s}^2 = \sqrt{(7 \text{ ft/s}^2)^2 + (0.163t^2)^2}$$

Al despejar el valor positivo de t se obtiene

$$0.163t^2 = \sqrt{(8 \text{ ft/s}^2)^2 - (7 \text{ ft/s}^2)^2}$$
$$t = 4.87 \text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

Velocidad. La rapidez en el instante $t = 4.87$ s es

$$v = 7t = 7(4.87) = 34.1 \text{ ft/s} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Recuerde que la velocidad siempre será tangente a la trayectoria, en tanto que la aceleración estará dirigida hacia dentro de la curvatura de la trayectoria.

12

EJEMPLO 12.16

(© R. C. Hibbeler)

Las cajas en la figura 12-29*a* se desplazan a lo largo de la transportadora industrial. Si una caja como la de la figura 12-29*b* comienza a moverse del reposo en A, e incrementa su rapidez de modo que $a_t = (0.2t)\ \text{m/s}^2$, donde t está en segundos, determine la magnitud de su aceleración cuando llegue al punto B.

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. La posición de la caja en cualquier instante se define con respecto al punto fijo A mediante la coordenada de trayectoria o posición s (fig. 12-29*b*). Se tiene que determinar la aceleración en B con el origen de los ejes n, t en este punto.

Aceleración. Para determinar las componentes de la aceleración $a_t = \dot{v}$ y $a_n = v^2/\rho$, primero es necesario formular v y $\dot{v}$, de modo que puedan evaluarse en B. Como $v_A = 0$ cuando $t = 0$, entonces

$$a_t = \dot{v} = 0.2t \tag{1}$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t 0.2t\, dt$$

$$v = 0.1t^2 \tag{2}$$

El tiempo requerido para que la caja llegue al punto B se determina teniendo en cuenta que la posición de B es $s_B = 3 + 2\pi(2)/4 = 6.142$ m (fig. 12-29*b*) y como $s_A = 0$ cuando $t = 0$ tenemos

$$v = \frac{ds}{dt} = 0.1t^2$$

$$\int_0^{6.142\ \text{m}} ds = \int_0^{t_B} 0.1t^2 dt$$

$$6.142\ \text{m} = 0.0333t_B^3$$

$$t_B = 5.690\text{s}$$

Al sustituir en las ecuaciones 1 y 2, se obtiene

$$(a_B)_t = \dot{v}_B = 0.2(5.690) = 1.138\ \text{m/s}^2$$

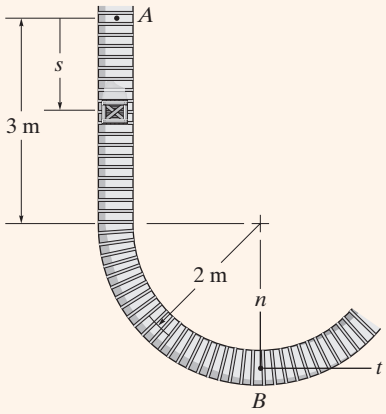
$$v_B = 0.1(5.69)^2 = 3.238\ \text{m/s}$$

En B, $\rho_B = 2$ m, de modo que

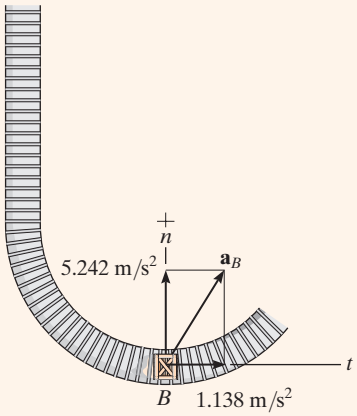
$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho_B} = \frac{(3.238\ \text{m/s})^2}{2\ \text{m}} = 5.242\ \text{m/s}^2$$

La magnitud de $\mathbf{a}_B$ (fig. 12-29*c*) es, por ende,

$$a_B = \sqrt{(1.138\ \text{m/s}^2)^2 + (5.242\ \text{m/s}^2)^2} = 5.36\ \text{m/s}^2 \quad \textit{Resp.}$$



(b)



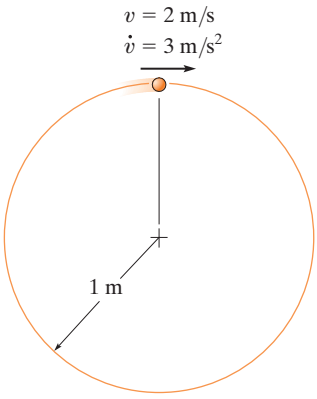
(c)

Fig. 12-29

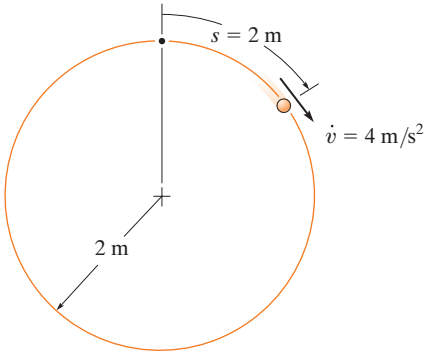
PROBLEMA PRELIMINAR

P12-7.

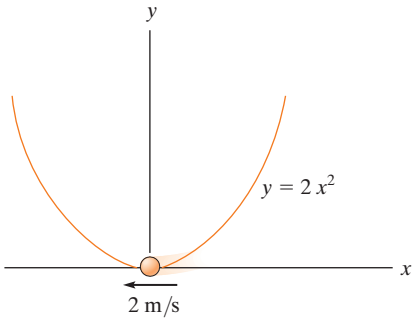
a) Determine la aceleración en el instante que se indica.



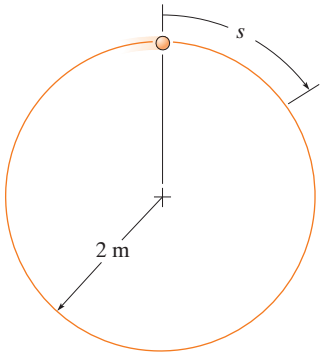
b) Determine el incremento en la rapidez y la componente normal de la aceleración en $s = 2$ m. En $s = 0$, $v = 0$.



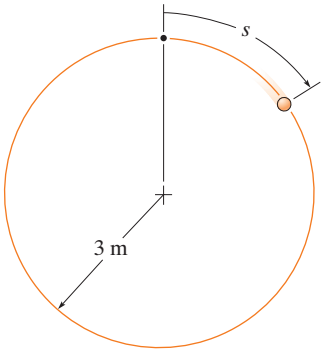
c) Determine la aceleración en el instante mostrado. La partícula tiene una rapidez constante de 2 m/s.



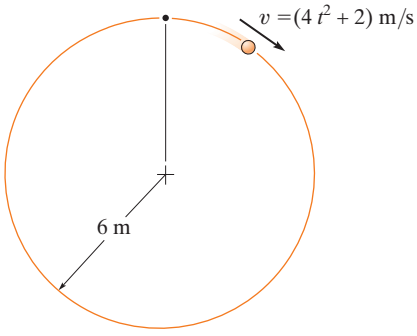
d) Determine las componentes normal y tangencial de la aceleración en $s = 0$, si $v = (4s + 1)$ m/s, donde s está en metros.



e) Determine la aceleración en $s = 2$ m si $\dot{v} = (2\,s)$ m/s^2, donde s está en metros. En $s = 0$, $v = 1$ m/s.



f) Determine la aceleración cuando $t = 1$ s, si $v = (4t^2 + 2)$ m/s, donde t se da en segundos.

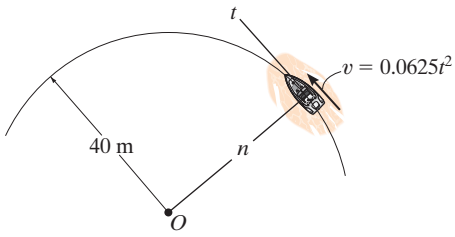


Prob. P12-7

12

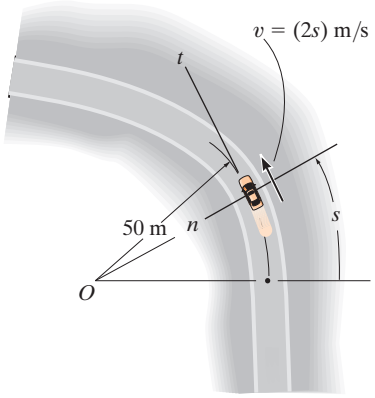
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F12-27. El bote navega a lo largo de la trayectoria circular a una rapidez de $v = (0.0625t^2)$ m/s, donde t está en segundos. Determine la magnitud de su aceleración cuando $t = 10$ s.



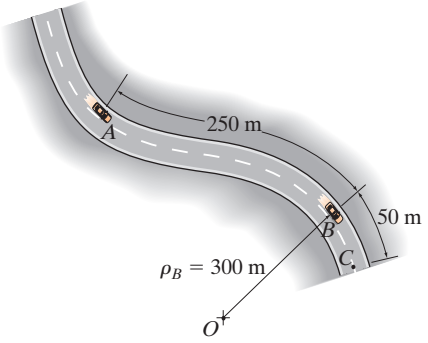
Prob. F12-27

F12-28. El automóvil viaja a lo largo de la carretera a una rapidez de $v = (2s)$ m/s, donde s está en metros. Determine la magnitud de su aceleración cuando $s = 10$ m.



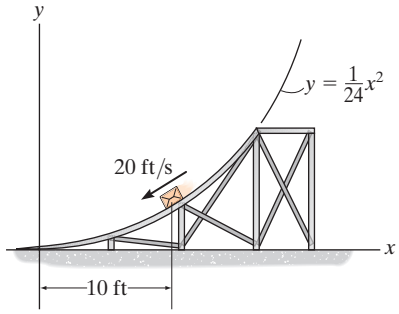
Prob. F12-28

F12-29. Si el automóvil desacelera de manera uniforme a lo largo de la carretera curva de 25 m/s en A a 15 m/s en C, determine la aceleración del automóvil en B.



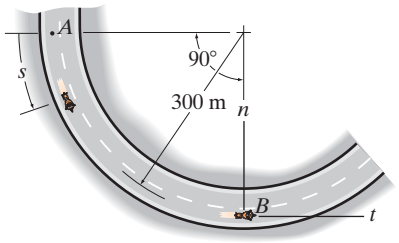
Prob. F12-29

F12-30. Cuando $x = 10$ ft, la rapidez del embalaje es de 20 ft/s, la cual se incrementa a 6 ft/s^2. Determine la dirección de su velocidad y la magnitud de su aceleración en este instante.



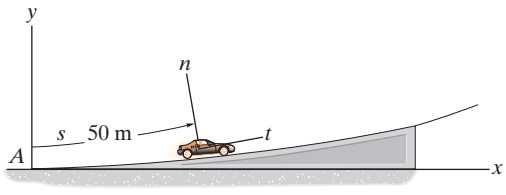
Prob. F12-30

F12-31. Si la desaceleración de la motocicleta es $a_t = -(0.001s)$ m/s^2 y su rapidez en la posición A es de 25 m/s, determine la magnitud de su aceleración cuando pasa por el punto B.



Prob. F12-31

F12-32. El automóvil sube la colina con una rapidez de $v = (0.2s)$ m/s, donde s está en metros, medida con respecto a A. Determine la magnitud de su aceleración cuando esté en el punto $s = 50$ m, donde $\rho = 500$ m.



Prob. F12-32

PROBLEMAS

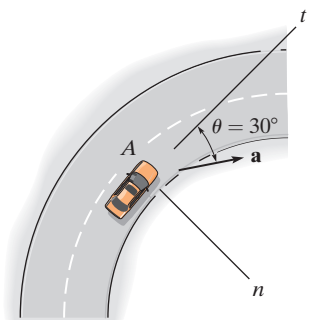
12-110. Un automóvil se desplaza sobre una curva que tiene un radio de 800 ft. Si la aceleración del automóvil es de 5 ft/s^2, determine la rapidez constante a la que el automóvil está viajando.

12-111. Determine la rapidez constante máxima que un automóvil de carreras puede tener, si su aceleración no puede exceder de 7.5 m/s^2, mientras recorre una pista con radio de curvatura de 200 m.

***12-112.** Una lancha tiene una velocidad inicial de 16 ft/s. Si luego aumenta su rapidez a lo largo de una trayectoria circular de radio $\rho = 80$ ft a razón de $\dot{v} = (1.5s)$ ft/s, donde s se da en pies, determine el tiempo necesario para que la lancha recorra $s = 50$ ft.

12-113. La posición de una partícula está definida por $\mathbf{r} = \{4(t - \text{sen } t)\mathbf{i} + (2t^2 - 3)\mathbf{j}\}$ m, donde t está en segundos y el argumento del seno se da en radianes. Determine la rapidez de la partícula y sus componentes normal y tangencial de aceleración cuando $t = 1$ s.

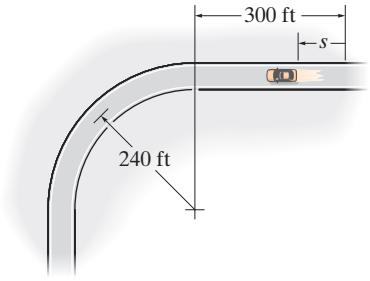
12-114. En el punto A la rapidez del automóvil es de 80 ft/s y la magnitud de su aceleración es de 10 ft/s^2 y actúa en la dirección mostrada. Determine el radio de curvatura de la trayectoria en el punto A y la componente tangencial de la aceleración.



Prob. 12-114

12-115. El automóvil está inicialmente en reposo en $s = 0$. Si su rapidez se incrementa a razón de $\dot{v} = (0.05t^2)$ ft/s^2, donde t se da en segundos, determine las magnitudes de su velocidad y aceleración, cuando $t = 18$ s.

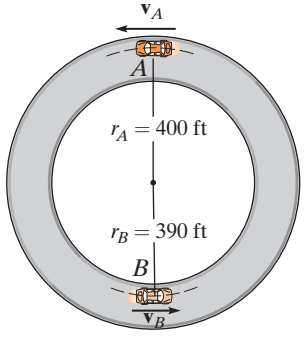
***12-116.** El automóvil está inicialmente en reposo en $s = 0$. Si entonces comienza a incrementar su rapidez a razón de $\dot{v} = (0.05t^2)$ ft/s^2, donde t se da en segundos, determine las magnitudes de su velocidad y aceleración en $s = 550$ ft.



Probs. 12-115/116

12-117. Los dos automóviles A y B viajan a lo largo de la trayectoria circular a rapideces constantes $v_A = 80$ ft/s y $v_B = 100$ ft/s, respectivamente. Si están en las posiciones mostradas cuando $t = 0$, determine el instante en el que los autos se encuentra uno junto al otro, y el instante en que está separados por 90°.

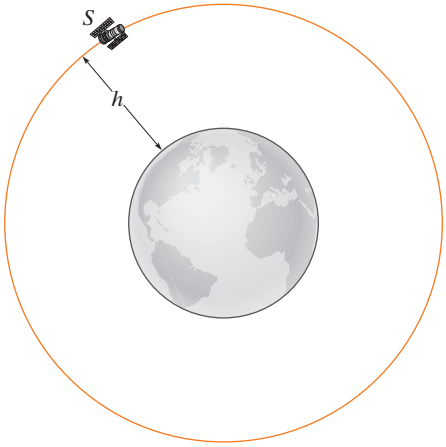
12-118. Los automóviles A y B están viajando alrededor de la pista de carreras circular. En el instante mostrado, A tiene una rapidez de 60 ft/s y está aumentando su rapidez a razón de 15 ft/s^2 hasta recorrer una distancia de 100π ft, después de lo cual mantiene una rapidez constante. El auto B tiene una rapidez de 120 ft/s y está disminuyendo su rapidez a razón de 15 ft/s^2 hasta que recorre una distancia de 65π ft, después de lo cual mantiene una rapidez constante. Determine el instante cuando un automóvil está al lado del otro.



Probs. 12-117/118

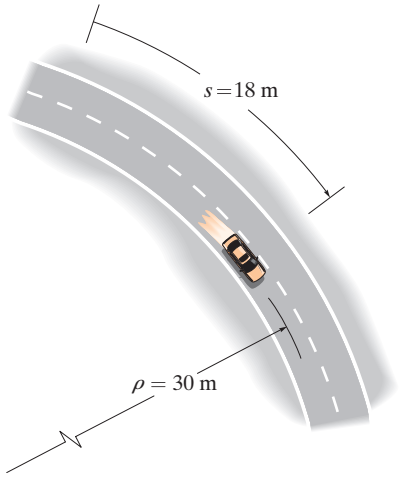
12

12-119. El satélite S viaja alrededor de la Tierra en una trayectoria circular con una rapidez constante de 20 Mm/h. Si la aceleración es de 2.5 m/s^2, determine la altitud h. Suponga que el diámetro de la Tierra es de 12 713 km.



Prob. 12-119

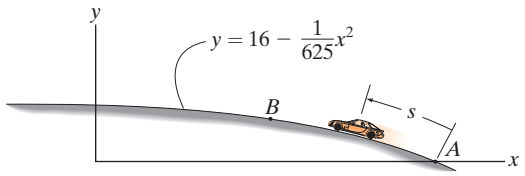
***12-120.** El automóvil se desplaza a lo largo de una trayectoria circular de modo que su rapidez se incrementa en $a_t = (0.5e^t)$ m/s^2, donde t está en segundos. Determine las magnitudes de su velocidad y aceleración después de que ha recorrido $s = 18$ m a partir del reposo. Desprecie el tamaño del automóvil.



Prob. 12-120

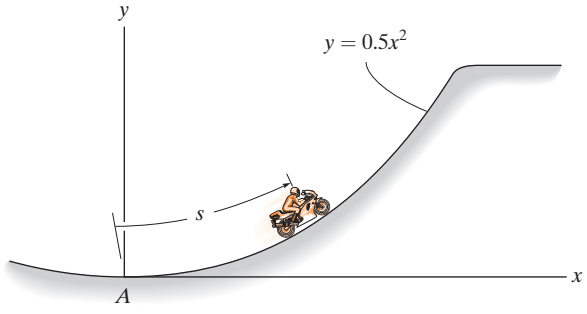
12-121. El automóvil pasa por el punto A con una rapidez de 25 m/s, después de lo cual su rapidez se define como $v = (25 - 0.15s)$ m/s. Determine la magnitud de su aceleración cuando llega al punto B, donde $s = 51.5$ m y $x = 50$ m.

12-122. Si el automóvil pasa por el punto A con una rapidez de 20 m/s y comienza a incrementarse a una razón constante de $a_t = 0.5$ m/s^2, determine la magnitud de la aceleración del auto cuando $s = 101.68$ m y $x = 0$.



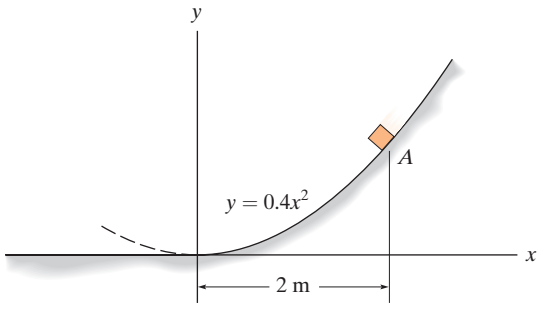
Probs. 12-121/122

12-123. La motocicleta se desplaza a 1 m/s cuando está en A. Si luego la rapidez se incrementa en $\dot{v} = 0.1$ m/s^2, determine su velocidad y aceleración en el instante $t = 5$ s.



Prob. 12-123

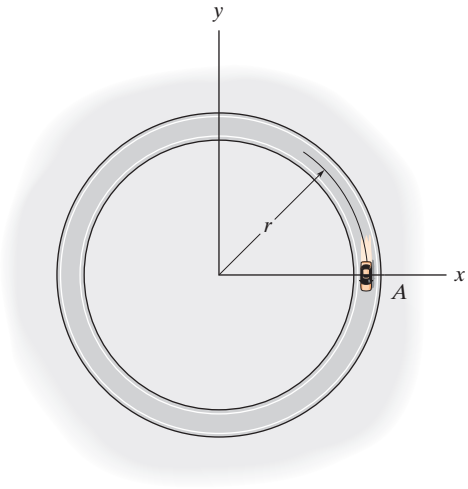
***12-124.** La caja, cuyo tamaño es despreciable, se desliza hacia abajo a lo largo de una trayectoria curva definida por la parábola $y = 0.4x^2$. Cuando está en $A(x_A = 2\text{ m}, y_A = 1.6\text{ m})$, la rapidez es $v = 8$ m/s y el incremento de su rapidez es $dv/dt = 4\text{ m/s}^2$. Determine la magnitud de la aceleración de la caja en este instante.



Prob. 12-124

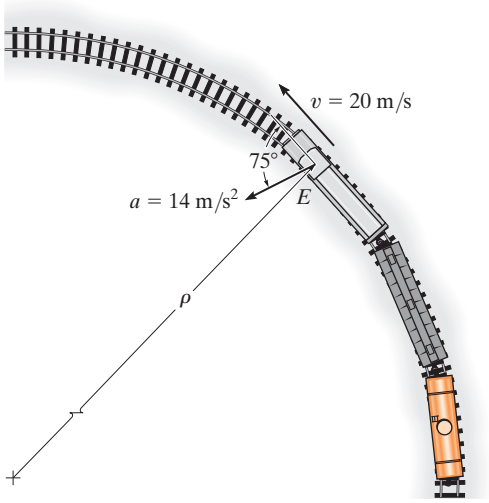
12-125. El automóvil viaja alrededor de la pista circular que tiene un radio de $r = 300$ m, de modo que cuando está en el punto A tiene una velocidad de 5 m/s, la cual aumenta a razón de $\dot{v} = (0.06t)\text{ m/s}^2$, donde t está en segundos. Determine las magnitudes de su velocidad y aceleración cuando ha recorrido un tercio del camino alrededor de la pista.

12-126. El automóvil viaja alrededor de la porción de una pista circular que tiene un radio de $r = 500$ ft, de modo que cuando está en el punto A tiene una velocidad de 2 ft/s, la cual aumenta a razón de $\dot{v} = (0.002t)\text{ ft/s}^2$, donde t está en segundos. Determine las magnitudes de su velocidad y aceleración cuando ha recorrido tres cuartos del camino alrededor de la pista.



Probs. 12-125/126

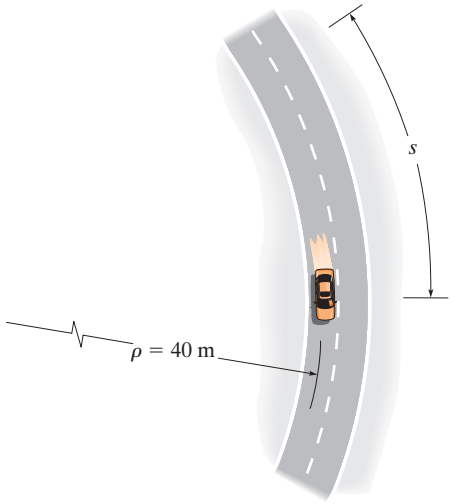
12-127. En un instante dado la locomotora del tren en E tiene una rapidez de 20 m/s y una aceleración de 14 m/s^2 que actúan en la dirección mostrada. Determine la razón de aumento de la rapidez del tren y el radio de curvatura ρ de la trayectoria.



Prob. 12-127

***12-128.** El automóvil tiene una rapidez inicial $v_0 = 20$ m/s. Si aumenta su rapidez a lo largo de la pista circular en $s = 0$, $a_t = (0.8s)\text{ m/s}^2$, donde s está en metros, determine el tiempo necesario para que el auto recorra $s = 25$ m.

12-129. El automóvil parte desde el reposo en $s = 0$ y aumenta su rapidez en $a_t = 4\text{ m/s}^2$. Determine el tiempo cuando la magnitud de la aceleración llega a 20 m/s^2. ¿En qué posición s ocurre esto?



Probs. 12-128/129

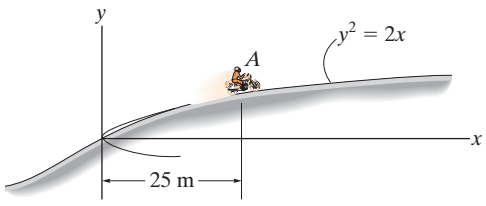
12-130. Una lancha se desplaza a lo largo de una curva circular que tiene un radio de 100 ft. Si su rapidez en $t = 0$ es de 15 ft/s y está aumentando a razón de $\dot{v} = (0.8t)$ ft/s^2, determine la magnitud de su aceleración en el instante $t = 5$ s.

12-131. Una lancha se desplaza a lo largo de una trayectoria circular con un radio de 20 m. Determine la magnitud de la aceleración de la lancha, cuando la rapidez es $v = 5$ m/s y la razón de aumento de la rapidez es $\dot{v} = 2$ m/s^2.

***12-132.** A partir del reposo, un ciclista viaja alrededor de una trayectoria circular horizontal, $\rho = 10$ m, con una rapidez de $v = (0.09t^2 + 0.1t)$ m/s, donde t se da en segundos. Determine las magnitudes de su velocidad y aceleración cuando haya recorrido $s = 3$ m.

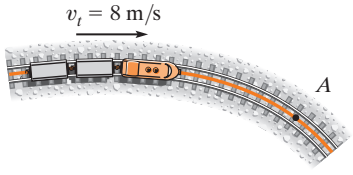
12-133. Una partícula viaja alrededor de una trayectoria circular con un radio de 50 m. Si se desplaza inicialmente con una rapidez de 10 m/s y luego ésta aumenta a razón de $\dot{v} = (0.05\, v)$ m/s^2, determine la magnitud de la aceleración de la partícula cuatro segundos después.

12-134. La motocicleta viaja a una rapidez constante de 60 km/h. Determine la magnitud de su aceleración cuando está en el punto A.



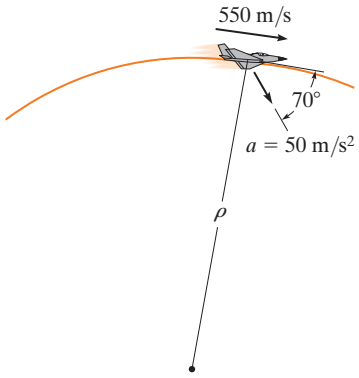
Prob. 12-134

12-135. Cuando $t = 0$, el tren tiene una rapidez de 8 m/s, que está aumentando a 0.5 m/s^2. Determine la magnitud de la aceleración de la locomotora cuando alcanza el punto A, en $t = 20$ s. Aquí, el radio de curvatura de la pista es $\rho_A = 400$ m.



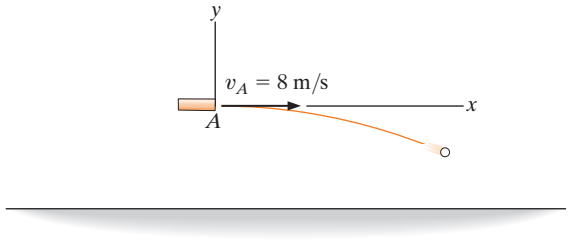
Prob. 12-135

***12-136.** En un instante dado, el avión a reacción tiene una rapidez de 550 m/s y una aceleración de 50 m/s^2 que actúan en la dirección mostrada. Determine la razón de aumento en la rapidez del avión, así como el radio de curvatura ρ de la trayectoria.



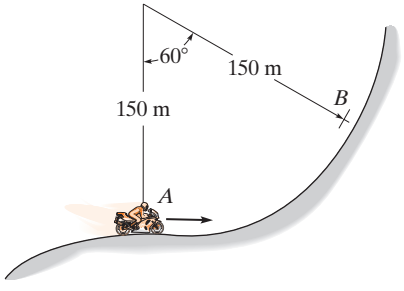
Prob. 12-136

12-137. La bola se lanza horizontalmente desde el tubo con una rapidez de 8 m/s. Encuentre la ecuación de la trayectoria, $y = f(x)$, y después encuentre la velocidad de la bola y las componentes normal y tangencial de la aceleración, cuando $t = 0.25$ s.



Prob. 12-137

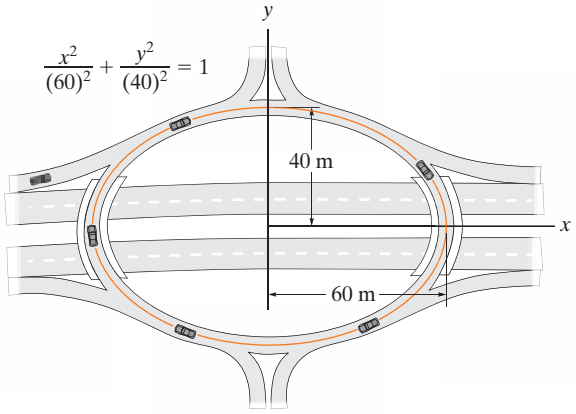
12-138. La motocicleta se desplaza a 40 m/s cuando está en A. Si la rapidez se reduce entonces a razón de $\dot{v} = -(0.05\, s)$ m/s^2, donde s está en metros medidos desde A, determine su rapidez y aceleración cuando llega a B.



Prob. 12-138

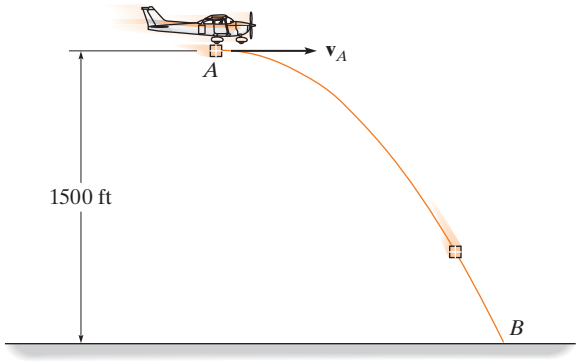
12-139. Los automóviles se mueven alrededor del "distribuidor vial" que tiene la forma de una elipse. Si el límite de rapidez establecido es de 60 km/h, determine la aceleración mínima que experimentan los pasajeros.

***12-140.** Los automóviles se mueven alrededor del "distribuidor vial" que tiene la forma de una elipse. Si el límite de rapidez establecido es de 60 km/h, determine la aceleración máxima que experimentan los pasajeros.



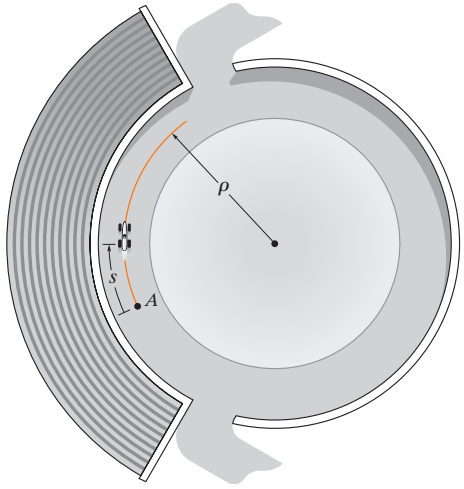
Probs. 12-139/140

12-141. Un avión deja caer un paquete mientras vuela con una velocidad horizontal constante de $v_A = 150$ ft/s. Determine las componentes normal y tangencial de la aceleración y el radio de curvatura de la trayectoria de movimiento (a) en el momento que el paquete se suelta en A, donde tiene una velocidad horizontal de $v_A = 150$ ft/s, y (b) *justo antes* de que golpee el suelo en B.



Prob. 12-141

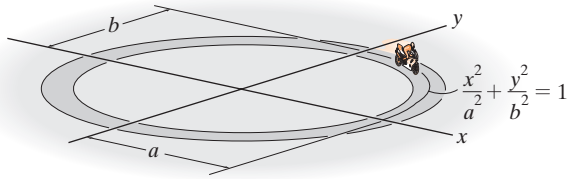
12-142. El automóvil de carreras tiene una rapidez inicial $v_A = 15$ m/s en A. Si se aumenta su rapidez a lo largo de la pista circular a razón de $a_t = (0.4s)$ m/s^2, donde s está en metros, determine el tiempo necesario para que el automóvil viaje 20 m. Considere que $\rho = 150$ m.



Prob. 12-142

12-143. La motocicleta viaja a lo largo de la pista elíptica a una rapidez constante v. Determine la magnitud máxima de la aceleración si $a > b$.

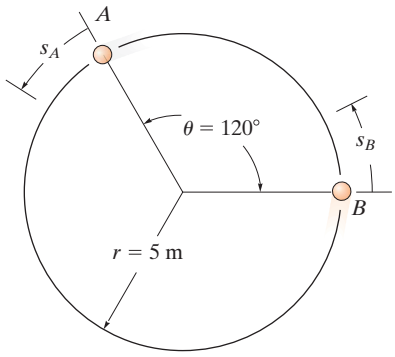
***12-144.** La motocicleta viaja a lo largo de la pista elíptica a una rapidez constante v. Determine la magnitud mínima de la aceleración si $a > b$.



Probs. 12-143/144

12-145. Las partículas A y B viajan en sentido antihorario alrededor de una pista circular a una rapidez constante de 8 m/s. Si en el instante mostrado la rapidez de A comienza a incrementarse en $(a_t)_A = (0.4s_A)$ m/s^2, donde s_A está en metros, determine la distancia medida en sentido antihorario a lo largo de la pista de B a A, cuando $t = 1$ s. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de cada partícula en este instante?

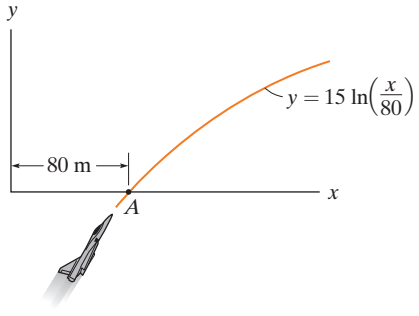
12-146. Las partículas A y B viajan alrededor de una pista circular a una rapidez de 8 m/s en el instante que se muestra. Si la rapidez de B se incrementa en $(a_t)_B = 4$ m/s^2 y en el mismo instante A experimenta un incremento de rapidez de $(a_t)_A = 0.8t$ m/s^2, determine cuánto tiempo se requiere para que ocurra una colisión. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de cada partícula justo antes de que ocurra la colisión?



Probs. 12-145/146

12-147. El avión de reacción vuela a una rapidez de 120 m/s, la cual se reduce a 40 m/s^2 cuando llega al punto A. Determine la magnitud de su aceleración cuando está en este punto. Asimismo, especifique la dirección del vuelo con respecto al eje x.

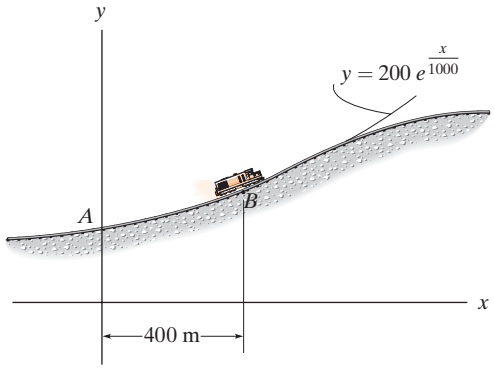
***12-148.** El avión de reacción vuela a una rapidez constante de 110 m/s a lo largo de una trayectoria curva. Determine la magnitud de su aceleración cuando llega al punto $A(y = 0)$.



Probs. 12-147/148

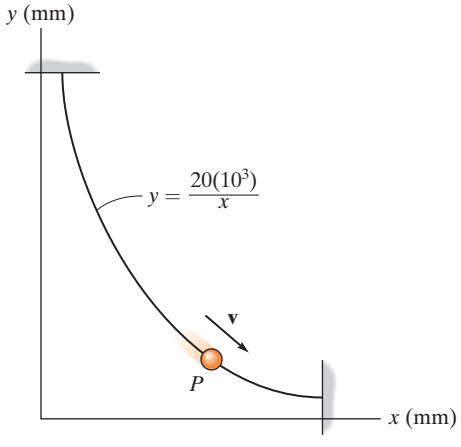
12-149. El tren pasa por el punto B con una rapidez de 20 m/s que está disminuyendo a razón de $a_t = -0.5$ m/s^2. Determine la magnitud de la aceleración del tren en ese punto.

12-150. El tren pasa por el punto A con una rapidez de 30 m/s y comienza a disminuir su rapidez a razón constante de $a_t = -0.25$ m/s^2. Determine la magnitud de la aceleración del tren cuando alcanza el punto B, donde $s_{AB} = 412$ m.



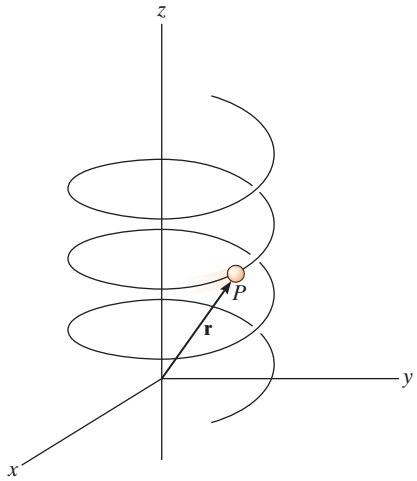
Probs. 12-149/150

12-151. La partícula se desplaza con una rapidez constante de 300 mm/s a lo largo de la curva. Determine la aceleración de la partícula cuando se encuentra en el punto (200 mm, 100 mm) y grafique este vector sobre la curva.



Prob. 12-151

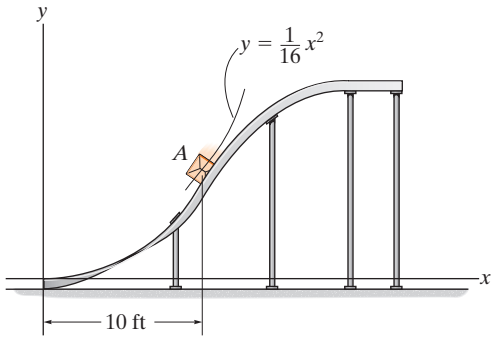
***12-152.** Una partícula P se desplaza a lo largo de una trayectoria elíptica en espiral, de modo que su vector de posición $\mathbf{r}$ está definido por $\mathbf{r} = \{2\cos(0.1t)\mathbf{i} + 1.5\ \text{sen}(0.1t)\ \mathbf{j} + (2t)\mathbf{k}\}$ m, donde t se da en segundos y los argumentos para el seno y el coseno se dan en radianes. Cuando $t = 8$ s, determine los ángulos directores coordenados α, β y γ, que forma el eje binormal al plano osculador con los ejes x, y y z. *Sugerencia:* Despeje la velocidad $\mathbf{v}_P$ y la aceleración $\mathbf{a}_P$ de la partícula en términos de sus componentes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. El eje binormal es paralelo a $\mathbf{v}_P \times \mathbf{a}_P$. ¿Por qué?



Prob. 12-152

12-153. El movimiento de una partícula está definido por las ecuaciones $x = (2t + t^2)$ m y $y = (t^2)$ m, donde t se da en segundos. Determine las componentes normal y tangencial de la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = 2$ s.

12-154. Si la rapidez del embalaje en A es 15 ft/s, la cual aumenta a razón de $\dot{v} = 3\ \text{ft/s}^2$, determine la magnitud de la aceleración del embalaje en ese instante.



Prob. 12-154

12.8 Movimiento curvilíneo: componentes cilíndricas

En ocasiones el movimiento de una partícula se limita a una trayectoria que se describe mejor usando coordenadas cilíndricas. Si el movimiento se limita al plano, entonces se utilizan coordenadas polares.

Coordenadas polares. Podemos especificar la ubicación de la partícula de la figura 12-30*a* mediante una *coordenada radial* r, la cual se extiende hacia fuera del origen fijo O hasta la partícula y una *coordenada transversal* θ, la cual es el ángulo en sentido antihorario entre una línea de referencia fija y el eje r. El ángulo en general se mide en grados o radianes, donde 1 rad $= 180°/\pi$. Los vectores unitarios $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\theta$ definen las direcciones positivas de las coordenadas r y θ, respectivamente. En este caso, $\mathbf{u}_r$ está en la dirección de r creciente cuando θ se mantiene fija y $\mathbf{u}_\theta$ está en la dirección de θ creciente cuando r se mantiene fija. Observe que estas direcciones son perpendiculares entre sí.

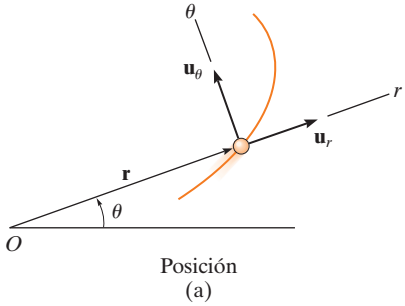
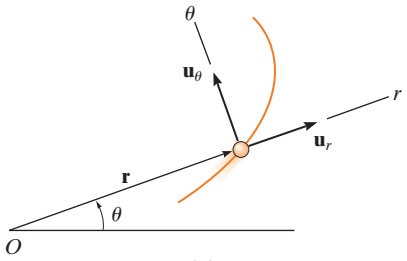
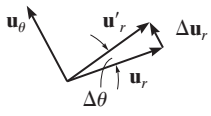


Fig. 12-30



Posición

(a)



(b)

Posición. En cualquier instante (fig. 12-30*a*), la posición de la partícula está definida por el vector de posición

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r \tag{12-22}$$

Velocidad. La velocidad instantánea $\mathbf{v}$ se obtiene al tomar la derivada con respecto al tiempo de $\mathbf{r}$. Usando un punto para representar la derivada con respecto al tiempo, tenemos

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\mathbf{u}}_r$$

Para evaluar $\dot{\mathbf{u}}_r$, observe que $\mathbf{u}_r$ sólo cambia su dirección con respecto al tiempo ya que, por definición, la magnitud de este vector siempre es una unidad. Por consiguiente, durante el tiempo Δt, un cambio de Δr no cambiará la dirección de $\mathbf{u}_r$; no obstante, un cambio $\Delta\theta$ hará que $\mathbf{u}_r$ cambie a $\mathbf{u}'_r$, donde $\mathbf{u}'_r = \mathbf{u}_r + \Delta\mathbf{u}_r$ (fig. 12-30*b*). El cambio con respecto al tiempo de $\mathbf{u}_r$ es, por lo tanto, $\Delta\mathbf{u}_r$. Para ángulos pequeños $\Delta\theta$ la magnitud de este vector es $\Delta u_r \approx 1\,(\Delta\theta)$ y actúa en la dirección $\mathbf{u}_\theta$. Por consiguiente, $\Delta\mathbf{u}_r = \Delta\theta\mathbf{u}_\theta$, y entonces

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{u}_r}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)\mathbf{u}_\theta$$

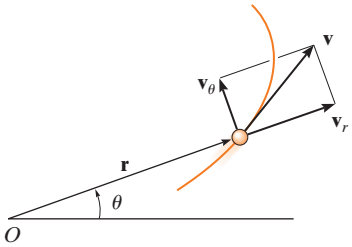
$$\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \tag{12-23}$$

Al sustituir en la ecuación anterior, la velocidad se escribe en términos de sus componentes como

$$\boxed{\mathbf{v} = v_r\mathbf{u}_r + v_\theta\mathbf{u}_\theta} \tag{12-24}$$

donde

$$\boxed{\begin{aligned} v_r &= \dot{r} \\ v_\theta &= r\dot{\theta} \end{aligned}} \tag{12-25}$$



Velocidad

(c)

Fig. 12-30 (cont.)

Estas componentes se muestran gráficamente en la figura 12-30*c*. La *componente radial* $\mathbf{v}_r$ mide la tasa de incremento o decremento de la longitud de la coordenada radial, es decir, $\dot{r}$; en tanto que la *componente transversal* $\mathbf{v}_\theta$ se interpreta como la tasa de movimiento a lo largo de la circunferencia de un círculo de radio r. En particular, el término $\dot{\theta} = d\theta/dt$ se conoce como *velocidad angular*, ya que indica la razón de cambio del ángulo θ con respecto al tiempo. La unidad más utilizada para esta cantidad es rad/s.

Como $\mathbf{v}_r$ y $\mathbf{v}_\theta$ son mutuamente perpendiculares, la *magnitud* de la velocidad o rapidez es simplemente el valor positivo de

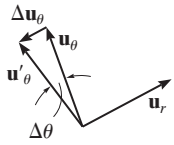
$$v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2} \tag{12-26}$$

y la *dirección* de $\mathbf{v}$ es, desde luego, tangente a la trayectoria (fig. 12-30*c*).

Aceleración. Si tomamos las derivadas con respecto al tiempo de la ecuación 12-24 y utilizamos las ecuaciones 12-25, obtenemos la aceleración instantánea de la partícula.

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r}\mathbf{u}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{u}}_\theta$$

Para evaluar $\dot{\mathbf{u}}_\theta$, lo único que se requiere es determinar el cambio de la dirección de $\mathbf{u}_\theta$ puesto que su magnitud siempre es la unidad. Durante el tiempo Δt, un cambio Δr no cambiará la dirección de $\mathbf{u}_\theta$; no obstante, un cambio $\Delta\theta$ hará que $\mathbf{u}_\theta$ se convierta en $\mathbf{u}'_\theta$, donde $\mathbf{u}'_\theta$, donde $\mathbf{u}'_\theta = \mathbf{u}_\theta + \Delta\mathbf{u}_\theta$, (fig. 12-30*d*). El cambio de $\mathbf{u}_q$ con el tiempo es entonces $\Delta\mathbf{u}_\theta$. Para ángulos pequeños, la magnitud de este vector es $\Delta u_\theta \approx 1(\Delta\theta)$ y actúa en la dirección $-\mathbf{u}_r$, es decir $\Delta\mathbf{u}_\theta = -\Delta\theta_r$. Por lo tanto,



(d)

$$\dot{\mathbf{u}}_\theta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{u}_\theta}{\Delta t} = -\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)\mathbf{u}_r$$

$$\dot{\mathbf{u}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{u}_\mathbf{r} \qquad (12\text{-}27)$$

Si sustituimos este resultado y la ecuación 12-23 en la ecuación anterior para $\mathbf{a}$, escribimos la aceleración en términos de sus componentes como

$$\boxed{\mathbf{a} = a_r\mathbf{u}_r + a_\theta\mathbf{u}_\theta} \qquad (12\text{-}28)$$

donde

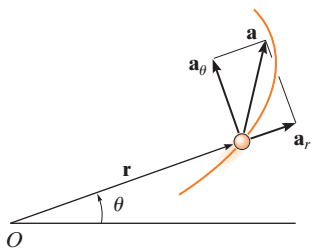
$$\boxed{\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{aligned}} \qquad (12\text{-}29)$$

El término $\ddot{\theta} = d^2\theta/dt^2 = d/dt(d\theta/dt)$ se conoce como *aceleración angular* puesto que mide el cambio de la velocidad angular durante un instante de tiempo. Las unidades de esta cantidad son rad/s^2.

Como $\mathbf{a}_r$ y $\mathbf{a}_\theta$ son siempre perpendiculares, la *magnitud* de la aceleración es simplemente el valor positivo de

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2} \qquad (12\text{-}30)$$

La *dirección* se determina mediante la suma vectorial de sus dos componentes. En general, $\mathbf{a}$ *no será* tangente a la trayectoria (fig. 12-30*e*).



Aceleración

(e)

Fig. 12-30 (cont.)

12

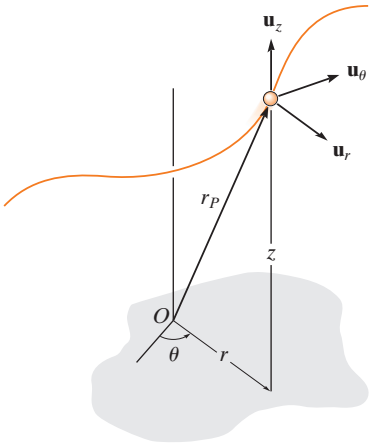


Fig. 12-31

Coordenadas cilíndricas.

Si la partícula se mueve a lo largo de una curva espacial, como se muestra en la figura 12-31, entonces su ubicación se especifica por medio de las tres *coordenadas cilíndricas*, r, θ, z. La coordenada z es idéntica a la que se utilizó para coordenadas rectangulares. Como el vector unitario que define su dirección, $\mathbf{u}_z$, es constante, las derivadas con respecto al tiempo de este vector son cero y, por consiguiente, la posición, velocidad y aceleración de la partícula se escriben en función de sus coordenadas cilíndricas como sigue:

$$\mathbf{r}_P = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{u}_z \tag{12-31}$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{u}_z \tag{12-32}$$

Derivadas con respecto al tiempo.

Las ecuaciones anteriores requieren que obtengamos las derivadas con respecto al tiempo $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$, y $\ddot{\theta}$ para evaluar las componentes r y θ de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$. En general, se presentan dos tipos de problemas:

1. Si las coordenadas polares se especifican como ecuaciones paramétricas en función del tiempo, $r = r(t)$ y $\theta = \theta(t)$, entonces las derivadas con respecto al tiempo pueden calcularse directamente.
2. Si no se dan las ecuaciones paramétricas en función del tiempo, entonces debe conocerse la trayectoria $r = f(\theta)$. Si utilizamos la regla de la cadena del cálculo, encontraremos entonces la relación entre $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$, y entre $\ddot{r}$ y $\ddot{\theta}$. En el apéndice C se explica la aplicación de la regla de la cadena, junto con algunos ejemplos.

El movimiento helicoidal de esta niña puede seguirse por medio de las componentes cilíndricas. En este caso, la coordenada radial r es constante, la coordenada transversal θ se incrementa con el tiempo a medida que la niña gira alrededor de la vertical y su altitud z se reduce con el tiempo. (© R. C. Hibbeler)

Procedimiento para el análisis

Sistema de coordenadas

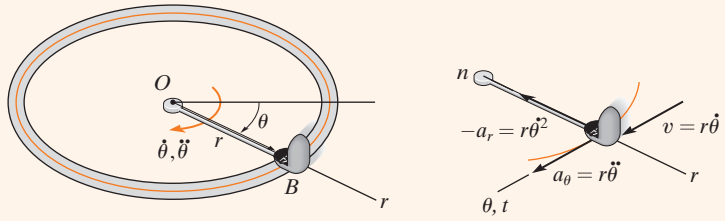
- Las coordenadas polares son una opción adecuada para resolver problemas cuando los datos del movimiento angular de la coordenada radial r se proporcionan para describir el movimiento de la partícula. Asimismo, algunas trayectorias del movimiento pueden describirse de forma conveniente en función de estas coordenadas.
- Para utilizar coordenadas polares, el origen se establece en un punto fijo y la línea radial r se dirige hacia la partícula.
- La coordenada transversal θ se mide desde una línea de referencia fija hasta la línea radial.

Velocidad y aceleración

- Con r y las cuatro derivadas con respecto al tiempo $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$, y $\ddot{\theta}$ evaluadas en el instante considerado, sus valores se sustituyen en las ecuaciones 12-25 y 12-29 para obtener las componentes radial y transversal de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$.
- Si es necesario tomar las derivadas con respecto al tiempo de $r = f(\theta)$, entonces debe utilizarse la regla de la cadena. Vea el apéndice C.
- El movimiento en tres dimensiones requiere una extensión simple del procedimiento anterior para incluir $\dot{z}$ y $\ddot{z}$.

EJEMPLO 12.17

El juego mecánico que se muestra en la figura 12-32*a* consiste en una silla que gira en una trayectoria circular horizontal de radio r, de modo que la velocidad angular y la aceleración angular del brazo OB son $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$, respectivamente. Determine las componentes radial y transversal de la velocidad y aceleración del pasajero; desprecie su tamaño en el cálculo.



(a) (b)

Fig. 12-32

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. Como se conoce el movimiento angular del brazo, se eligen coordenadas polares para la solución (fig. 12-32*a*). En este caso, θ no se relaciona con r, ya que el radio es constante para todos los ángulos θ.

Velocidad y aceleración. Primero es necesario especificar la primera y la segunda derivadas con respecto al tiempo de r y θ. Como r es *constante*, entonces

$$r = r \qquad \dot{r} = 0 \qquad \ddot{r} = 0$$

Por lo tanto,

$$v_r = \dot{r} = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \qquad \textit{Resp.}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -r\dot{\theta}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = r\ddot{\theta} \qquad \textit{Resp.}$$

Estos resultados se muestran en la figura 12-32*b*.

NOTA: Los ejes n, t también se muestran en la figura 12-32*b* que, en este caso especial de movimiento circular, son *colineales* con los ejes r y θ, respectivamente. Como $v = v_\theta = v_t = r\dot{\theta}$, entonces por comparación,

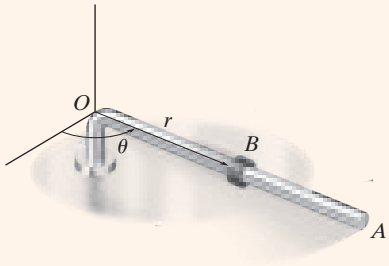
$$-a_r = a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(r\dot{\theta})^2}{r} = r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}) = \frac{dr}{dt}\dot{\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0 + r\ddot{\theta}$$

12

EJEMPLO 12.18

La varilla OA en la figura 12-33*a* gira en el plano horizontal de modo que $\theta = (t^3)$ rad. Al mismo tiempo, el collar B se desliza hacia fuera a lo largo de OA de modo que $r = (100t^2)$ mm. Si en ambos casos t está en segundos, determine la velocidad y aceleración del collar cuando $t = 1$ s.



(a)

SOLUCIÓN

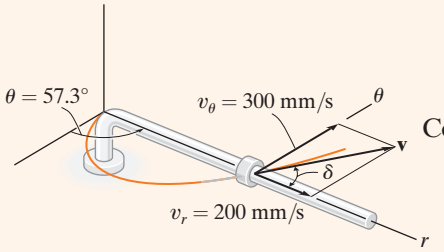
Sistema de coordenadas. Como se dan las ecuaciones paramétricas en función del tiempo de la trayectoria, no es necesario relacionar r con θ.

Velocidad y aceleración. Si determinamos las derivadas con respecto al tiempo y las evaluamos cuando $t = 1$ s, tenemos

$$r = 100t^2\Big|_{t=1\text{ s}} = 100\text{ mm} \quad \theta = t^3\Big|_{t=1\text{ s}} = 1\text{ rad} = 57.3^\circ$$

$$\dot{r} = 200t\Big|_{t=1\text{ s}} = 200\text{ mm/s} \quad \dot{\theta} = 3t^2\Big|_{t=1\text{ s}} = 3\text{ rad/s}$$

$$\ddot{r} = 200\Big|_{t=1\text{ s}} = 200\text{ mm/s}^2 \quad \ddot{\theta} = 6t\Big|_{t=1\text{ s}} = 6\text{ rad/s}^2.$$



(b)

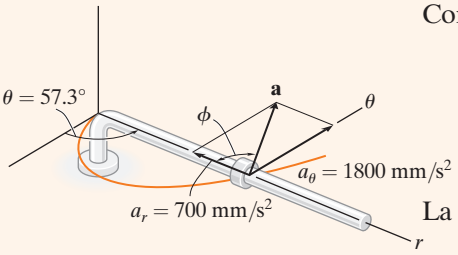
Como se muestra en la figura 12-33*b*,

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$
$$= 200\mathbf{u}_r + 100(3)\mathbf{u}_\theta = \{200\mathbf{u}_r + 300\mathbf{u}_\theta\}\text{ mm/s}$$

La magnitud de $\mathbf{v}$ es

$$v = \sqrt{(200)^2 + (300)^2} = 361\text{ mm/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{300}{200}\right) = 56.3^\circ \quad \delta + 57.3^\circ = 114^\circ \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

Fig. 12-33

Como se muestra en la figura 12-33*c*,

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta$$
$$= [200 - 100(3)^2]\mathbf{u}_r + [100(6) + 2(200)3]\mathbf{u}_\theta$$
$$= \{-700\mathbf{u}_r + 1800\mathbf{u}_\theta\}\text{ mm/s}^2$$

La magnitud de $\mathbf{a}$ es

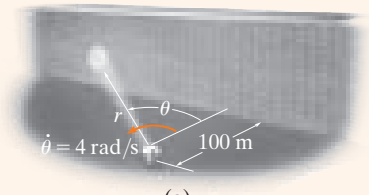
$$a = \sqrt{(-700)^2 + (1800)^2} = 1930\text{ mm/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1800}{700}\right) = 68.7^\circ \quad (180^\circ - \phi) + 57.3^\circ = 169^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: La velocidad es tangente a la trayectoria; sin embargo, la aceleración está dirigida hacia dentro de la curvatura de la trayectoria, como se esperaba.

EJEMPLO 12.19

El faro reflector en la figura 12-34*a* emite un rayo de luz a lo largo de un muro situado a 100 m del faro. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración, a las cuales el rayo de luz parece viajar a través del muro en el instante $\theta = 45°$. El faro reflector gira a una velocidad constante de $\dot{\theta} = 4$ rad/s.



(a)

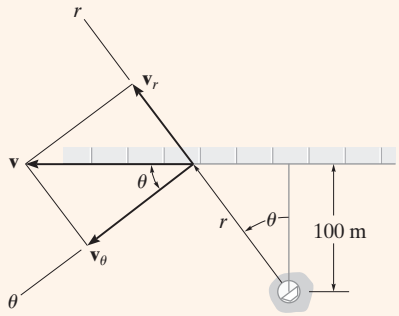
SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. Se utilizarán coordenadas polares para resolver este problema, ya que se proporciona la velocidad angular del faro. Para determinar las derivadas con respecto al tiempo necesarias, primero se tiene que relacionar r con θ. De acuerdo con la figura 12-34*a*,

$$r = 100/\cos\theta = 100 \sec\theta$$

Velocidad y aceleración. Al utilizar la regla de la cadena del cálculo y puesto que $d(\sec\theta) = \sec\theta \tan\theta\, d\theta$ y $d(\tan\theta) = \sec^2\theta\, d\theta$,

$$\begin{aligned}\dot{r} &= 100(\sec\theta\tan\theta)\dot{\theta}\\ \ddot{r} &= 100(\sec\theta\tan\theta)\dot{\theta}(\tan\theta)\dot{\theta} + 100\sec\theta(\sec^2\theta)\dot{\theta}(\dot{\theta})\\ &\quad + 100\sec\theta\tan\theta(\ddot{\theta})\\ &= 100\sec\theta\tan^2\theta\,(\dot{\theta})^2 + 100\sec^3\theta\,(\dot{\theta})^2 + 100(\sec\theta\tan\theta)\ddot{\theta}\end{aligned}$$



(b)

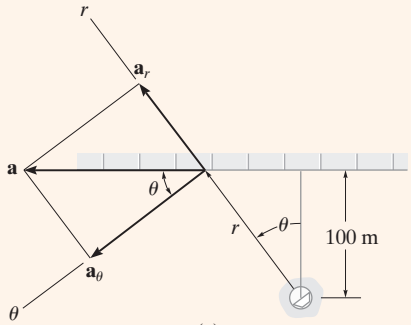
Como $\dot{\theta} = 4$ rad/s = constante, entonces $\ddot{\theta} = 0$, y las ecuaciones anteriores, cuando $\theta = 45°$, se convierten en

$$\begin{aligned}r &= 100\sec 45° = 141.4\\ \dot{r} &= 400\sec 45°\tan 45° = 565.7\\ \ddot{r} &= 1600\,(\sec 45°\tan^2 45° + \sec^3 45°) = 6788.2\end{aligned}$$

Como se muestra en la figura 12-34*b*,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta\\ &= 565.7\mathbf{u}_r + 141.4(4)\mathbf{u}_\theta\\ &= \{565.7\mathbf{u}_r + 565.7\mathbf{u}_\theta\}\ \text{m/s}\\ v &= \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{(565.7)^2 + (565.7)^2}\\ &= 800\ \text{m/s}\end{aligned}$$

Resp.

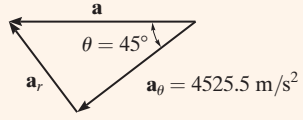


(c)

Como se muestra en la figura 12-34*c*,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta\\ &= [6788.2 - 141.4(4)^2]\mathbf{u}_r + [141.4(0) + 2(565.7)4]\mathbf{u}_\theta\\ &= \{4525.5\mathbf{u}_r + 4525.5\mathbf{u}_\theta\}\ \text{m/s}^2\\ a &= \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(4525.5)^2 + (4525.5)^2}\\ &= 6400\ \text{m/s}^2\end{aligned}$$

Resp.

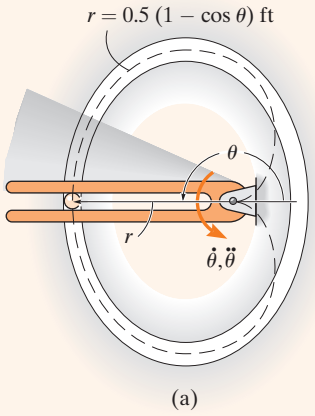


(d)

Fig. 12-34

NOTA: También es posible determinar a sin tener que calcular $\ddot{r}$ (o a_r). Como se muestra en la figura 12-34*d*, dado que $a_\theta = 4525.5$ m/s^2, entonces, de acuerdo con la resolución del vector, $a = 4525.5/\cos 45° = 6400$ m/s^2.

EJEMPLO 12.20



(a)

Debido a la rotación de la varilla con forma de horquilla, la bola en la figura 12-35*a* se mueve alrededor de una trayectoria ranurada, una parte de la cual tiene la forma de un cardioide, $r = 0.5(1 - \cos\theta)$ ft, donde θ está en radianes. Si la velocidad de la bola es $v = 4$ ft/s y su aceleración es $a = 30$ ft/s^2 en el instante $\theta = 180°$, determine la velocidad angular $\dot{\theta}$ y la aceleración angular $\ddot{\theta}$ de la horquilla.

SOLUCIÓN

Sistema de coordenadas. Esta trayectoria es muy rara, y matemáticamente se expresa mejor por medio de coordenadas polares, como se hace aquí, en vez de coordenadas rectangulares. Asimismo, como deben determinarse $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$, entonces las coordenadas r, θ son una opción evidente.

Velocidad y aceleración. Las derivadas con respecto al tiempo de r y θ se determinan con la regla de la cadena,

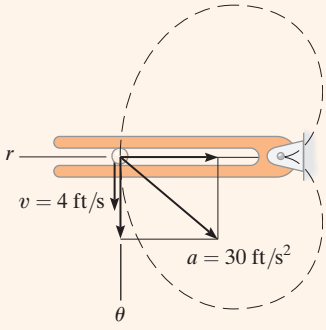
$$r = 0.5(1 - \cos\theta)$$
$$\dot{r} = 0.5(\text{sen}\,\theta)\dot{\theta}$$
$$\ddot{r} = 0.5(\cos\theta)\dot{\theta}(\dot{\theta}) + 0.5(\text{sen}\,\theta)\ddot{\theta}$$

Si evaluamos estos resultados cuando $\theta = 180°$, tenemos

$$r = 1 \text{ ft} \qquad \dot{r} = 0 \qquad \ddot{r} = -0.5\dot{\theta}^2$$

Como $v = 4$ ft/s, al utilizar la ecuación 12-26 para determinar θ se obtiene

$$v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$$
$$4 = \sqrt{(0)^2 + (1\dot{\theta})^2}$$
$$\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Fig. 12-35

Del mismo modo, $\ddot{\theta}$ se determina con la ecuación 12-30,

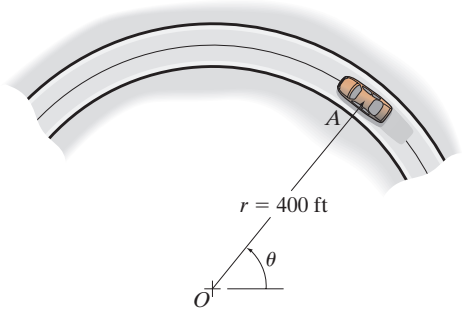
$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2}$$
$$30 = \sqrt{[-0.5(4)^2 - 1(4)^2]^2 + [1\ddot{\theta} + 2(0)(4)]^2}$$
$$(30)^2 = (-24)^2 + \ddot{\theta}^2$$
$$\ddot{\theta} = 18 \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

En la figura 12-35*b* se muestran los vectores **a** y **v.**

NOTA: En esta ubicación, coinciden los ejes θ y t (tangenciales). El eje $+n$ (normal) está dirigido hacia la derecha, es opuesto a $+r$.

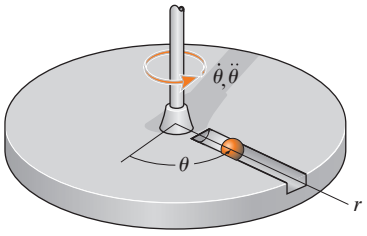
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F12-33. La rapidez del automóvil es de 55 ft/s. Determine la velocidad angular $\dot{\theta}$ de la línea radial OA en este instante.



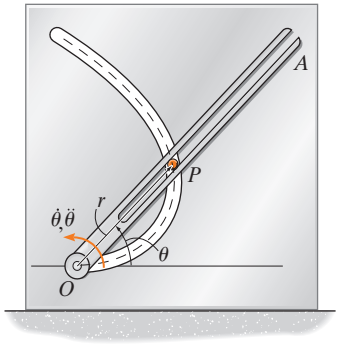
Prob. F12-33

F12-34. La plataforma gira en torno al eje vertical, de modo que en cualquier instante su posición angular es $\theta = (4t^{3/2})$ rad, donde t está en segundos. Una bola rueda hacia fuera a lo largo de la ranura radial, de modo que su posición es $r = (0.1t^3)$ m, donde t está en segundos. Determine las magnitudes de la velocidad y aceleración de la bola cuando $t = 1.5$ s.



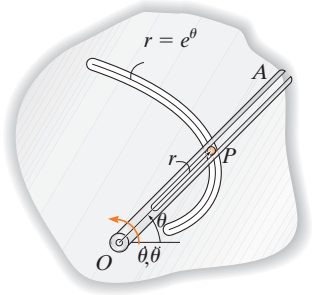
Prob. F12-34

F12-35. El perno guía P es propulsado por el eslabón con forma de horquilla OA a lo largo de la trayectoria curva descrita por $r = (2\theta)$ ft. En el instante $\theta = \pi/4$ rad, la velocidad y la aceleración angulares del eslabón son $\dot{\theta} = 3$ rad/s y $\ddot{\theta} = 1$ rad/s^2. Determine la magnitud de la aceleración del perno guía en este instante.



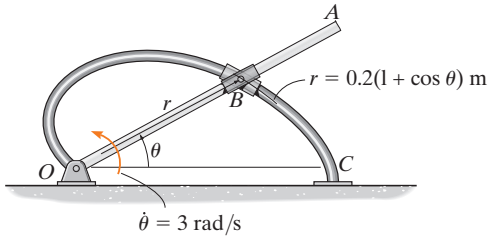
Prob. F12-35

F12-36. El perno guía P es propulsado por el eslabón con forma de horquilla OA a lo largo de la trayectoria descrita por $r = e^{\theta}$, donde r se da en metros. Cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad, la velocidad y aceleración angulares del eslabón son $\dot{\theta} = 2$ rad/s y $\ddot{\theta} = 4$ rad/s^2. Determine las componentes radial y transversal de la aceleración del perno guía en este instante.



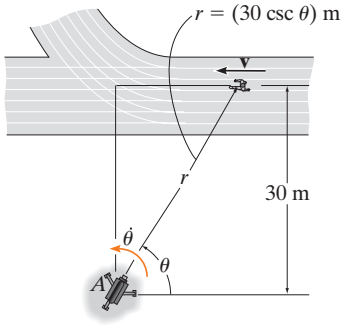
Prob. F12-36

F12-37. Los collares están conectados por pasadores en B y pueden moverse libremente a lo largo de la varilla OA y la guía curva OC tiene la forma de un cardioide, $r = [0.2(1 + \cos\theta)]$ m. Cuando $\theta = 30°$, la velocidad angular de OA es $\dot{\theta} = 3$ rad/s. Determine las magnitudes de la velocidad de los collares en este punto.



Prob. F12-37

F12-38. En el instante $\theta = 45°$, el atleta está corriendo a una rapidez constante de 2 m/s. Determine la velocidad angular a la cual la cámara debe girar para seguir el movimiento.



Prob. F12-38

12

PROBLEMAS

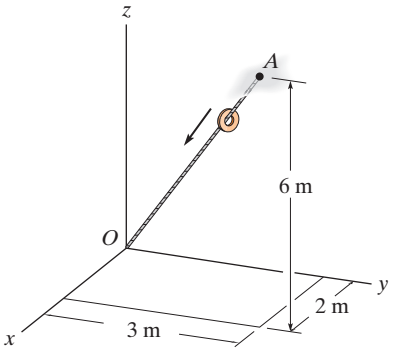
12-155. Una partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria circular de 4 in de radio, de modo que su posición en función del tiempo está dada por $\theta = \cos 2t$, donde θ está en radianes y t en segundos. Determine la magnitud de la aceleración de la partícula cuando $\theta = 30°$.

***12-156.** Por un corto tiempo un cohete se desplaza hacia arriba y a la derecha con una rapidez constante de 800 m/s a lo largo de la trayectoria parabólica $y = 600 - 35x^2$. Determine las componentes radial y transversal de la velocidad del cohete en el instante $\theta = 60°$, donde θ se mide en sentido antihorario desde el eje x.

12-157. Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria definida por las coordenadas polares $r = (2e^t)$ ft y $\theta = (8t^2)$ rad, donde t se da en segundos. Determine las componentes de su velocidad y aceleración cuando $t = 1$ s.

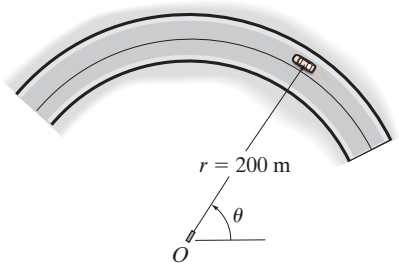
12-158. Un avión vuela en línea recta con una velocidad de 200 mi/h y una aceleración de 3 mi/h^2. Si el diámetro de la hélice es de 6 ft y gira a una velocidad angular constante de 120 rad/s, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de una partícula situada en la punta de la hélice.

12-159. La pequeña arandela se desliza hacia abajo de la cuerda OA. Cuando está a la mitad, su rapidez es de 28 m/s y su aceleración es de 7 m/s^2. Exprese la velocidad y la aceleración de la arandela en este punto en función de sus componentes cilíndricas.



Prob. 12-159

***12-160.** Una pistola de radar en O gira con la velocidad angular $\dot{\theta} = 0.1$ rad/s y la aceleración angular $\ddot{\theta} = 0.025$ rad/s^2, en el instante $\theta = 45°$, mientras sigue el movimiento del automóvil que viaja a lo largo del camino circular que tiene un radio de $r = 200$ m. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del auto en ese instante.



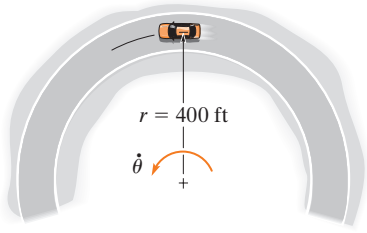
Prob. 12-160

12-161. Si una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria tal que $r = (2 \cos t)$ ft y $\theta = (t/2)$ rad, donde t se da en segundos, grafique la trayectoria $r = f(\theta)$ y determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración de la partícula.

12-162. Si una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria tal que $r = (e^{at})$ m y $\theta = t$, donde t se da en segundos, grafique la trayectoria $r = f(\theta)$, y determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración de la partícula.

12-163. El automóvil viaja a lo largo de la trayectoria circular de radio $r = 400$ ft. En el instante mostrado, su velocidad angular de rotación es $\dot{\theta} = 0.025$ rad/s, la cual disminuye a razón de $\ddot{\theta} = -0.008$ rad/s^2. Determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración del automóvil en ese instante; asimismo, grafique estas componentes sobre la curva.

***12-164.** El automóvil viaja a lo largo de la trayectoria circular de radio $r = 400$ ft con una rapidez constante de $v = 30$ ft/s. Determine la velocidad angular de rotación $\dot{\theta}$ de la línea radial r y la magnitud de la aceleración del auto.

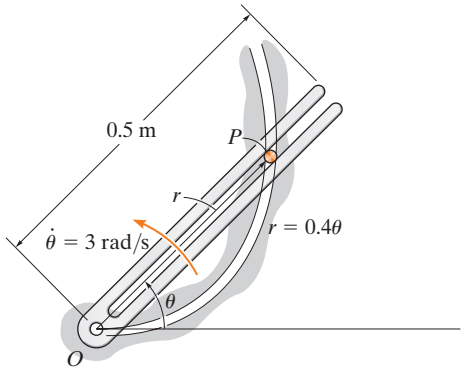


Probs. 12-163/164

12-165. La razón de cambio de la aceleración con respecto del tiempo se conoce como *tirón*, y se utiliza a menudo como un medio para medir la incomodidad de los pasajeros. Calcule este vector, $\dot{\mathbf{a}}$, en términos de sus componentes cilíndricas, utilizando la ecuación 12-32.

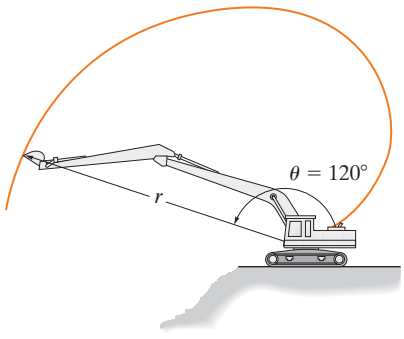
12-166. Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria circular que tiene un radio de 6 in, de modo que su posición en función del tiempo está dada por $\theta = \text{sen}\, 3t$, donde θ y el argumento para el seno están en radianes, y t en segundos. Determine la magnitud de la aceleración de la partícula en $\theta = 30°$. La partícula parte del reposo en $\theta = 0°$.

12-167. El eslabón ranurado está articulado en O, y como resultado de la velocidad angular constante $\dot{\theta} = 3$ rad/s impulsa el perno guía P por una corta distancia a lo largo de la guía en espiral $r = (0.4\,\theta)$ m, donde θ se da en radianes. Determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración de P en el instante $\theta = \pi/3$ rad.



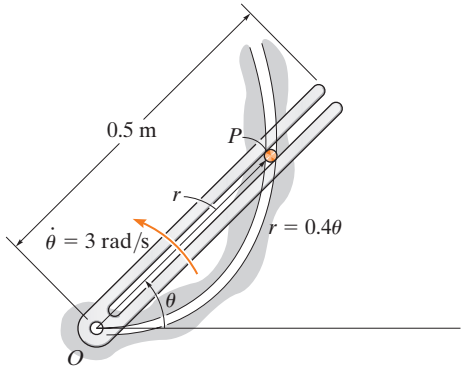
Prob. 12-167

***12-168.** Por un corto tiempo el cucharón de la retroexcavadora traza la trayectoria de la cardioide $r = 25(1 - \cos\theta)$ ft. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del cucharón cuando $\theta = 120°$, si el brazo extensible gira con una velocidad angular de $\dot{\theta} = 2$ rad/s y una aceleración angular $\ddot{\theta} = 0.2$ rad/s^2 en el instante mostrado.



Prob. 12-168

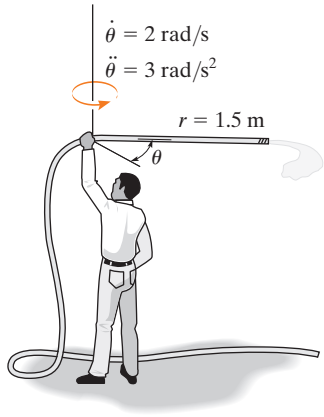
12-169. El eslabón ranurado está articulado en O, y como resultado de la velocidad angular constante $\dot{\theta} = 3$ rad/s impulsa el perno guía P por una corta distancia a lo largo de la guía en espiral $r = (0.4\,\theta)$ m, donde θ se da en radianes. Determine la velocidad y la aceleración de la partícula en el instante en que sale de la ranura del eslabón, es decir, cuando $r = 0.5$ m.



Prob. 12-169

12-170. Una partícula se mueve en el plano x-y de modo que su posición está definida por $r = \{2t\mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j}\}$ ft, donde t está en segundos. Determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = 2$ s.

12-171. En el instante mostrado, el hombre gira una manguera por encima de su cabeza con una velocidad angular $\dot{\theta} = 2$ rad/s y una aceleración angular $\ddot{\theta} = 3$ rad/s^2. Si se supone que la manguera se encuentra en un plano horizontal, y el agua fluye por ella a una velocidad constante de 3 m/s, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de una partícula de agua cuando sale del extremo abierto, $r = 1.5$ m.

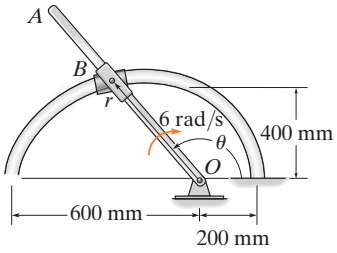


Prob. 12-171

12

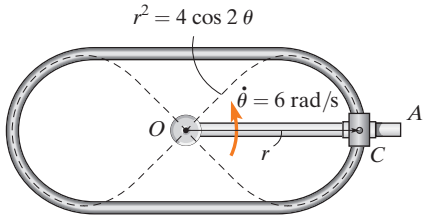
***12-172.** La varilla OA gira en sentido horario con una velocidad angular constante de 6 rad/s. Dos bloques deslizantes conectados mediante pasadores, ubicados en B, se mueven libremente sobre OA y la varilla curva cuya forma es un *limaçon* de Pascal descrito por la ecuación $r = 200(2 - \cos\theta)$ mm. Determine la rapidez de los bloques deslizantes en el instante $\theta = 150°$.

12-173. Determine la magnitud de la aceleración de los bloques deslizantes del problema 12-172 cuando $\theta = 150°$.



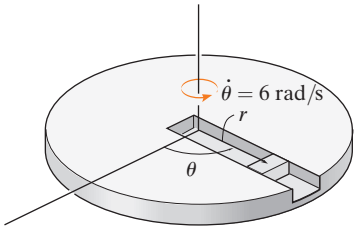
Probs. 12-172/173

12-174. Un collarín doble C está articulado de modo que un collarín se desliza sobre una varilla fija y el otro se desliza sobre una varilla giratoria. Si la geometría de la varilla fija por una corta distancia puede definirse mediante una lemniscata de Bernoulli, $r^2 = (4\cos 2\theta)$ ft^2, determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración del collarín en el instante $\theta = 0°$, como se muestra en la figura. La varilla OA gira a una velocidad angular constante de $\dot{\theta} = 6$ rad/s.



Prob. 12-174

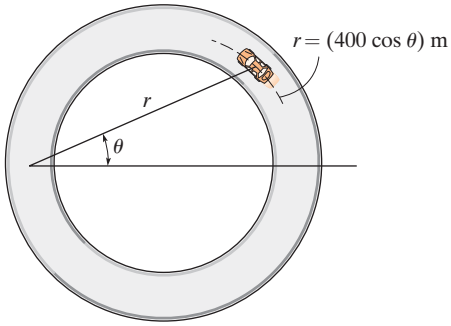
12-175. Un bloque se mueve hacia el exterior, a lo largo de la ranura de la plataforma, con una rapidez de $\dot{r} = (4t)$ m/s, donde t se da en segundos. La plataforma gira a una velocidad constante de 6 rad/s. Si el bloque parte del reposo en el centro, determine las magnitudes de su velocidad y la aceleración cuando $t = 1$ s.



Prob. 12-175

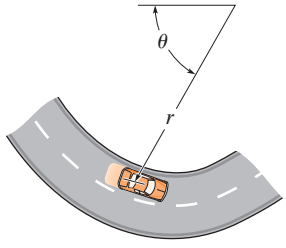
***12-176.** El automóvil viaja alrededor de la pista circular con una rapidez constante de 20 m/s. Determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración del auto en el instante $\theta = \pi/4$ rad.

12-177. El automóvil viaja alrededor de la pista circular de tal manera que su componente transversal es $\theta = (0.006t^2)$ rad, donde t se da en segundos. Determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración del auto en el instante $t = 4$ s.



Probs. 12-176/177

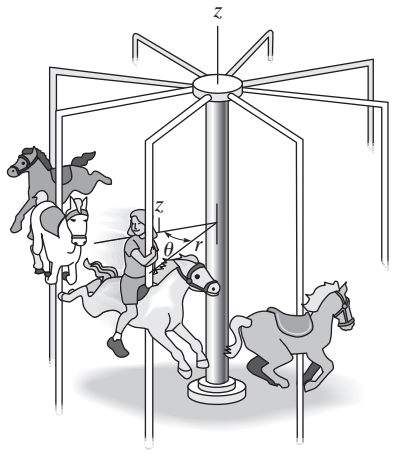
12-178. El automóvil se desplaza a lo largo de un camino que, para una distancia corta, está definido por $r = (200/\theta)$ ft, donde θ está en radianes. Si mantiene una rapidez constante de $v = 35$ ft/s, determine las componentes radial y transversal de su velocidad cuando $\theta = \pi/3$ rad.



Prob. 12-178

12-179. Un caballito de carrusel se mueve de acuerdo con las ecuaciones $r = 8$ ft, $\theta = (0.6t)$ rad y $z = (1.5 \text{ sen } \theta)$ ft, donde t se da en segundos. Determine las componentes cilíndricas de la velocidad y la aceleración del caballito cuando $t = 4$ s.

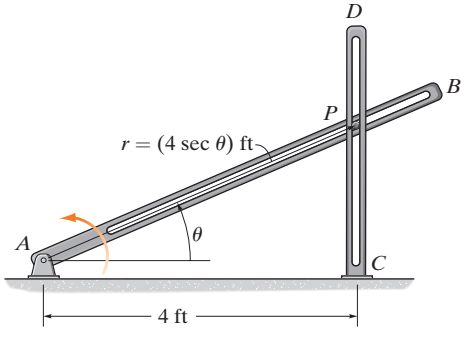
***12-180.** Un caballito de carrusel se mueve de acuerdo con las ecuaciones $r = 8$ ft, $\dot{\theta} = 2$ rad/s, y $z = (1.5 \text{ sen } \theta)$ ft, donde t se da en segundos. Determine las magnitudes máxima y mínima de la velocidad y la aceleración del caballito durante el movimiento.



Probs. 12-179/180

12-181. Si el brazo ranurado AB gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante de $\dot{\theta} = 2$ rad/s, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del perno guía P en $\theta = 30°$. El perno está restringido a moverse en las ranuras de la barra fija CD y la barra giratoria AB.

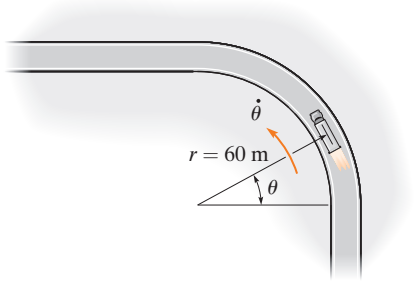
12-182. El perno guía está restringido a moverse en las ranuras de la barra fija CD y la barra giratoria AB. Cuando $\theta = 30°$, la velocidad angular y la aceleración angular del brazo AB son $\dot{\theta} = 2$ rad/s y $\ddot{\theta} = 3$ rad/s^2, respectivamente. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del perno guía P en ese instante.



Probs. 12-181/182

12-183. Un camión se desplaza a lo largo de la curva circular horizontal de radio $r = 60$ m con una rapidez constante $v = 20$ m/s. Determine la velocidad angular de rotación $\dot{\theta}$ de la línea radial r y la magnitud de la aceleración del camión.

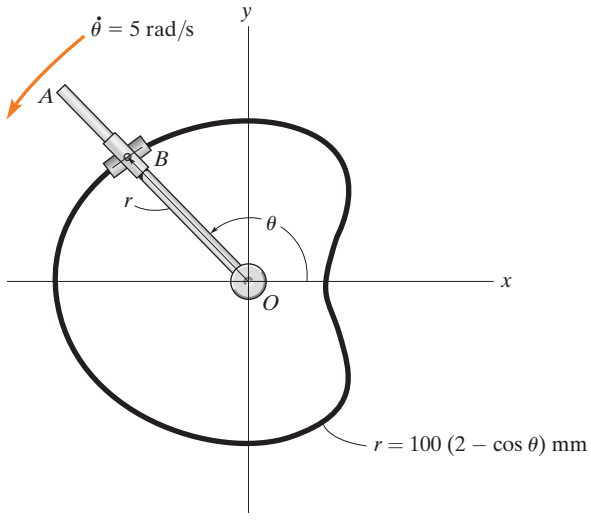
***12-184.** Un camión se desplaza a lo largo de la curva circular horizontal de radio $r = 60$ m con una rapidez de 20 m/s que aumenta a razón de 3 m/s^2. Determine las componentes radial y transversal de la aceleración del camión.



Probs. 12-183/184

12-185. La varilla OA gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante de $\dot{\theta} = 5$ rad/s. Dos bloques deslizantes articulados, que se ubican en B, se mueven libremente sobre OA y la varilla curva cuya forma es un *limaçon* de Pascal está descrita por la ecuación $r = 100(2 - \cos \theta)$ mm. Determine la rapidez de los bloques deslizantes en el instante $\theta = 120°$.

12-186. Determine la magnitud de la aceleración de los bloques deslizantes en el problema 12-185 cuando $\theta = 120°$.

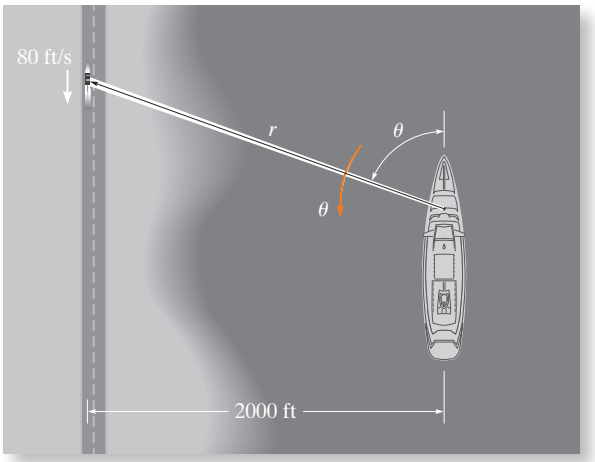


Probs. 12-185/186

12

12-187. La luz de búsqueda en el barco anclado a 2000 ft de la orilla ilumina un automóvil que viaja por la carretera recta con rapidez constante de 80 ft/s. Determine la velocidad angular de rotación de la luz cuando el automóvil está a $r = 3000$ ft del barco.

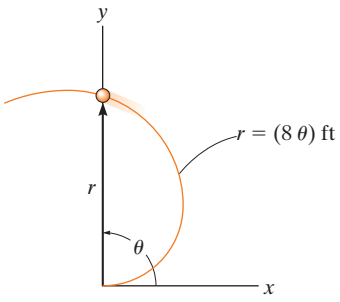
***12-188.** Si el automóvil del problema 12-187 está acelerando a 15 ft/s^2 en el instante $r = 3000$ ft, determine la aceleración angular requerida para la luz en ese instante.



Probs. 12-187/188

12-189. Una partícula se mueve a lo largo de una espiral de Arquímedes $r = (8\theta)$ ft, donde θ está en radianes. Si $\dot{\theta} = 4$ rad/s (constante), determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración de la partícula en el instante $\theta = \pi/2$ rad. Trace la curva y muestre las componentes en la curva.

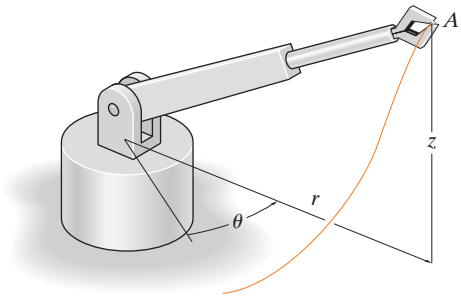
12-190. Resuelva el problema 12-189 si la aceleración angular de la partícula es $\ddot{\theta} = 5$ rad/s^2 cuando $\dot{\theta} = 4$ rad/s con $\theta = \pi/2$ rad.



Probs. 12-189/190

12-191. El brazo del robot se mueve de modo que $r = 3$ ft es constante y su tenaza en A se mueve a lo largo de la trayectoria $z = (3 \text{ sen } 4\theta)$ ft, donde θ está en radianes. Si $\theta = (0.5\,t)$ rad, donde t se da en segundos, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la tenaza cuando $t = 3$ s.

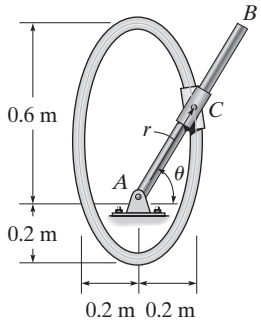
***12-192.** Durante un corto tiempo, el brazo del robot se extiende de modo que $\dot{r} = 1.5$ ft/s cuando $r = 3$ ft, $z = (4t^2)$ ft y $\theta = 0.5t$ rad, donde t se da en segundos. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la tenaza en A cuando $t = 3$ s.



Probs. 12-191/192

12-193. El collarín doble en C está articulado de modo que un collarín se desliza sobre la varilla fija y el otro se desliza sobre la varilla giratoria AB. Si la velocidad angular de AB está dada como $\dot{\theta} = (e^{0.5\,t^2})$ rad/s, donde t está en segundos, y la trayectoria definida por la varilla fija es $r = |(0.4 \text{ sen } \theta + 0.2)|$ m, determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración del collarín cuando $t = 1$ s. Cuando $t = 0, \theta = 0$. Use la regla de Simpson con $n = 50$ para determinar θ en $t = 1$ s.

12-194. El collarín doble en C está articulado de modo que un collarín se desliza sobre la varilla fija y el otro se desliza sobre la varilla giratoria AB. Si el mecanismo debe estar diseñado de modo que la máxima rapidez dada al collarín sea de 6 m/s, determine la velocidad angular constante $\dot{\theta}$ requerida para la varilla AB. La trayectoria definida por la varilla fija es $r = (0.4 \text{ sen } \theta + 0.2)$ m.



Probs. 12-193/194

12.9 Análisis del movimiento dependiente absoluto de dos partículas

En algunos tipos de problemas el movimiento de una partícula *dependerá* del movimiento correspondiente de otra partícula. Esta dependencia ocurre por lo común si las partículas, en este caso representadas por bloques, están interconectadas por medio de cuerdas no extensibles, las cuales están enrolladas alrededor de poleas. Por ejemplo, el movimiento de un bloque A hacia abajo del plano inclinado en la figura 12-36 provocará un movimiento correspondiente del bloque B hacia arriba del otro plano inclinado. Podemos demostrar esto matemáticamente si, primero, especificamos la ubicación de los bloques mediante *coordenadas de posición* s_A y s_B. Observe que cada uno de los ejes de coordenadas (1) está medido a partir de un *punto fijo* (O) o de una línea de referencia fija, (2) está medido a lo largo de cada plano inclinado *en la dirección del movimiento* de cada bloque, y (3) tiene un sentido positivo desde los planos de referencia fijos hacia A y hacia B. Si la longitud total de la cuerda es l_T, las dos coordenadas de posición están relacionadas por la ecuación

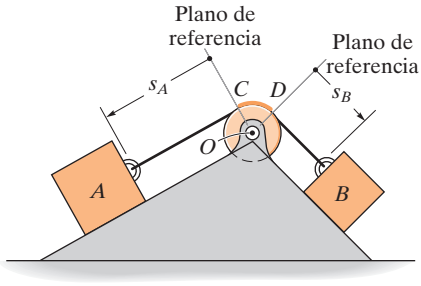


Fig. 12-36

$$s_A + l_{CD} + s_B = l_T$$

En este caso, l_{CD} es la longitud de la cuerda que pasa sobre el arco CD. Si tomamos la derivada con respecto al tiempo de esta expresión, y tenemos en cuenta que l_{CD} y l_T *permanecen constantes*, en tanto que s_A y s_B miden los segmentos de la cuerda que cambian de longitud, tenemos

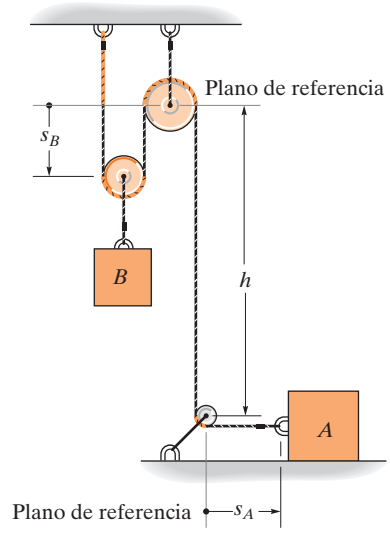
$$\frac{ds_A}{dt} + \frac{ds_B}{dt} = 0 \qquad \text{o} \qquad v_B = -v_A$$

El signo negativo indica que cuando el bloque A tiene una velocidad dirigida hacia abajo, es decir, en la dirección de s_A positiva, provoca una velocidad hacia arriba correspondiente del bloque B, es decir, B se mueve en la dirección s_B negativa.

Del mismo modo, la diferenciación con respecto al tiempo de las velocidades tiene como resultado la relación entre las aceleraciones, es decir,

$$a_B = -a_A$$

En la figura 12-37*a* se muestra un ejemplo más complicado. En este caso, s_A especifica la posición del bloque A, y s_B define la posición del *extremo* de la cuerda del cual está suspendido el bloque B. Como se hizo previamente, elegimos coordenadas de posición: (1) con su origen en puntos fijos o líneas de referencia, (2) medidas en la dirección del movimiento de cada bloque, y (3) desde los planos de referencia fijos son positivas a la derecha para s_A y positivas hacia abajo para s_B. Durante el movimiento, la longitud de los segmentos de color naranja de la cuerda en la figura 12-37*a* *permanecen constantes*. Si l representa la longitud total de la cuerda menos estos segmentos, entonces las coordenadas de posición pueden relacionarse usando la ecuación



(a)

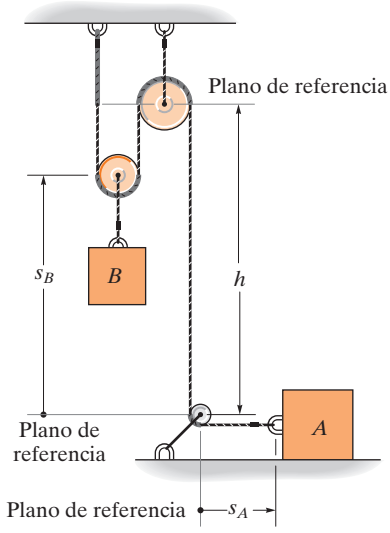
Fig. 12-37

$$2s_B + h + s_A = l$$

Como l y h permanecen constantes durante el movimiento, las dos derivadas con respecto al tiempo resultan

$$2v_B = -v_A \qquad 2a_B = -a_A$$

Por consiguiente, cuando B se mueve hacia abajo ($+s_B$), A lo hace a la izquierda ($-s_A$) con el doble del movimiento.



(b)

Fig. 12-37 (cont.)

Este ejemplo también se resuelve definiendo la posición del bloque B con respecto al centro de la polea inferior (un punto fijo) (fig. 12-37*b*). En este caso,

$$2(h - s_B) + h + s_A = l$$

La diferenciación con respecto al tiempo resulta

$$2v_B = v_A \qquad 2a_B = a_A$$

donde los signos son los mismos. ¿Por qué?

Procedimiento para el análisis

El método anterior de relacionar el movimiento dependiente de una partícula con el de otra puede realizarse con escalares algebraicos o coordenadas de posición, siempre que cada partícula se mueva en línea recta. Cuando éste es el caso, sólo cambiarán las magnitudes de la velocidad y aceleración de las partículas, pero no su línea de dirección.

Ecuación de coordenada de posición

- Establezca cada coordenada de posición con un origen ubicado en un punto *fijo* o plano de referencia.
- *No es necesario* que el *origen* sea el *mismo* para cada una de las coordenadas; sin embargo, es *importante* que cada eje de coordenadas seleccionado esté dirigido a lo largo de la *trayectoria del movimiento* de la partícula.
- Mediante geometría o trigonometría, relacione las coordenadas de posición con la longitud total de la cuerda, l_T, o con la porción de la cuerda, l, la cual *excluye* los segmentos que no cambian de longitud a medida que las partículas se mueven, como los segmentos de arco enrollados sobre las poleas.
- Si un problema implica un *sistema* de dos o más cuerdas enrolladas alrededor de las poleas, entonces la posición de un punto en una cuerda debe relacionarse con la posición de un punto en otra cuerda mediante el procedimiento anterior. Se escriben ecuaciones distintas para una longitud fija de cada cuerda del sistema y las posiciones de las dos partículas se relacionan entonces usando estas ecuaciones (vea los ejemplos 12.22 y 12.23).

Derivadas con respecto al tiempo

- Dos derivadas con respecto al tiempo sucesivas de las ecuaciones de coordenadas de posición ofrecen como resultado las ecuaciones de velocidad y aceleración requeridas, las cuales relacionan los movimientos de las partículas.
- Los signos de los términos en estas ecuaciones serán consistentes con los que especifican el sentido positivo y negativo de las coordenadas de posición.

En esta grúa, el cable se enrolla alrededor de las poleas con la finalidad de reducir la fuerza necesaria para levantar una carga. (© R. C. Hibbeler)

EJEMPLO 12.21

Determine la rapidez del bloque A que se muestra en la figura 12-38, si el bloque B se mueve hacia arriba a una rapidez de 6 ft/s.

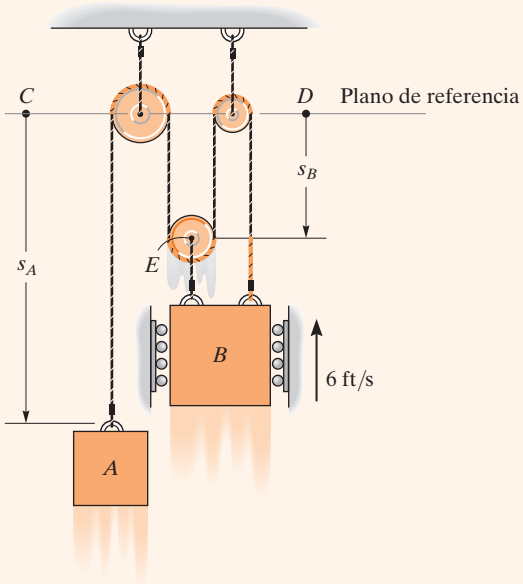


Fig. 12-38

SOLUCIÓN

Ecuación de coordenadas de posición. Hay *una cuerda* en este sistema que incluye segmentos que cambian de longitud. Se utilizarán coordenadas de posición s_A y s_B puesto que cada una se mide con respecto a un punto fijo (C o D) y se extiende a lo largo de la *trayectoria del movimiento* de cada bloque. En particular, s_B se dirige al punto E ya que el movimiento de B y E es el *mismo*.

Los segmentos de color naranja de la cuerda en la figura 12-38 permanecen a una longitud constante y no tienen que considerarse a medida que los bloques se mueven. La longitud de la cuerda restante, l, también es constante y está relacionada con las coordenadas de posición cambiantes s_A y s_B mediante la ecuación

$$s_A + 3s_B = l$$

Derivadas con respecto al tiempo. Al realizar la derivada con respecto al tiempo, se tiene

$$v_A + 3v_B = 0$$

de modo que cuando $v_B = -6$ ft/s (hacia arriba),

$$v_A = 18 \text{ ft/s} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

12

EJEMPLO 12.22

Determine la rapidez de A en la figura 12-39 si B tiene una rapidez hacia arriba de 6 ft/s.

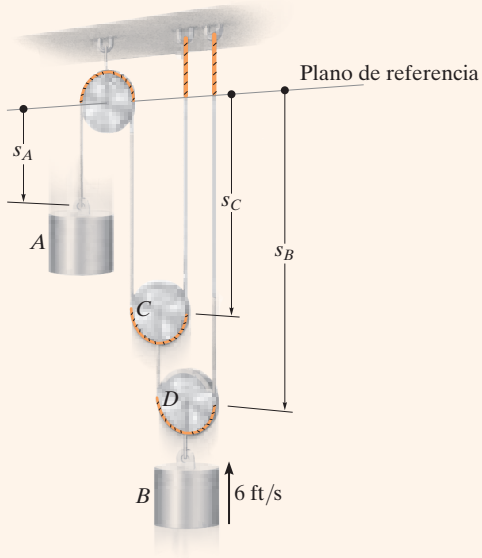


Fig. 12-39

SOLUCIÓN

Ecuación de coordenadas de posición. Como se muestra, s_A y s_B definen las posiciones de los bloques A y B. Como el sistema incluye *dos cuerdas* con segmentos que cambian de longitud, será necesario utilizar una tercera coordenada, s_C, para relacionar s_A con s_B. En otros términos, la longitud de una de las cuerdas puede expresarse en función de s_A y s_C y la longitud de la otra puede expresarse en función de s_B y s_C.

Los segmentos de color naranja de las cuerdas en la figura 12-39 no tienen que considerarse en el análisis. ¿Por qué? Para las longitudes de cuerdas restantes, por ejemplo l_1 y l_2, tenemos

$$s_A + 2s_C = l_1 \qquad s_B + (s_B - s_C) = l_2$$

Derivada con respecto al tiempo. Al tomar la derivada con respecto al tiempo de estas ecuaciones se obtiene

$$v_A + 2v_C = 0 \qquad 2v_B - v_C = 0$$

Si se elimina v_C se produce la relación entre el movimiento de cada cilindro.

$$v_A + 4v_B = 0$$

de modo que cuando $v_B = -6$ ft/s (hacia arriba),

$$v_A = +24 \text{ ft/s} = 24 \text{ ft/s} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 12.23

Determine la rapidez del bloque B en la figura 12-40, si el extremo de la cuerda en A se jala hacia abajo con una rapidez de 2 m/s.

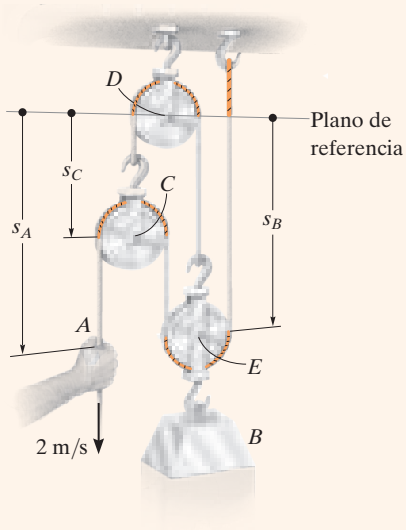


Fig. 12-40

SOLUCIÓN

Ecuación de coordenadas de posición. La coordenada s_A define la posición del punto A y s_B especifica la posición del bloque B, pues el punto E en la polea tendrá el *mismo movimiento* que el bloque. Ambas coordenadas se miden con respecto a un plano de referencia horizontal que pasa por el pasador *fijo* en la polea D. Como el sistema se compone de *dos* cuerdas, las coordenadas s_A y s_B no se pueden relacionar de forma directa. En cambio, si se establece una tercera coordenada de posición, s_C, ahora podemos expresar la longitud de una de las cuerdas en función de s_B y s_C y la longitud de la otra en función de s_A, s_B y s_C.

Si se excluyen los segmentos de color naranja de las cuerdas en la figura 12-40, las longitudes de cuerda constantes restantes l_1 y l_2 (junto con las dimensiones del gancho y el eslabón) se expresan como

$$s_C + s_B = l_1$$
$$(s_A - s_C) + (s_B - s_C) + s_B = l_2$$

Derivada con respecto al tiempo. La derivada con respecto al tiempo de cada ecuación resulta

$$v_C + v_B = 0$$
$$v_A - 2v_C + 2v_B = 0$$

Al eliminar v_C, obtenemos

$$v_A + 4v_B = 0$$

de modo que cuando $v_A = 2$ m/s (hacia abajo),

$$v_B = -0.5 \text{ m/s} = 0.5 \text{ m/s} \uparrow \qquad \textit{Resp.}$$

12

EJEMPLO 12.24

Un hombre parado en A iza una caja fuerte S como se indica en la figura 12-41, al caminar hacia la derecha con una velocidad constante $v_A = 0.5$ m/s. Determine la velocidad y aceleración de la caja fuerte cuando alcanza la altura de 10 m. La cuerda de 30 m de largo pasa sobre una pequeña polea en D.

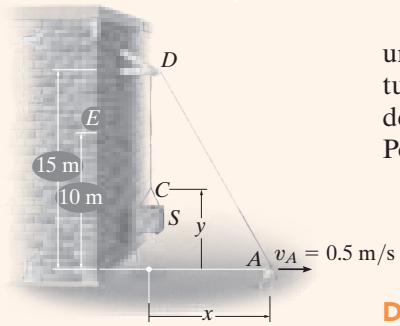


Fig. 12-41

SOLUCIÓN

Ecuación de coordenadas de posición. Este problema difiere de los ejemplos anteriores, ya que el segmento de cuerda DA cambia *tanto de dirección como de magnitud*. Sin embargo, los extremos de la cuerda, que definen las posiciones de C y A, se especifican por medio de las coordenadas x y y, ya que se miden con respecto a un punto fijo y están *dirigidas a lo largo de las trayectorias del movimiento* de los extremos de la cuerda.

Las coordenadas x y y pueden relacionarse, pues la cuerda tiene una longitud fija $l = 30$ m, la cual en todo momento es igual a la longitud del segmento DA más CD. Usando el teorema de Pitágoras para determinar l_{DA}, tenemos $l_{DA} = \sqrt{(15)^2 + x^2}$; también, $l_{CD} = 15 - y$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} l &= l_{DA} + l_{CD} \\ 30 &= \sqrt{(15)^2 + x^2} + (15 - y) \\ y &= \sqrt{225 + x^2} - 15 \end{aligned} \tag{1}$$

Derivadas con respecto al tiempo. Con la derivada con respecto al tiempo y la regla de la cadena (vea el apéndice C), donde $v_S = dy/dt$ y $v_A = dx/dt$, se obtiene

$$\begin{aligned} v_S = \frac{dy}{dt} &= \left[\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{225 + x^2}}\right]\frac{dx}{dt} \\ &= \frac{x}{\sqrt{225 + x^2}}v_A \end{aligned} \tag{2}$$

Cuando $y = 10$ m, x se determina con la ecuación 1, es decir, $x = 20$ m. Por consiguiente, a partir de la ecuación 2 con $v_A = 0.5$ m/s,

$$v_S = \frac{20}{\sqrt{225 + (20)^2}}(0.5) = 0.4 \text{ m/s} = 400 \text{ mm/s} \uparrow \quad \textit{Resp.}$$

La aceleración se determina al tomar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 2. Como v_A es constante, entonces $a_A = dv_A/dt = 0$, y tenemos

$$a_S = \frac{d^2y}{dt^2} = \left[\frac{-x(dx/dt)}{(225 + x^2)^{3/2}}\right]xv_A + \left[\frac{1}{\sqrt{225 + x^2}}\right]\left(\frac{dx}{dt}\right)v_A + \left[\frac{1}{\sqrt{225 + x^2}}\right]x\frac{dv_A}{dt} = \frac{225v_A^2}{(225 + x^2)^{3/2}}$$

Cuando $x = 20$, con $v_A = 0.5$ m/s, la aceleración es

$$a_S = \frac{225(0.5 \text{ m/s})^2}{[225 + (20 \text{ m})^2]^{3/2}} = 0.00360 \text{ m/s}^2 = 3.60 \text{ mm/s}^2 \uparrow \quad \textit{Resp.}$$

NOTA: La velocidad constante en A hace que el otro extremo C de la cuerda se acelere, ya que $\mathbf{v}_A$ cambia la dirección del segmento DA y también su longitud.

12.10 Movimiento relativo de dos partículas utilizando ejes en traslación

A lo largo de todo este capítulo, el movimiento absoluto de una partícula se ha determinado por medio de un marco de referencia fijo. Existen muchos casos, sin embargo, donde la trayectoria del movimiento de una partícula se complica, de modo que quizá sea más fácil analizar el movimiento en partes utilizando dos o más marcos de referencia. Por ejemplo, el movimiento de una partícula localizada en la punta de la hélice de un avión, mientras éste está en vuelo, se describe mejor si primero se observa el movimiento del avión desde una referencia fija y, luego, se superpone (vectorialmente) el movimiento circular de la partícula medido con respecto a una referencia fija al avión.

En esta sección se considerarán *marcos de referencia en traslación* en el análisis.

Posición. Considere las partículas A y B, las cuales se desplazan a lo largo de las trayectorias arbitrarias de la figura 12-42. La *posición absoluta* de cada partícula, $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$, está medida con respecto al origen común O del marco de referencia fijo x, y, z. El origen de un segundo marco de referencia x', y', z' se fija a la partícula A y se mueve con ésta. Se *permite* que los ejes de este marco *sólo se trasladen* relativamente con respecto al marco fijo. La posición de B medida relativa con respecto a A se denota por el *vector de posición relativo* $\mathbf{r}_{B/A}$. Por medio de la suma vectorial, los tres vectores mostrados en la figura 12-42 pueden relacionarse mediante la ecuación

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \tag{12-33}$$

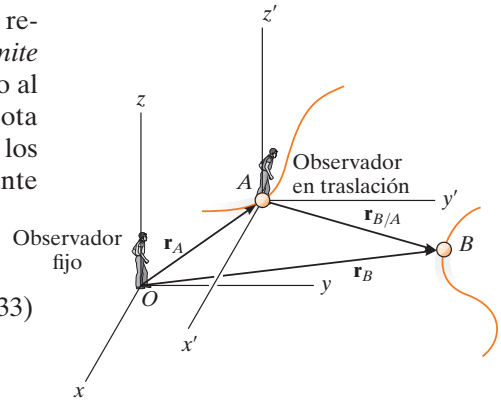


Fig. 12-42

Velocidad. Si se toman las derivadas con respecto al tiempo de la ecuación anterior, se determina una ecuación que relaciona las velocidades de las partículas, es decir,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{12-34}$$

Donde $\mathbf{v}_B = d\mathbf{r}_B/dt$ y $\mathbf{v}_A = d\mathbf{r}_A/dt$ se refieren a *velocidades absolutas*, ya que se observan desde el marco fijo; en tanto que la *velocidad relativa* $\mathbf{v}_{B/A} = d\mathbf{r}_{B/A}/dt$ se observa desde el marco en traslación. Es importante señalar que como los ejes x', y', z' se trasladan, las *componentes* de $\mathbf{r}_{B/A}$ *no* cambiarán de dirección y, por consiguiente, la derivada con respecto al tiempo de estas componentes sólo tendrán que responder al cambio de sus magnitudes. La ecuación 12-34 establece, por lo tanto, que la velocidad de B es igual a la velocidad de A más (vectorialmente) la velocidad de "B con respecto a A" medida por el *observador en traslación* fijo en el marco de referencia x', y', z'.

Aceleración. La derivada con respecto al tiempo de la ecuación 12-34 proporciona una relación vectorial similar entre las *aceleraciones absoluta* y *relativa* de las partículas A y B.

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \tag{12-35}$$

Aquí $\mathbf{a}_{B/A}$ es la aceleración de B vista por el observador localizado en A y que se traslada con el marco de referencia x', y', z'*.

Procedimiento para el análisis

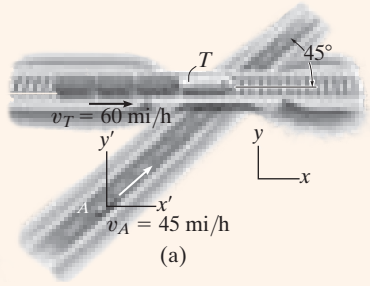
- Cuando se aplican las ecuaciones de velocidad y aceleración relativas, primero se tiene que especificar la partícula A que es el origen de los ejes en traslación x', y', z'. Por lo común, este punto tiene una velocidad o una aceleración *conocida*.
- Como la suma vectorial forma un triángulo, cuando mucho puede haber *dos incógnitas* representadas por las magnitudes y/o direcciones de las cantidades vectoriales.
- Estas incógnitas se pueden resolver ya sea gráficamente por medio de trigonometría (ley de los senos, ley de los cosenos), o bien, al descomponer cada uno de los tres vectores en sus componentes rectangulares o cartesianas, con lo cual se genera un sistema de ecuaciones escalares.

Los pilotos de estos aviones que vuelan muy cerca entre sí no deben perder de vista sus posiciones y velocidades relativas en todo momento, para evitar una colisión. (© R. C. Hibbeler)

*Una forma fácil de recordar la configuración de estas ecuaciones es observar la "cancelación" del subíndice A entre los dos términos, por ejemplo, $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{/A} + \mathbf{a}_{B/A}$.

EJEMPLO 12.25

Un tren viaja a una rapidez constante de 60 mi/h y cruza una carretera, como se indica en la figura 12-43*a*. Si el automóvil *A* viaja a 45 mi/h por la carretera, determine la magnitud y dirección de la velocidad del tren con respecto al automóvil.



(a)

SOLUCIÓN I

Análisis vectorial. La velocidad relativa $\mathbf{v}_{T/A}$ se mide con respecto a los ejes en traslación x', y' fijos en el automóvil (fig. 12-43*a*). Ésta se determina a partir de la ecuación $\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$. Como se conocen *tanto* la magnitud *como* la dirección de $\mathbf{v}_T$ y $\mathbf{v}_A$, las incógnitas son las componentes x y y de $\mathbf{v}_{T/A}$. Si utilizamos los ejes x, y en la figura 12-43*a*, tenemos

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$60\mathbf{i} = (45\cos 45°\mathbf{i} + 45\,\text{sen}\,45°\mathbf{j}) + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$\mathbf{v}_{T/A} = \{28.2\mathbf{i} - 31.8\mathbf{j}\}\ \text{mi/h}$$

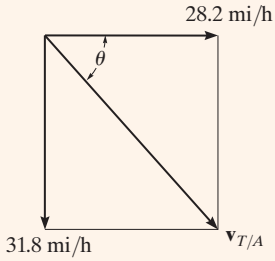
La magnitud de $\mathbf{v}_{T/A}$ es, por lo tanto,

$$v_{T/A} = \sqrt{(28.2)^2 + (-31.8)^2} = 42.5\ \text{mi/h} \qquad \textit{Resp.}$$

A partir de la dirección de cada componente (fig. 12-43*b*), la dirección de $\mathbf{v}_{T/A}$ es

$$\tan\theta = \frac{(v_{T/A})_y}{(v_{T/A})_x} = \frac{31.8}{28.2}$$

$$\theta = 48.5°\ \measuredangle \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Observe que la suma vectorial mostrada en la figura 12-43*b* indica el sentido correcto de $\mathbf{v}_{T/A}$. Esta figura anticipa la respuesta y puede utilizarse para comprobarla.

SOLUCIÓN II

Análisis escalar. Las componentes desconocidas de $\mathbf{v}_{T/A}$ también pueden determinarse con un análisis escalar. Supondremos que estas componentes actúan en las direcciones x y y positivas. Por consiguiente,

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$\begin{bmatrix} 60\ \text{mi/h} \\ \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45\ \text{mi/h} \\ \measuredangle\ 45° \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_{T/A})_x \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_{T/A})_y \\ \uparrow \end{bmatrix}$$

Si descomponemos cada vector en sus componentes x y y,

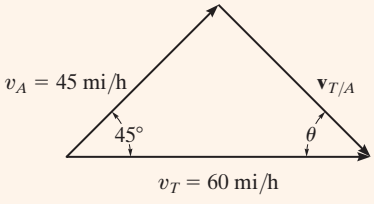
$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad 60 = 45\cos 45° + (v_{T/A})_x + 0$$

$$(+\uparrow) \qquad 0 = 45\,\text{sen}\,45° + 0 + (v_{T/A})_y$$

Al resolver, obtenemos los resultados previos,

$$(v_{T/A})_x = 28.2\ \text{mi/h} = 28.2\ \text{mi/h} \rightarrow$$

$$(v_{T/A})_y = -31.8\ \text{mi/h} = 31.8\ \text{mi/h} \downarrow$$

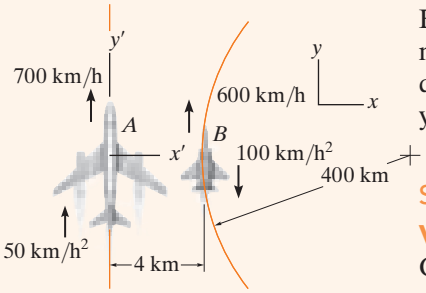


(c)

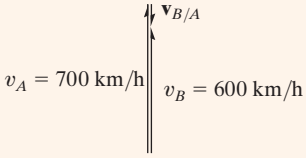
Fig. 12-43

12

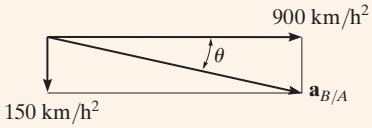
EJEMPLO 12.26



(a)



(b)



(c)

Fig. 12-44

El avión A en la figura 12-44*a* vuela a lo largo de una trayectoria recta, mientras que el avión B lo hace a lo largo de una trayectoria circular que tiene un radio de curvatura $\rho_B = 400$ km. Determine la velocidad y aceleración de B medidas por el piloto de A.

SOLUCIÓN

Velocidad. El origen de los ejes x y y está en un punto fijo arbitrario. Como se tiene que determinar el movimiento con respecto al plano A, el *marco de referencia en traslación* x', y' se fija en él (fig. 12-44*a*). Al aplicar la ecuación de velocidad relativa en forma escalar, ya que los vectores de la velocidad de ambos aviones son paralelos en el instante mostrado, tenemos

$$(+\uparrow) \qquad v_B = v_A + v_{B/A}$$

$$600 \text{ km/h} = 700 \text{ km/h} + v_{B/A}$$

$$v_{B/A} = -100 \text{ km/h} = 100 \text{ km/h} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

La suma vectorial se muestra en la figura 12-44*b*.

Aceleración. El avión B tiene componentes tanto tangenciales como normales de aceleración, ya que vuela a lo largo de una *trayectoria curva*. De acuerdo con la ecuación 12-20, la magnitud de la componente normal es

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(600 \text{ km/h})^2}{400 \text{ km}} = 900 \text{ km/h}^2$$

Al aplicar la ecuación de aceleración relativa se obtiene

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

$$900\mathbf{i} - 100\mathbf{j} = 50\mathbf{j} + \mathbf{a}_{B/A}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{a}_{B/A} = \{900\mathbf{i} - 150\mathbf{j}\} \text{ km/h}^2$$

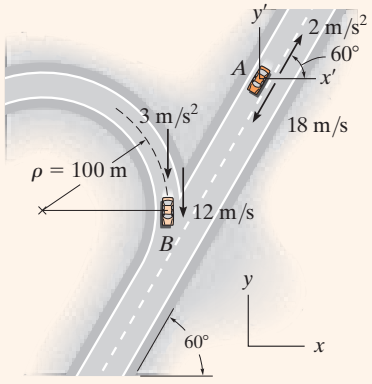
De acuerdo con la figura 12-44*c*, la magnitud y la dirección de $\mathbf{a}_{B/A}$ son por consiguiente

$$a_{B/A} = 912 \text{ km/h}^2 \quad \theta = \tan^{-1}\frac{150}{900} = 9.46° \ \searrow \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: La solución de este problema fue posible gracias al uso de un marco de referencia en traslación, pues el piloto del avión A "se está trasladando". La observación del movimiento del avión A con respecto al piloto del avión B, sin embargo, se obtiene usando un sistema de ejes *de rotación* fijo en el avión B. (Esto supone, desde luego, que el piloto de B está fijo en el marco en rotación, así que no tiene que mover sus ojos para seguir el movimiento de A.) Este caso se analiza en el ejemplo 16.21.

EJEMPLO 12.27

En el instante que se muestra en la figura 12-45*a*, los automóviles *A* y *B* viajan con una rapidez de 18 m/s y 12 m/s, respectivamente. Asimismo, en este instante, *A* experimenta un decremento en rapidez de 2 m/s^2 y *B* tiene un incremento en rapidez de 3 m/s^2. Determine la velocidad y aceleración de *B* con respecto a *A*.



(a)

SOLUCIÓN

Velocidad. Los ejes *x*, *y* fijos se establecen en un punto arbitrario en el suelo, y los ejes en traslación *x'*, *y'* se fijan al automóvil *A* (fig. 12-45*a*). ¿Por qué? La velocidad relativa se determina con $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$. ¿Cuáles son las dos incógnitas? Si utilizamos un análisis vectorial cartesiano, tenemos

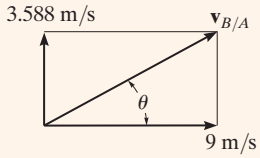
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$
$$-12\mathbf{j} = (-18\cos 60°\mathbf{i} - 18\sin 60°\mathbf{j}) + \mathbf{v}_{B/A}$$
$$\mathbf{v}_{B/A} = \{9\mathbf{i} + 3.588\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$$

Por lo tanto,

$$v_{B/A} = \sqrt{(9)^2 + (3.588)^2} = 9.69\ \text{m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Observemos que $\mathbf{v}_{B/A}$ tiene componentes $+\mathbf{i}$ y $+\mathbf{j}$ (fig. 12-45*b*), su dirección es

$$\tan\theta = \frac{(v_{B/A})_y}{(v_{B/A})_x} = \frac{3.588}{9}$$
$$\theta = 21.7°\ \measuredangle \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Aceleración. El automóvil *B* tiene componentes tanto tangencial como normal de aceleración. ¿Por qué? La magnitud de la componente normal es

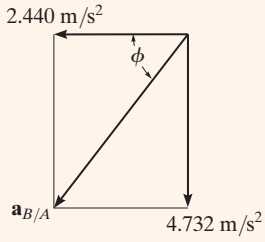
$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(12\ \text{m/s})^2}{100\ \text{m}} = 1.440\ \text{m/s}^2$$

Al aplicar la ecuación de la aceleración relativa se obtiene

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$
$$(-1.440\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = (2\cos 60°\mathbf{i} + 2\sin 60°\mathbf{j}) + \mathbf{a}_{B/A}$$
$$\mathbf{a}_{B/A} = \{-2.440\mathbf{i} - 4.732\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2$$

Aquí $\mathbf{a}_{B/A}$ tiene componentes $-\mathbf{i}$ y $-\mathbf{j}$. Entonces, con la figura 12-45*c*,

$$a_{B/A} = \sqrt{(2.440)^2 + (4.732)^2} = 5.32\ \text{m/s}^2$$
$$\tan\phi = \frac{(a_{B/A})_y}{(a_{B/A})_x} = \frac{4.732}{2.440}$$
$$\phi = 62.7°\ \measuredangle \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

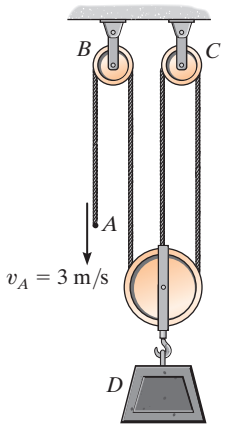
Fig. 12-45

NOTA: ¿Es posible obtener la aceleración relativa $\mathbf{a}_{A/B}$ con este método? Vea el comentario al final del ejemplo 12.26.

12

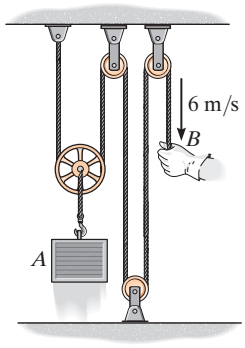
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F12-39. Determine la velocidad del bloque D, si el extremo A de la cuerda se jala hacia abajo con una rapidez de $v_A = 3$ m/s.



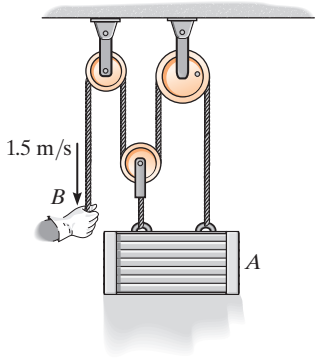
Prob. F12-39

F12-40. Determine la velocidad del bloque A, si el extremo B de la cuerda se jala hacia abajo con una rapidez de 6 m/s.



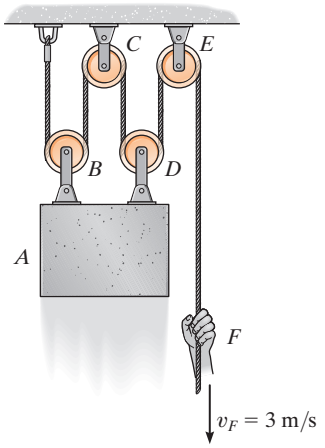
Prob. F12-40

F12-41. Determine la velocidad del bloque A, si el extremo B de la cuerda se jala hacia abajo con una rapidez de 1.5 m/s.



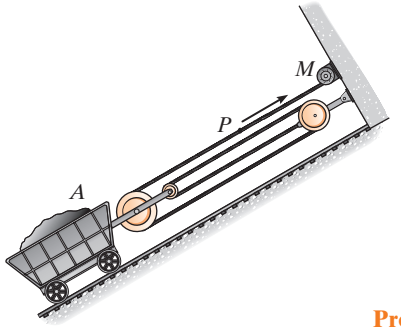
Prob. F12-41

F12-42. Determine la velocidad del bloque A, si el extremo F de la cuerda se jala hacia abajo con una rapidez de $v_F = 3$ m/s.



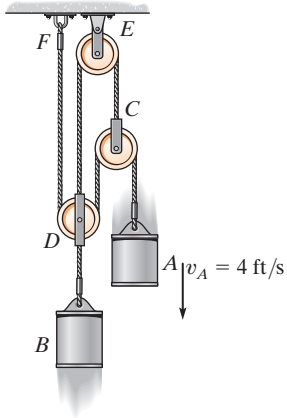
Prob. F12-42

F12-43. Determine la velocidad del carro A, si el punto P en el cable tiene una rapidez de 4 m/s cuando el motor M enrolla el cable.



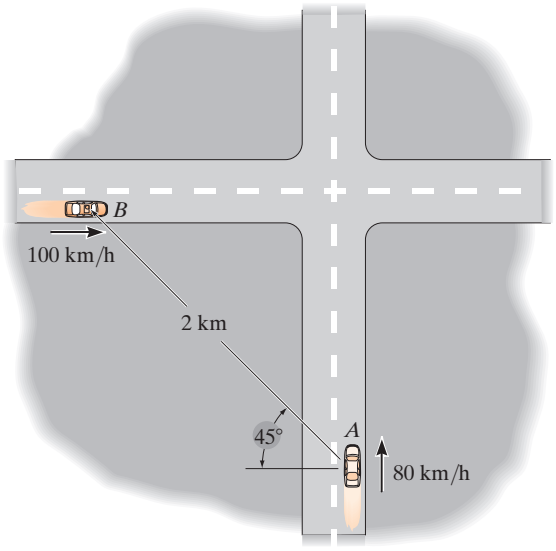
Prob. F12-43

F12-44. Determine la velocidad del cilindro B si el cilindro A desciende con una rapidez de $v_A = 4$ ft/s.



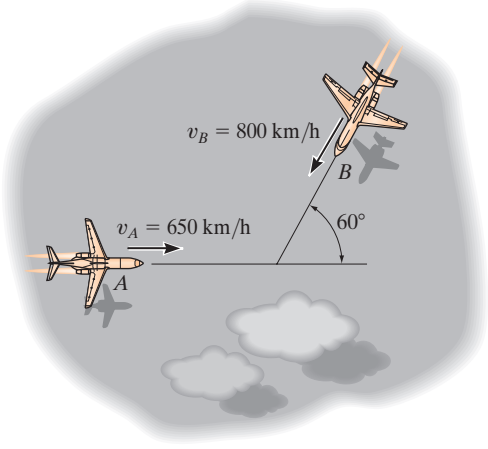
Prob. F12-44

F12-45. El automóvil A viaja a una rapidez constante de 80 km/h al norte, mientras que el automóvil B viaja a una rapidez constante de 100 km/h al este. Determine la velocidad relativa del automóvil B con respecto al automóvil A.



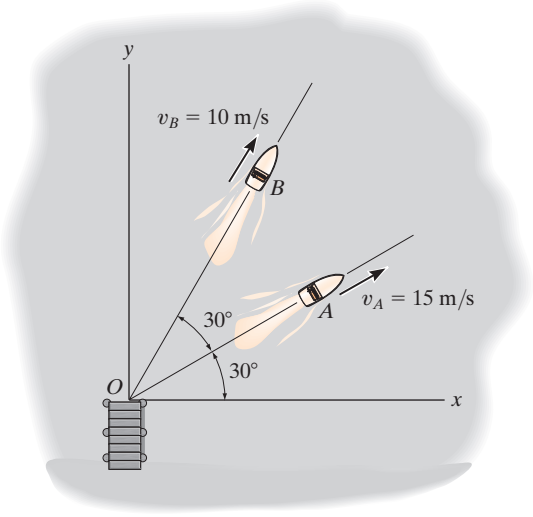
Prob. F12-45

F12-46. Dos aviones A y B vuelan a las velocidades constantes mostradas. Determine la magnitud y dirección de la velocidad relativa del avión B con respecto al avión A.



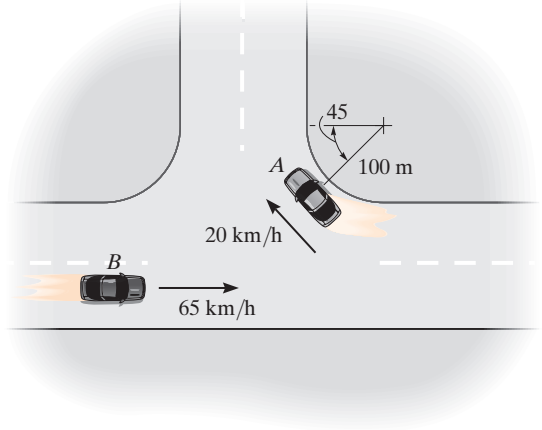
Prob. F12-46

F12-47. Los botes A y B navegan con una rapidez constante de $v_A = 15$ m/s y $v_B = 10$ m/s, respectivamente, cuando salen del muelle en O al mismo tiempo. Determine la distancia entre ambos cuando $t = 4$ s.



Prob. F12-47

F12-48. En el instante que se muestra, los automóviles A y B viajan a la rapidez mostrada. Si B está acelerando a 1200 km/h^2 mientras que A mantiene una rapidez constante, determine la velocidad y aceleración de A con respecto a B.

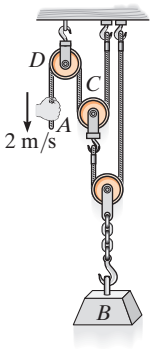


Prob. F12-48,

12

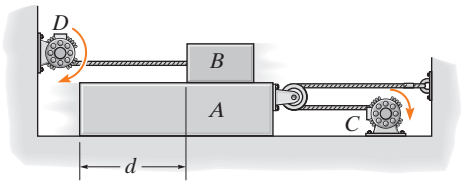
PROBLEMAS

12-195. Si el extremo del cable en A se jala hacia abajo con una rapidez de 2 m/s, determine la rapidez a la cual se eleva el bloque B.



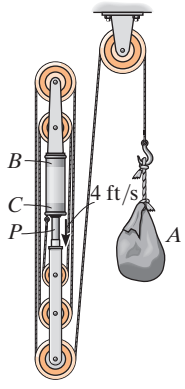
Prob. 12-195

***12-196.** El motor en C tira del cable con una aceleración $a_C = (3t^2)$ m/s^2, donde t está en segundos. El motor en D tira de su cable a $a_D = 5$ m/s^2. Si ambos motores arrancan al mismo tiempo del reposo cuando $d = 3$ m, determine (a) el tiempo requerido para que $d = 0$, y (b) las velocidades de los bloques A y B cuando esto ocurre.



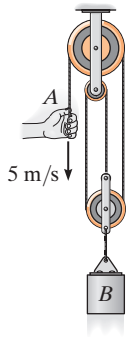
Prob. 12-196

12-197. El arreglo de poleas que se ilustra en la figura está diseñado para elevar materiales. Si BC *permanece fijo* mientras que el émbolo P es empujado hacia abajo con una rapidez de 4 ft/s, determine la rapidez de la carga en A.



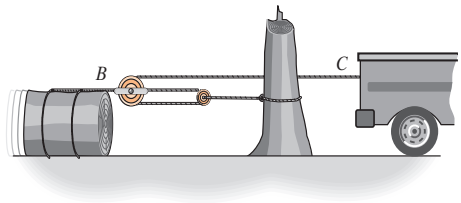
Prob. 12-197

12-198. Si el extremo del cable en A se jala hacia abajo con una rapidez de 5 m/s, determine la rapidez a la cual se eleva el bloque B.



Prob. 12-198

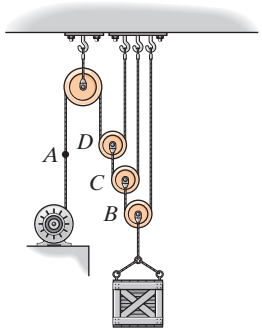
12-199. Determine el desplazamiento del tronco, si el camión en C tira del cable 4 ft a la derecha.



Prob. 12-199

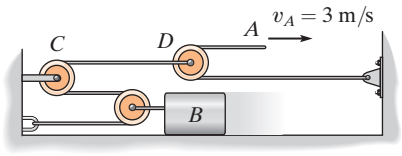
***12-200.** Determine la rapidez constante a la que se debe tirar del cable en A mediante el motor, con el fin de levantar 6 m la carga en 1.5 s.

12-201. A partir del reposo, el cable puede enrollarse en el tambor del motor a una rapidez de $v_A = (3t^2)$ m/s, donde t se da en segundos. Determine el tiempo necesario para levantar 7 m la carga.



Probs. 12-200/201

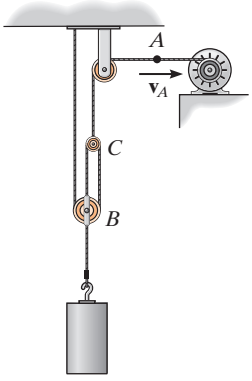
12-202. Si el extremo A del cable se está moviendo a $v_A = 3$ m/s, determine la rapidez del bloque B.



Prob. 12-202

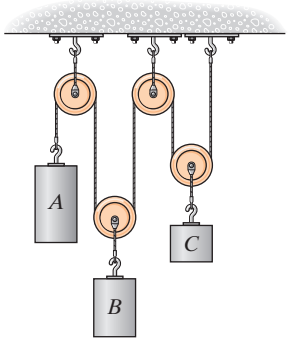
12-203. Determine el tiempo necesario para que la carga en B alcance una rapidez de 10 m/s, partiendo del reposo, si el cable se introduce en el motor con una aceleración de 3 m/s^2.

***12-204.** El cable en A está se está jalando hacia el motor a $v_A = 8$ m/s. Determine la velocidad del bloque.



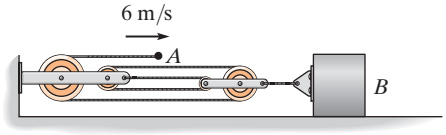
Probs. 12-203/204

12-205. Si el bloque A del sistema de poleas se mueve hacia abajo a 6 ft/s mientras que el bloque C se mueve hacia abajo a 18 ft/s, determine la velocidad relativa del bloque B con respecto a C.



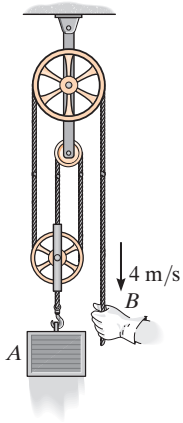
Prob. 12-205

12-206. Determine la rapidez del bloque en B.



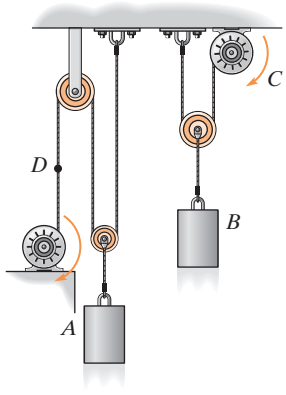
Prob. 12-206

12-207. Determine la rapidez del bloque A si el extremo de la cuerda se jala hacia abajo con una rapidez de 4 m/s.



Prob. 12-207

***12-208.** Un motor enrolla el cable en C con una velocidad constante de $v_C = 4$ m/s. Otro motor enrolla el cable en D con una aceleración constante de $a_D = 8$ m/s^2. Si $v_D = 0$ cuando $t = 0$, determine (a) el tiempo necesario para que el bloque A se eleve 3 m, y (b) la velocidad relativa del bloque A con respecto al bloque B cuando esto sucede.

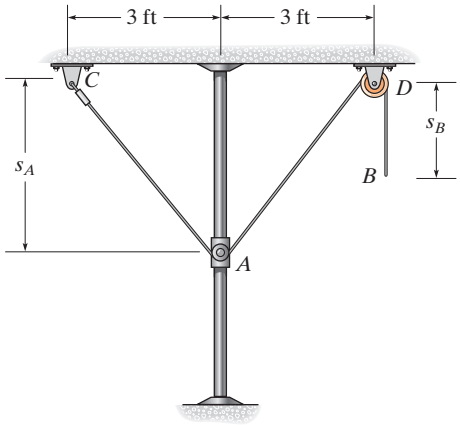


Prob. 12-208

12

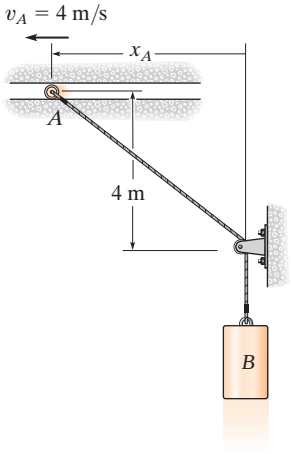
12-209. La cuerda está unida al pasador en C y pasa sobre las dos poleas en A y D. La polea en A está unida al collarín liso que viaja a lo largo de la varilla vertical. Determine la velocidad y la aceleración del extremo de la cuerda en B, si en el instante $s_A = 4$ ft el collarín se mueve hacia arriba a 5 ft/s, y está disminuyendo a 2 ft/s^2.

12-210. La cuerda de 16 ft de longitud está unida al pasador en C y pasa sobre las dos poleas en A y D. La polea en A está unida al collarín liso que viaja a lo largo de la varilla vertical. Cuando $s_B = 6$ ft, el extremo de la cuerda en B se jala hacia abajo con una velocidad de 4 ft/s y se le da una aceleración de 3 ft/s^2. Determine la velocidad y la aceleración del collarín en ese instante.



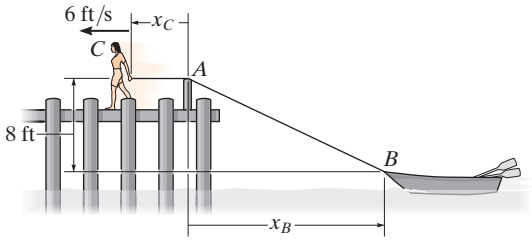
Probs. 12-209/210

12-211. El rodillo en A se mueve con una velocidad de $v_A = 4$ m/s y tiene una aceleración de $a_A = 2$ m/s^2 cuando $x_A = 3$ m. Determine la velocidad y la aceleración del bloque B en ese instante.



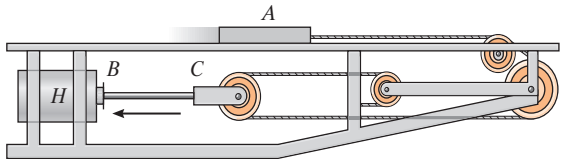
Prob. 12-211

***12-212.** La joven en C se coloca cerca del borde del muelle y tira de la cuerda *horizontalmente* a una rapidez constante de 6 ft/s. Determine qué tan rápido se acerca el barco al muelle en el instante en que la longitud de la cuerda AB es de 50 ft.



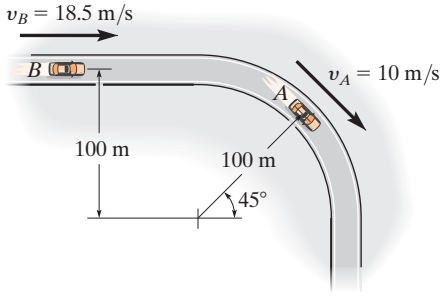
Prob. 12-212

12-213. Si el cilindro hidráulico H jala hacia dentro la varilla BC a 2 ft/s, determine la rapidez de la corredera A.



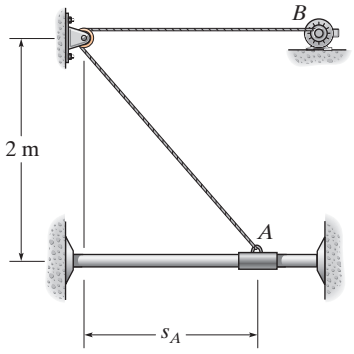
Prob. 12-213

12-214. En el instante mostrado, el automóvil en A se desplaza a 10 m/s alrededor de la curva, mientras aumenta su rapidez a 5 m/s^2. El automóvil en B se desplaza a 18.5 m/s a lo largo de la recta y aumenta su rapidez a 2 m/s^2. Determine la velocidad relativa y la aceleración relativa de A con respecto a B en ese instante.



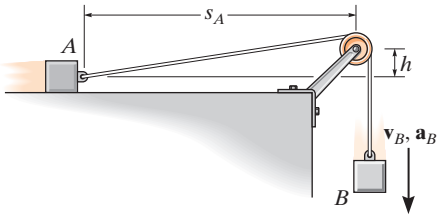
Prob. 12-214

12-215. El motor enrolla la cuerda en B con una aceleración de $a_B = 2$ m/s^2. Cuando $s_A = 1.5$ m, $v_B = 6$ m/s. Determine la velocidad y la aceleración del collarín en este instante.



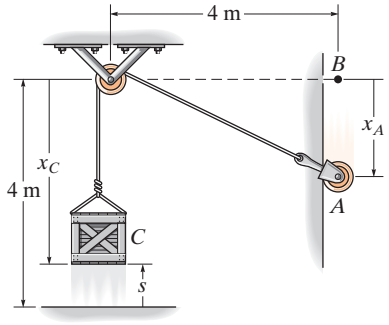
Prob. 12-215

***12-216.** Si el bloque B se mueve hacia abajo con una velocidad v_B y tiene una aceleración a_B, determine la velocidad y la aceleración del bloque A en función de los parámetros mostrados.



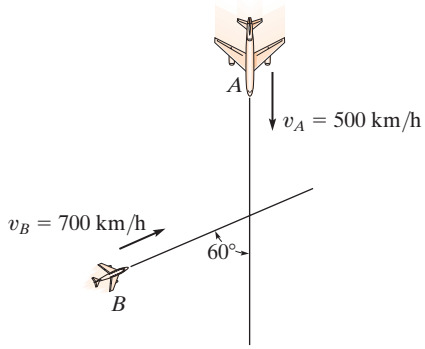
Prob. 12-216

12-217. El embalaje C se eleva al mover el rodillo en A hacia abajo con una rapidez constante de $v_A = 2$ m/s a lo largo de la guía. Determine la velocidad y la aceleración del embalaje en el instante $s = 1$ m. Cuando el rodillo está en B, el embalaje descansa en el suelo. Para realizar los cálculos, desprecie el tamaño de la polea. *Sugerencia:* Relacione las coordenadas x_C y x_A usando la geometría del problema; luego, obtenga la primera y segunda derivadas con respecto al tiempo.



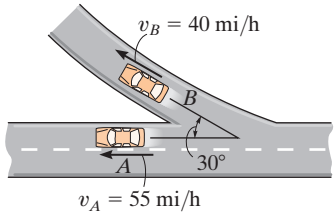
Prob. 12-217

12-218. Dos aviones, A y B, vuelan a la misma altitud. Si sus velocidades son $v_A = 500$ km/h y $v_B = 700$ km/h, de modo que el ángulo entre sus trayectos en línea recta es $\theta = 60°$, determine la velocidad del avión B con respecto al avión A.



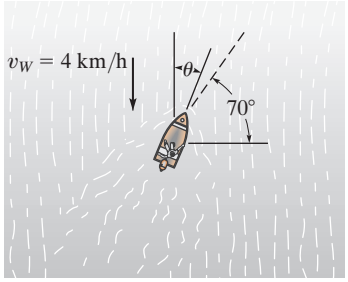
Prob. 12-218

12-219. En el instante mostrado, los automóviles A y B viajan a una rapidez de 55 mi/h y 40 mi/h, respectivamente. Si B incrementa su rapidez a 1200 mi/h^2, mientras que A mantiene una rapidez constante, determine la velocidad y la aceleración de B con respecto a A. El auto B se mueve a lo largo de una curva que tiene un radio de curvatura de 0.5 mi.



Prob. 12-219

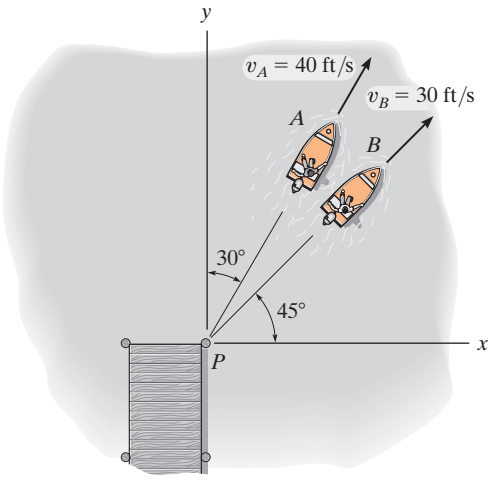
***12-220.** La lancha puede viajar con una rapidez de 16 km/h en aguas tranquilas. El punto de destino se encuentra a lo largo de la línea punteada. Si el agua se mueve a 4 km/h, determine el ángulo de navegación θ al que la lancha debe viajar para mantener su trayectoria.



Prob. 12-220

12

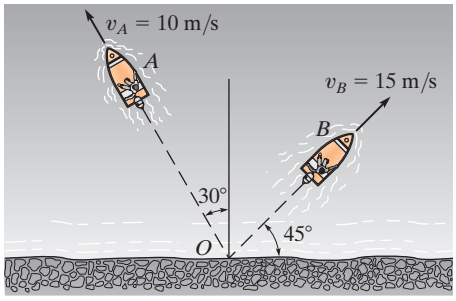
12-221. Dos botes salen del muelle P al mismo tiempo y viajan en las direcciones mostradas. Si $v_A = 40$ ft/s y $v_B = 30$ ft/s, determine la velocidad del bote A relativa al bote B. ¿Cuánto tiempo después de dejar el muelle los botes estarán separados una distancia de 1500 ft?



Prob. 12-221

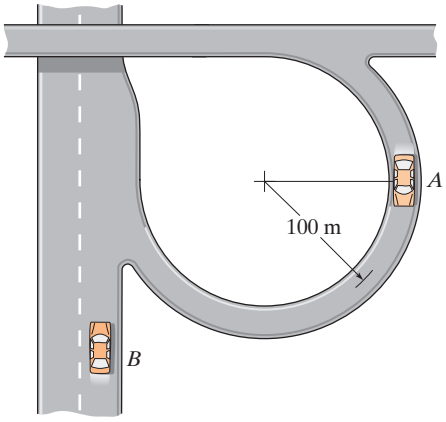
12-222. Un automóvil viaja al norte por una carretera recta a 50 km/h. Un instrumento en el automóvil indica que el viento viene del este. Si la rapidez del auto es de 80 km/h, el instrumento indica que el viento viene del noreste. Determine la rapidez y la dirección del viento.

12-223. Dos botes salen de la orilla de la playa al mismo tiempo y viajan en las direcciones mostradas. Si $v_A = 10$ m/s y $v_B = 15$ m/s, determine la velocidad del bote A con respecto al bote B. ¿Cuánto tiempo después de dejar la orilla los botes estarán separados una distancia de 600 m?



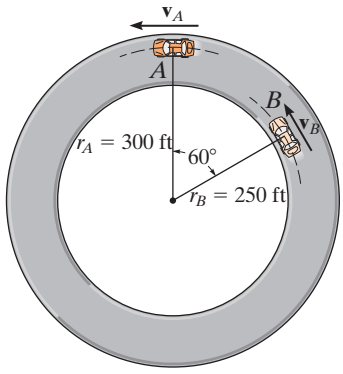
Prob. 12-223

***12-224.** En el instante mostrado, el automóvil A tiene una rapidez de 20 km/h, que se está incrementando a razón de 300 km/h^2 cuando el vehículo entra en la autopista. En el mismo instante, el automóvil B está desacelerando a 250 km/h^2 mientras viaja hacia adelante a 100 km/h. Determine la velocidad y la aceleración de A con respecto a B.



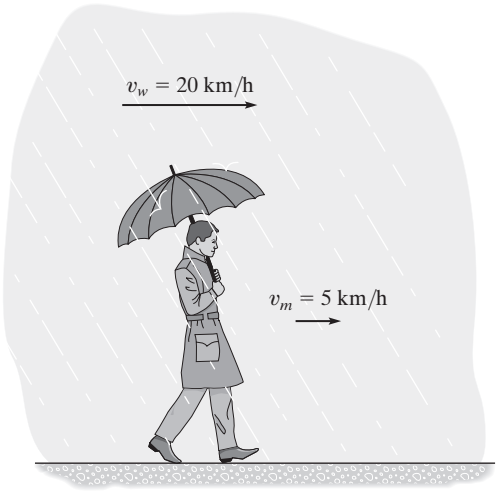
Prob. 12-224

12-225. Los automóviles A y B viajan alrededor de la pista de carreras circular. En el instante indicado, A tiene una rapidez de 90 ft/s y está aumentando su rapidez a razón de 15 ft/s^2, mientras que B tiene una rapidez de 105 ft/s y está disminuyendo su rapidez a 25 ft/s^2. Determine la velocidad relativa y la aceleración relativa del automóvil A con respecto al automóvil B en este instante.



Prob. 12-225

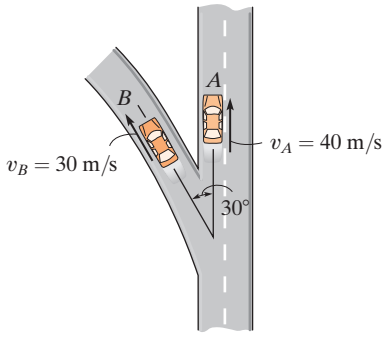
12-226. Un hombre camina a 5 km/h en la dirección del viento de 20 km/h. Si las gotas de lluvia caen verticalmente a 7 km/h en *aire tranquilo*, determine la dirección en la cual las gotas parecen caer con respecto al hombre.



Prob. 12-226

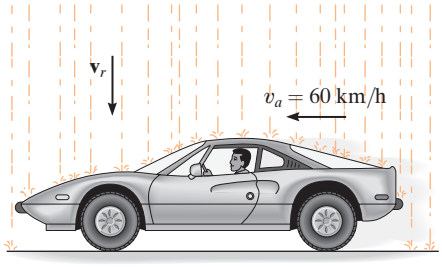
12-227. En el instante mostrado, los automóviles A y B están viajando a velocidades de 40 m/s y 30 m/s, respectivamente. Si B aumenta su velocidad a 2 m/s^2, en tanto que A mantiene una velocidad constante, determine la velocidad y la aceleración de B con respecto a A. El radio de curvatura en B es $\rho_B = 200$ m.

***12-228.** En el instante mostrado, los automóviles A y B están viajando a velocidades de 40 m/s y 30 m/s, respectivamente. Si A aumenta su rapidez a 4 m/s^2, mientras que la rapidez de B disminuye a 3 m/s^2, determine la velocidad y la aceleración de B con respecto a A. El radio de curvatura en B es $\rho_B = 200$ m.



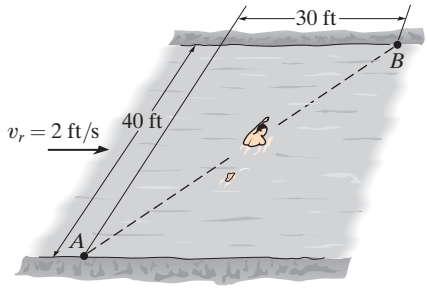
Probs. 12-227/228

12-229. Un pasajero en un automóvil observa que las gotas de agua forman un ángulo de 30° con la horizontal conforme el automóvil se desplaza hacia adelante con una rapidez de 60 km/h. Calcule la velocidad terminal (constante) $\mathbf{v}_r$, de la lluvia, si se supone que ésta cae verticalmente.



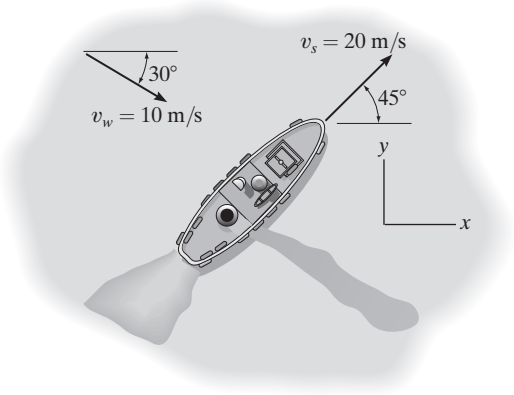
Prob. 12-229

12-230. Un hombre puede nadar a 4 ft/s en aguas tranquilas. Desea cruzar el río de 40 ft de ancho hasta el punto B, que está 30 ft aguas abajo. Si el río fluye a una velocidad de 2 ft/s, determine la rapidez del hombre y el tiempo necesario para hacer la travesía. *Nota:* Mientras está en el agua, el hombre no debe dirigirse directamente hacia el punto B para llegar ahí. ¿Por qué?



Prob. 12-230

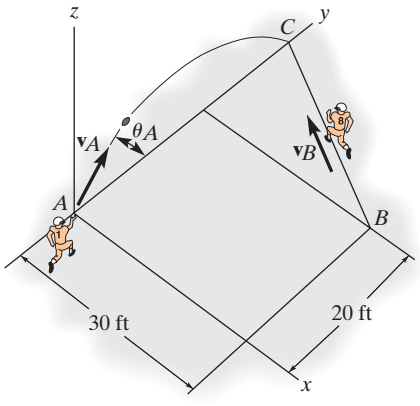
12-231. El barco navega a una rapidez constante de $v_s = 20$ m/s y el viento sopla a una rapidez de $v_w = 10$ m/s, como se ilustra. Determine la magnitud y la dirección de la componente horizontal de la velocidad del humo que sale de la chimenea, observado por un pasajero en el barco.



Prob. 12-231

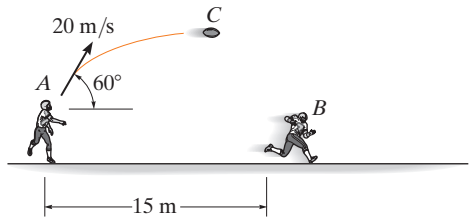
***12-232.** El jugador de futbol americano en A lanza el balón en el plano y-z con una rapidez $v_A = 50$ ft/s y a un ángulo $\theta_A = 60°$ con respecto a la horizontal. En el instante en que se lanza el balón, el jugador en B está corriendo con rapidez constante a lo largo de la línea BC para atraparlo. Determine esta rapidez, v_B, si el balón es atrapado a la misma altura desde la que se lanzó.

12-233. El jugador de futbol americano en A lanza el balón en el plano y-z con una rapidez $v_A = 50$ ft/s y a un ángulo $\theta_A = 60°$ con respecto a la horizontal. En el instante en que se lanza el balón, el jugador en B está corriendo con rapidez constante de $v_B = 23$ ft/s a lo largo de la línea BC. Determine si puede alcanzar el punto C, que tiene la misma altura que A, antes de que el balón llegue ahí.



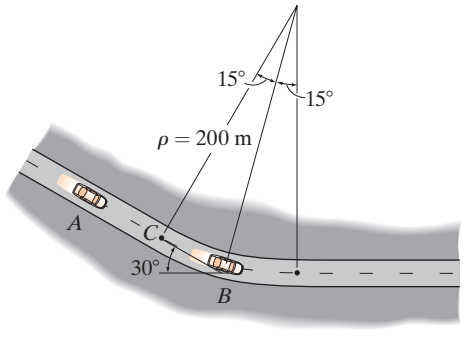
Probs. 12-232/233

12-234. En un instante dado el jugador de futbol americano en A lanza un balón C con una velocidad de 20 m/s en la dirección indicada. Determine la rapidez constante a la que el jugador en B debe correr, para atrapar el balón a la misma altura a la que fue lanzado. Además, calcule la velocidad relativa y la aceleración relativa del balón con respecto a B, en el instante en que se hace la atrapada. El jugador B está a 15 m de A cuando A comienza a lanzar el balón.



Prob. 12-234

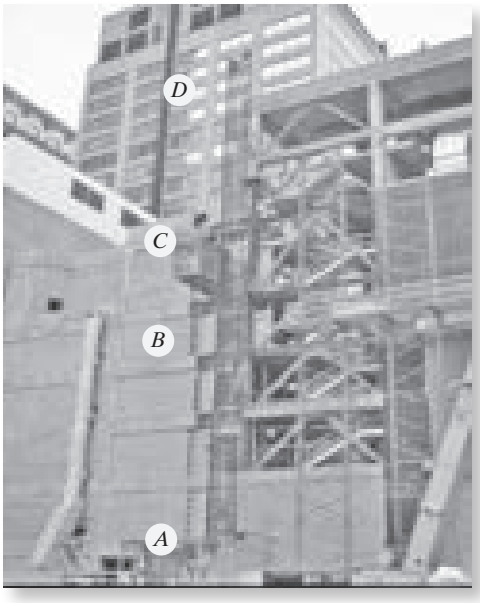
12-235. En el instante mostrado, el automóvil A viaja a lo largo del tramo recto de la carretera con una rapidez de 25 m/s. En ese mismo instante, el automóvil B viaja a lo largo del tramo circular de la carretera con una rapidez de 15 m/s. Determine la velocidad del automóvil B con respecto al automóvil A.



Prob. 12-235

PROBLEMAS CONCEPTUALES

C12-1. Si usted mide el tiempo que le lleva al elevador de construcción ir de *A* a *B*, luego de *B* a *C* y después de *C* a *D*, y también conoce la distancia entre cada uno de los puntos, ¿cómo determinaría la velocidad promedio y la aceleración promedio del elevador al ascender de *A* a *D*? Use valores numéricos para explicar cómo se puede hacer esto.



Prob. C12-1 (© R. C. Hibbeler)

C12-2. Si el aspersor en *A* está a 1 m del suelo, ponga a escala las medidas necesarias tomadas de la fotografía para determinar la velocidad aproximada del chorro de agua conforme sale de la boquilla del aspersor.

Prob. C12-2 (© R. C. Hibbeler)

C12-3. Se lanzó el balón de basquetbol a un ángulo medido entre la horizontal y el brazo extendido del hombre. Si la canasta está a 3 m del suelo, haga las mediciones adecuadas en la fotografía y determine si el balón ubicado como se indica entrará a la canasta.

Prob. C12-3 (© R. C. Hibbeler)

C12-4. La piloto le dice la envergadura de su avión y su velocidad aerodinámica. ¿Cómo determinaría la aceleración del avión en el momento ilustrado? Utilice valores numéricos y tome las mediciones necesarias a partir de la fotografía.

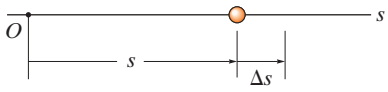
Prob. C12-4 (© R. C. Hibbeler)

12

REPASO DEL CAPÍTULO

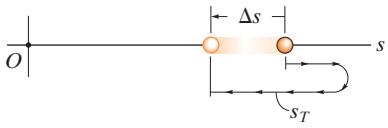
Cinemática rectilínea

La cinemática rectilínea se refiere al movimiento a lo largo de una línea recta. Una coordenada de posición s especifica la ubicación de la partícula en la línea y el desplazamiento Δs es el cambio de su posición.



La velocidad promedio es una cantidad vectorial, definida como el desplazamiento dividido entre el intervalo de tiempo.

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



La rapidez promedio es un escalar y es la distancia total recorrida, dividida entre el tiempo del recorrido.

$$(v_{\text{rap}})_{\text{prom}} = \frac{s_T}{\Delta t}$$

El tiempo, la posición, la velocidad y la aceleración están relacionados por tres ecuaciones diferenciales.

$$a = \frac{dv}{dt}, \quad v = \frac{ds}{dt}, \quad a\,ds = v\,dv$$

Si se sabe que la aceleración es constante, entonces se pueden integrar las ecuaciones diferenciales que relacionan el tiempo, la posición, la velocidad y la aceleración.

$$v = v_0 + a_c t$$
$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_c t^2$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$$

Soluciones gráficas

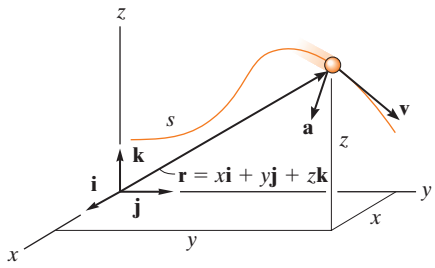
Si el movimiento es errático, entonces puede describirse mediante una gráfica. Si se proporciona una de estas gráficas, en ese caso las otras pueden establecerse mediante las relaciones diferenciales entre a, v, s y t.

$$a = \frac{dv}{dt},$$
$$v = \frac{ds}{dt},$$
$$a\,ds = v\,dv$$

Movimiento curvilíneo, *x*, *y*, *z*

El movimiento curvilíneo a lo largo de una trayectoria puede descomponerse en un movimiento rectilíneo a lo largo de los ejes x, y y z. Se utiliza la ecuación de la trayectoria para relacionar el movimiento a lo largo de cada eje.

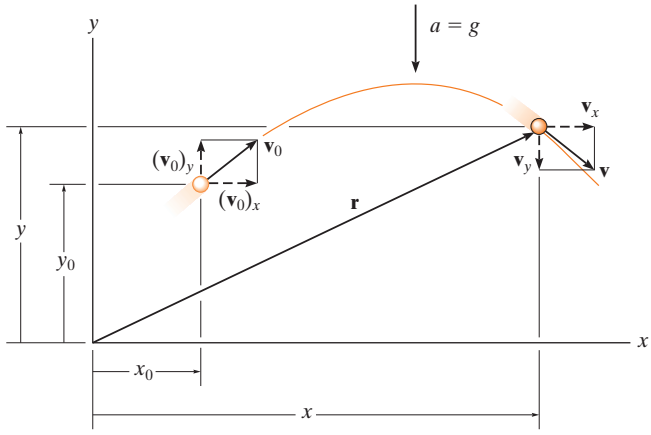
$$v_x = \dot{x} \quad a_x = \dot{v}_x$$
$$v_y = \dot{y} \quad a_y = \dot{v}_y$$
$$v_z = \dot{z} \quad a_z = \dot{v}_z$$



Movimiento de un proyectil

El movimiento de vuelo libre de un proyectil sigue una trayectoria parabólica. Tiene una velocidad constante en la dirección horizontal y una aceleración hacia abajo constante de $g = 9.81\ \text{m/s}^2$ o $32.2\ \text{ft/s}^2$ en la dirección vertical. Dos de cualesquiera de las tres ecuaciones de aceleración constante se aplican en la dirección vertical, pero en la dirección horizontal tan sólo se aplica una ecuación.

$$(+\uparrow) \quad v_y = (v_0)_y + a_c t$$
$$(+\uparrow) \quad y = y_0 + (v_0)_y t + \tfrac{1}{2} a_c t^2$$
$$(+\uparrow) \quad v_y^2 = (v_0)_y^2 + 2a_c(y - y_0)$$
$$(\pm\rightarrow) \quad x = x_0 + (v_0)_x t$$



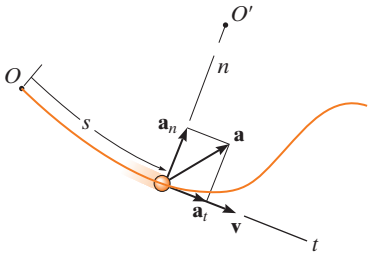
Movimiento curvilíneo *n*, *t*

Si se utilizan los ejes normal y tangencial para el análisis, entonces **v** siempre está en la dirección *t* positiva.

La aceleración tiene dos componentes. La componente tangencial, $\mathbf{a}_t$, es responsable del cambio de magnitud de la velocidad; una reducción de la velocidad ocurre en la dirección *t* negativa, y un incremento de velocidad se da en la dirección *t* positiva. La componente normal $\mathbf{a}_n$ responde al cambio en la dirección de la velocidad. Esta componente siempre actúa en la dirección *n* positiva.

$$a_t = \dot{v} \quad \text{o} \quad a_t\,ds = v\,dv$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$



Movimiento curvilíneo *r*, *θ*

Si la trayectoria del movimiento se expresa en coordenadas polares, entonces las componentes de velocidad y aceleración pueden relacionarse con las derivadas con respecto al tiempo de *r* y θ.

Para aplicar las derivadas con respecto al tiempo, es necesario determinar $r, \dot{r}, \ddot{r}, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ en el instante considerado. Si se da la trayectoria $r = f(\theta)$, entonces se debe utilizar la regla de la cadena del cálculo para obtener las derivadas con respecto al tiempo. (Vea el apéndice C.)

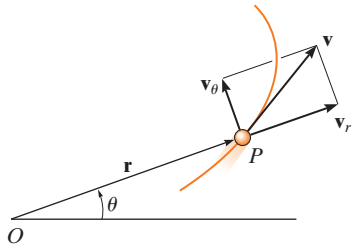
Una vez que se sustituyen los datos en las ecuaciones, el signo algebraico de los resultados indicará la dirección de las componentes de **v** o de **a** a lo largo de cada eje.

$$v_r = \dot{r}$$

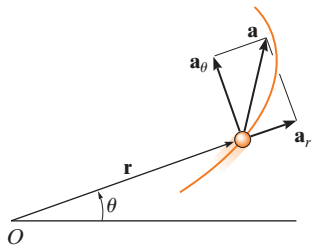
$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$



Velocidad



Aceleración

Movimiento dependiente absoluto de dos partículas

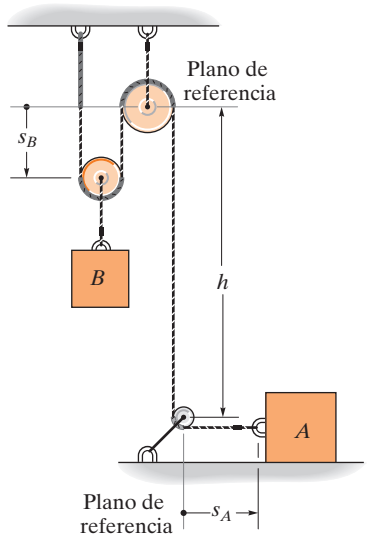
El movimiento dependiente de bloques que están suspendidos de poleas y cables puede relacionarse por la geometría del sistema. Para esto se establecen primero las coordenadas de posición medidas desde un origen fijo para cada bloque. La dirección de cada coordenada debe ser a lo largo de la línea del movimiento de un bloque.

Entonces, mediante geometría y/o trigonometría, las coordenadas se relacionan con la longitud del cable para formular una ecuación de coordenadas de posición.

La primera derivada con respecto al tiempo de esta ecuación proporciona una relación entre las velocidades de los bloques y una segunda derivada con respecto al tiempo da la relación entre sus aceleraciones.

$$2s_B + h + s_A = l$$

$$2v_B = -v_A$$
$$2a_B = -a_A$$



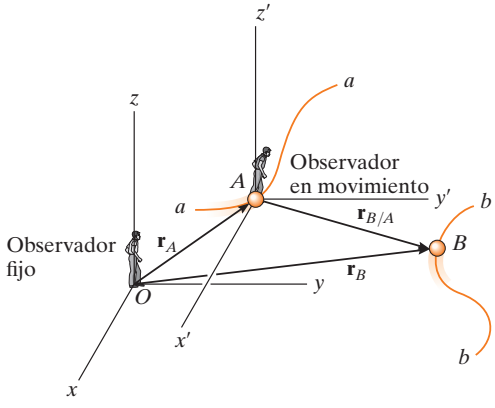
Análisis del movimiento relativo por medio de ejes en traslación

Si dos partículas A y B experimentan movimientos independientes, entonces estos movimientos pueden relacionarse con su movimiento relativo por medio de un *sistema de ejes en traslación* fijo a una de las partículas (A).

En el caso de movimiento plano, cada ecuación vectorial produce dos ecuaciones escalares, una en la dirección x y la otra en la dirección y. Para la solución, los vectores pueden expresarse en forma cartesiana, o bien, las componentes escalares x y y pueden escribirse directamente.

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$



12

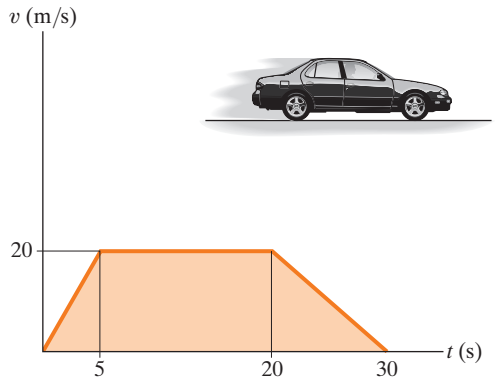
PROBLEMAS DE REPASO

R12-1. La posición de una partícula a lo largo de una línea recta está dada por $s = (t^3 - 9t^2 + 15t)$ ft, donde t se da en segundos. Determine su aceleración y velocidad máximas durante el intervalo de tiempo $0 \le t \le 10$ s.

R12-2. Si una partícula tiene una velocidad inicial $v_0 = 12$ ft/s hacia la derecha, y una aceleración constante de 2 ft/s^2 hacia la izquierda, determine el desplazamiento de la partícula en 10 s. Originalmente $s_0 = 0$.

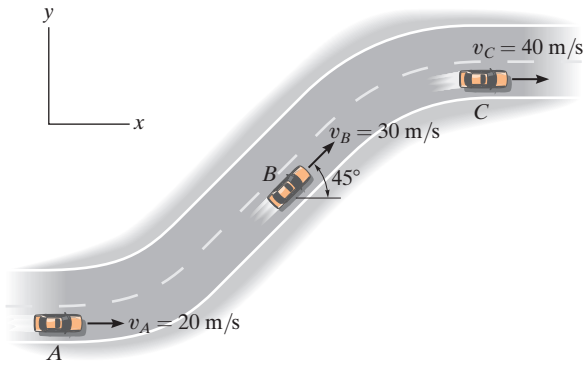
R12-3. Un proyectil, que está inicialmente en el origen, se mueve a lo largo de una trayectoria en línea recta a través de un fluido, de modo que su velocidad es $v = 1800\ (1 - e^{-0.3t})$ mm/s, donde t se da en segundos. Determine el desplazamiento del proyectil durante los primeros 3 s.

R12-4. Se muestra la gráfica v-t de un automóvil mientras viaja por una carretera. Determine la aceleración cuando $t = 2.5$ s, 10 s y 25 s. También si $s = 0$ cuando $t = 0$, encuentre la posición cuando $t = 5$ s, 20 s y 30 s.



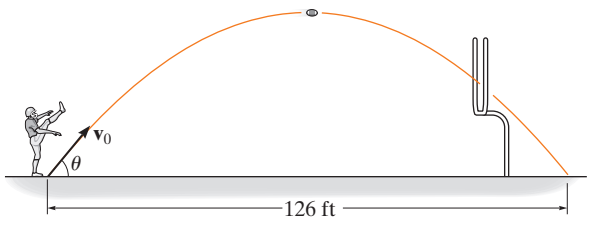
Prob. R12-4

R12-5. Un automóvil que viaja a lo largo de los tramos rectos de la carretera tiene las velocidades indicadas en la figura, cuando llega a los puntos A, B y C. Si tarda 3 s para ir de A a B y, luego, 5 s para ir de B a C, determine la aceleración promedio entre los puntos A y B y entre los puntos A y C.



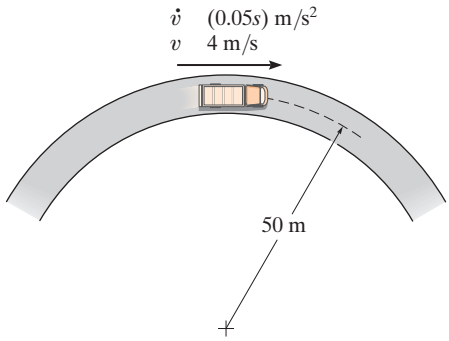
Prob. R12-5

R12-6. A partir de un video, se observó que un jugador de futbol americano pateó un balón a 126 ft durante un tiempo medido de 3.6 segundos. Determine la velocidad inicial del balón y el ángulo θ al que realizó la patada.



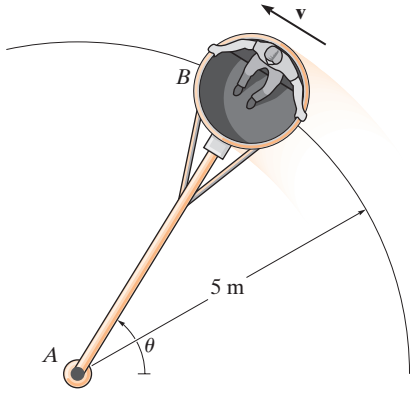
Prob. R12-6

R12-7. El camión se desplaza en una trayectoria circular que tiene un radio de 50 m a una rapidez $v = 4$ m/s. Durante una distancia corta desde $s = 0$, su rapidez se incrementa en $\dot{v} = (0.05s)\ \text{m/s}^2$, donde s está en metros. Determine las magnitudes de su rapidez y su aceleración cuando ha recorrido $s = 10$ m.



Prob. R12-7

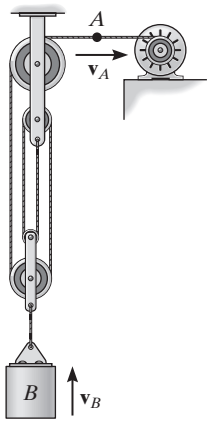
R12-8. El carro B gira de modo que su rapidez se incrementa en $(a_t)_B = (0.5e^t)\ \text{m/s}^2$, donde t está en segundos. Si el carro parte del reposo cuando $\theta = 0°$, determine las magnitudes de su velocidad y aceleración cuando $t = 2$ s. Desprecie el tamaño del carro.



Prob. R12-8

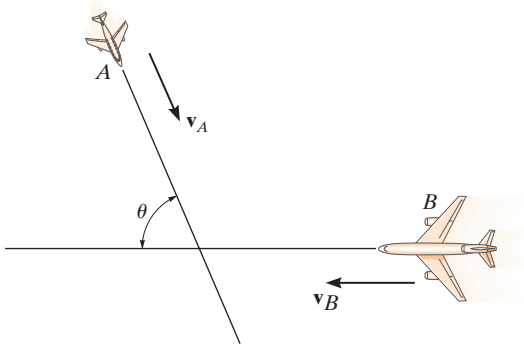
R12-9. Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria circular con 2 m de radio, de modo que su posición en función del tiempo está dada por $\theta = (5t^2)$ rad, donde t se da en segundos. Determine la magnitud de la aceleración de la partícula cuando $\theta = 30°$. La partícula parte del reposo cuando $\theta = 0°$.

R12-10. Determine el tiempo necesario para que la carga en B alcance una rapidez de 8 m/s, partiendo del reposo, si el cable se enrolla en el motor con una aceleración de 0.2 m/s^2.



Prob. R12-10

R12-11. Dos aviones, A y B, vuelan a la misma altitud. Si sus velocidades son $v_A = 600$ km/h y $v_B = 500$ km/h, de modo que el ángulo entre sus trayectos en línea recta es $\theta = 75°$, determine la velocidad del avión B con respecto al avión A.



Prob. R12-11

Capítulo 13

(© Migel/Shutterstock)

Un automóvil que se desplaza a lo largo de esta carretera estará sometido a fuerzas que crean aceleraciones normales y tangenciales. En este capítulo estudiaremos cómo se relacionan tales fuerzas con las aceleraciones que crean.

Cinética de una partícula: fuerza y aceleración

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Formular la segunda ley de Newton del movimiento y definir masa y peso.
- Analizar el movimiento acelerado de una partícula usando la ecuación de movimiento en diferentes sistemas de coordenadas.
- Investigar el movimiento de fuerza central y aplicarlo a problemas de mecánica espacial.

13.1 Segunda ley de Newton del movimiento

La *cinética* es una rama de la dinámica que se ocupa de la relación entre el cambio de movimiento de un cuerpo y las fuerzas que lo provocan. La base de la cinética es la segunda ley de Newton, la cual establece que cuando una *fuerza desbalanceada* actúa en una partícula, ésta se *acelerará* en la dirección de la fuerza con una magnitud que es proporcional a la fuerza.

Esta ley puede verificarse experimentalmente aplicando una fuerza **F** desbalanceada a una partícula y, luego, midiendo la aceleración **a**. Como la fuerza y la aceleración son directamente proporcionales, la constante de proporcionalidad, m, se determina a partir de la relación $m = F/a$. Este escalar positivo m se conoce como *masa* de la partícula. Al permanecer constante durante cualquier aceleración, m mide cuantitativamente la resistencia de la partícula a cualquier cambio en su velocidad, es decir, de su inercia.

El jeep se inclina hacia atrás debido a su inercia, la cual se resiste a su aceleración hacia adelante. (© R. C. Hibbeler)

Si la masa de la partícula es m, la segunda ley de Newton del movimiento se escribe en forma matemática como

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

La ecuación anterior, conocida como la *ecuación de movimiento*, es una de las fórmulas más importante en la mecánica.* Como previamente se enunció, su validez se basa sólo en *evidencia experimental*. En 1905, sin embargo, Albert Einstein desarrolló la teoría de la relatividad e impuso limitaciones al uso de la segunda ley de Newton para describir el movimiento general de una partícula. Mediante experimentos se comprobó que el *tiempo* no es una cantidad absoluta, como supuso Newton; y por consiguiente, la ecuación de movimiento no predice el comportamiento exacto de una partícula, sobre todo cuando su velocidad se aproxima a la velocidad de la luz (0.3 Gm/s). Los desarrollos de la teoría de la mecánica cuántica por parte de Erwin Schrödinger y otros indican, además, que las conclusiones derivadas del uso de esta ecuación también carecen de validez cuando las partículas son del tamaño de un átomo y se mueven muy cerca entre sí. En su mayoría, sin embargo, estos requerimientos en relación con la rapidez y el tamaño de una partícula no se presentan en problemas de ingeniería, por lo que sus efectos no se considerarán en este libro.

Ley de Newton de la atracción gravitacional. Poco tiempo después de formular sus tres leyes del movimiento, Newton postuló una ley que rige la atracción mutua entre dos partículas cualesquiera. En forma matemática esta ley se expresa como

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{13-1}$$

donde

$F =$ fuerza de atracción entre las dos partículas
$G =$ constante de gravitación universal; de acuerdo con pruebas experimentales, $G = 66.73(10^{-12})\text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
$m_1, m_2 =$ masa de cada una de las dos partículas
$r =$ distancia entre los centros de las dos partículas

*Como m es constante, también podemos escribir $\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt$ donde $m\mathbf{v}$ es el momento lineal de la partícula. En este caso la fuerza desbalanceada que actúa en la partícula es proporcional a la razón de cambio del momento lineal de la partícula con respecto del tiempo.

En el caso de una partícula localizada en o cerca de la superficie terrestre, la única fuerza gravitacional de magnitud considerable es la que existe entre la Tierra y la partícula. Esta fuerza se denomina "peso" y, para nuestro propósito, será la única fuerza gravitacional considerada.

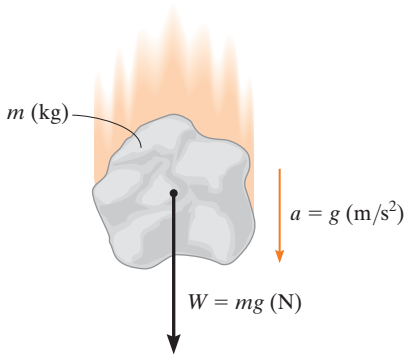
A partir de la ecuación 13-1, podemos desarrollar una expresión general para determinar el peso W de una partícula de masa $m_1 = m$. Sea $m_2 = M_e$ la masa de la Tierra y r la distancia entre el centro de la Tierra y la partícula. Entonces, si $g = GM_e/r^2$, tenemos

$$W = mg$$

Por comparación con $F = ma$, denominamos g a la aceleración de la gravedad. En la mayoría de los cálculos de ingeniería g se mide en un punto sobre la superficie terrestre al nivel del mar y a una latitud de 45°, el cual se considera como el "lugar estándar". Aquí se utilizarán los valores $g = 9.81\ \text{m/s}^2 = 32.2\ \text{ft/s}^2$ en los cálculos.

En el sistema internacional (SI) la masa de un cuerpo se especifica en kilogramos y el peso se calcula con la ecuación anterior, figura 13-1*a*. Por lo tanto,

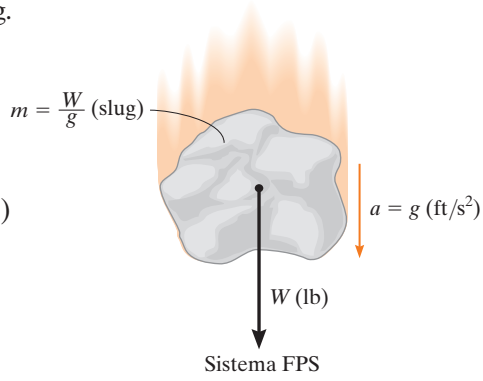
$$W = mg\ (\text{N}) \quad (g = 9.81\ \text{m/s}^2) \tag{13-2}$$



Entonces, un cuerpo de 1 kg de masa pesa 9.81 N; un cuerpo de 2 kg pesa 19.62 N, y así sucesivamente.

En el sistema FPS (pies-libras-segundos) el peso de un cuerpo se especifica en libras. La masa se mide en slugs, un término derivado de "sluggish" (lento, tardo) que se refiere a la inercia del cuerpo. Se calcula (fig. 13-1*b*), con

$$m = \frac{W}{g}\ (\text{slug}) \quad (g = 32.2\ \text{ft/s}^2) \tag{13-3}$$



Por consiguiente, un cuerpo que pesa 32.2 lb tiene una masa de 1 slug; un cuerpo que pesa 64.4 lb tiene una masa de 2 slugs, y así sucesivamente.

Fig. 13-1

(a)

13.2 Ecuación de movimiento

Cuando más de una fuerza actúa en una partícula, la fuerza resultante se determina por medio de una suma vectorial de todas las fuerzas, es decir, $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}$. En este caso, la ecuación de movimiento se escribe como

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{13-4}$$

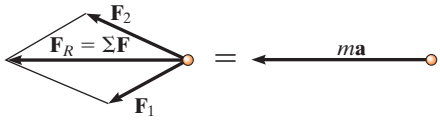


Diagrama de cuerpo libre

Diagrama cinético

(b) (c)

Fig. 13-2

Para ilustrar la aplicación de esta ecuación, considere la partícula mostrada en la figura 13-2*a*, con masa *m* y sometida a la acción de dos fuerzas: $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Gráficamente podemos tener en cuenta la magnitud y dirección de cada una de las fuerzas que actúan en la partícula, si trazamos el *diagrama de cuerpo libre* de la partícula (fig. 13-2*b*). Como la *resultante* de estas fuerzas *produce* el vector $m\mathbf{a}$, su magnitud y dirección se representan gráficamente en el *diagrama cinético*, que se muestra en la figura 13-2*c*.* El signo igual escrito entre los diagramas simboliza la equivalencia *gráfica* entre el diagrama de cuerpo libre y el diagrama cinético, es decir, $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.† En particular, observe que si $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces la aceleración también es cero, de modo que la partícula puede permanecer en *reposo* o moverse a lo largo de una trayectoria rectilínea con *velocidad constante*. Éstas son las condiciones de *equilibrio estático*, la primera ley de Newton del movimiento.

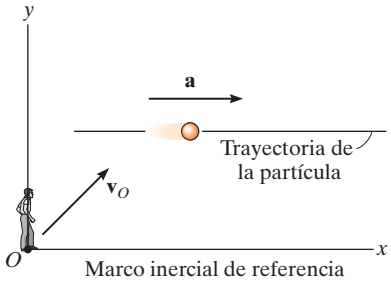


Fig. 13-3

Marco de referencia inercial. Cuando se aplica la ecuación de movimiento, es importante que la aceleración de la partícula se mida con respecto a un marco de referencia que *esté fijo o en traslación con una velocidad constante*. De este modo, el observador no experimentará aceleración y las mediciones de la aceleración de la partícula serán las *mismas* con *cualquier marco de referencia* de este tipo. Tal marco de referencia comúnmente se conoce como *marco de referencia inercial* o *newtoniano* (fig. 13-3).

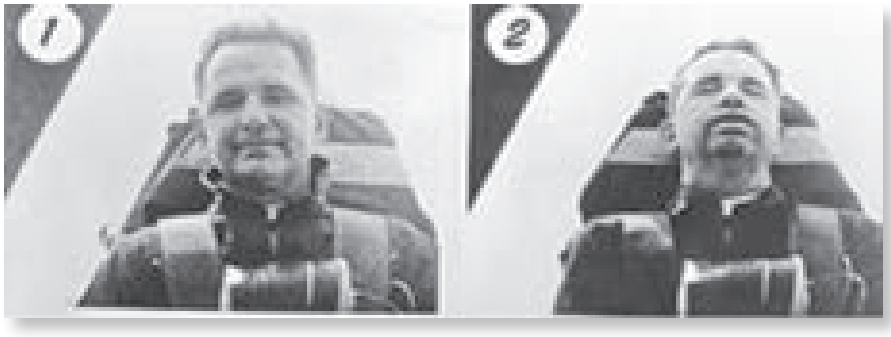
Cuando se estudian los movimientos de cohetes y satélites, se justifica considerar el marco de referencia inercial como fijo en las estrellas, mientras que en los problemas de dinámica que implican movimientos en la superficie terrestre, o cerca de ésta, pueden resolverse con un marco inercial que se supone fijo en la Tierra. Aun cuando la Tierra rota sobre su propio eje y gira alrededor del Sol, las aceleraciones creadas por tales rotaciones son relativamente pequeñas y, por lo tanto, se pueden omitir en la mayoría de las aplicaciones.

*Recuerde que el diagrama de cuerpo libre considera que la partícula está aislada o libre de sus apoyos circundantes, y muestra todas las fuerzas que actúan en ella. El diagrama cinético se refiere al movimiento de la partícula provocado por las fuerzas.

†La ecuación de movimiento también puede reescribirse en la forma $\Sigma\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}$. El vector $-m\mathbf{a}$ se refiere al *vector de la fuerza de inercia*. Si se le trata de la misma forma que a un "vector de fuerza", entonces el estado de "equilibrio" creado se conoce como *equilibrio dinámico*. Este método de aplicación, que no se utilizará en el presente texto, se conoce a menudo como *principio de D'Alambert* nombrado en honor del matemático francés Jean le Rond d'Alambert.

Todos estamos familiarizados con la sensación que se tiene cuando nos sentamos en un automóvil sometido a una aceleración hacia adelante. A menudo pensamos que esto es provocado por una "fuerza" que actúa en nosotros y que tiende a empujarnos hacia atrás en el asiento; sin embargo, no es así. Esta sensación ocurre debido a nuestra inercia o a la resistencia de nuestra masa al cambio de velocidad.

Consideremos al pasajero sujeto al asiento de un trineo propulsado por un cohete. Si el trineo está en reposo o en movimiento a una velocidad constante, no se ejerce ninguna fuerza sobre su espalda.



Keystone/Hulton Archive/
Getty Images

Cuando el empuje del motor del cohete acelera el trineo, el asiento en el cual está sentado el pasajero ejerce una fuerza **F** sobre él y lo empuja hacia adelante junto con el trineo. Observe en la fotografía, que la inercia de su cabeza resiste este cambio en el movimiento (aceleración) y, por lo tanto, ésta se mueve hacia atrás contra el asiento, y su cara, la cual no es rígida, tiende a distorsionase hacia atrás.

Keystone/Hulton Archive/
Getty Images

Al desacelerarse la fuerza del cinturón del asiento **F′** tiende a jalar su cuerpo para detenerlo, pero su cabeza pierde el contacto con el respaldo del asiento y su cara se distorsiona hacia delante, de nuevo debido a su inercia o tendencia a continuar en movimiento hacia delante. Ninguna fuerza lo jala hacia delante, aunque ésta sea la sensación que percibe.

Keystone/Hulton Archive/
Getty Images

13

13.3 Ecuación de movimiento de un sistema de partículas

La ecuación del movimiento se ampliará ahora para incluir un sistema de partículas aislado dentro de una región cerrada del espacio, como se indica en la figura 13-4*a*. En particular, no existe ninguna restricción en cuanto a la forma en que las partículas están conectadas, por lo que el siguiente análisis se aplica igualmente bien al movimiento de un sistema líquido, sólido o gaseoso.

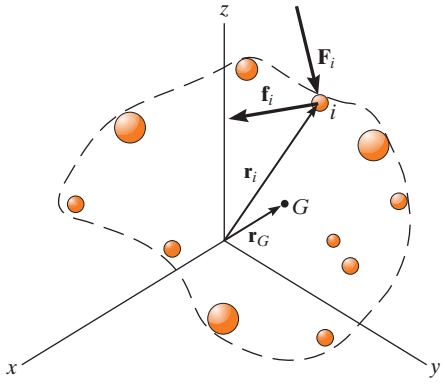
En el instante considerado, la partícula i-ésima, de masa m_i, se somete a un sistema de fuerzas internas y a una fuerza externa resultante. La *fuerza interna*, representada simbólicamente como $\mathbf{f}_i$, es la resultante de todas las fuerzas que las demás partículas ejercen en la partícula i-ésima. La *fuerza externa resultante* $\mathbf{F}_i$ representa, por ejemplo, el efecto de las fuerzas gravitacional, eléctrica, magnética o de contacto entre la partícula i-ésima y los cuerpos o las partículas adyacentes *no* incluidas dentro del sistema.

Los diagramas de cuerpo libre y cinético de la partícula i-ésima se muestran en la figura 13-4*b*. Al aplicar la ecuación de movimiento,

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}; \qquad \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = m_i \mathbf{a}_i$$

Cuando se aplica la ecuación de movimiento a cada una de las demás partículas del sistema, se obtienen ecuaciones similares. Y, si todas estas ecuaciones se suman *vectorialmente*, entonces

$$\Sigma \mathbf{F}_i + \Sigma \mathbf{f}_i = \Sigma m_i \mathbf{a}_i$$



Sistema de coordenadas inercial

(a) (b)

Fig. 13-4

La suma de las fuerzas internas, si se realiza, es igual a cero, ya que las fuerzas internas entre dos partículas ocurren en pares colineales iguales pero opuestos. En consecuencia, sólo prevalecerá la suma de las fuerzas externas y, por consiguiente, la ecuación de movimiento escrita para el sistema de partículas es

$$\Sigma \mathbf{F}_i = \Sigma m_i \mathbf{a}_i \tag{13-5}$$

Si $\mathbf{r}_G$ es un vector de posición que se dirige al *centro de masa G* de las partículas (fig. 13-4*a*), entonces por definición del centro de masa $m\mathbf{r}_G = \sum m_i \mathbf{r}_i$, donde $m = \sum m_i$ es la masa total de todas las partículas. Al diferenciar esta ecuación dos veces con respecto al tiempo y suponer que ninguna masa entra al sistema o sale de éste, se obtiene

$$m\mathbf{a}_G = \Sigma m_i \mathbf{a}_i$$

Si sustituimos este resultado en la ecuación 13-5, obtenemos

$$\boxed{\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G} \tag{13-6}$$

Por consiguiente, la suma de las fuerzas externas que actúan en el sistema de partículas es igual a la masa total de las partículas multiplicada por la aceleración de su centro de masa *G*. Como en realidad todas las partículas deben tener un tamaño finito para que posean masa, la ecuación 13-6 justifica la aplicación de la ecuación de movimiento a un *cuerpo* representado como una partícula única.

Puntos importantes

- La ecuación de movimiento se basa en pruebas experimentales y es válida sólo cuando se aplica dentro de un marco de referencia inercial.
- La ecuación de movimiento establece que la *fuerza desbalanceada* aplicada a una partícula la *acelera*.
- Un marco de referencia inercial no gira, sino más bien sus ejes o se trasladan a velocidad constante o están en reposo.
- La masa es una propiedad de la materia que proporciona una medida cuantitativa de su resistencia a un cambio en la velocidad. Es una cantidad absoluta y, por ende, no cambia de un lugar a otro.
- El peso es una fuerza provocada por la gravitación terrestre. No es absoluta; más bien, depende de la altitud de la masa con respecto a la superficie terrestre.

13

13.4 Ecuaciones de movimiento: coordenadas rectangulares

Cuando una partícula se mueve con respecto a un marco de referencia inercial x, y, z, las fuerzas que actúan en la partícula, lo mismo que su aceleración, pueden expresarse en función de sus componentes **i**, **j**, **k** (fig. 13-5). Al aplicar la ecuación de movimiento, tenemos

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}; \qquad \Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k} = m(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})$$

Para que esta ecuación se satisfaga, las componentes **i**, **j**, **k** del lado izquierdo deben ser iguales a las componentes correspondientes del lado derecho. Por consiguiente, podemos escribir las siguientes tres ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_x \\ \Sigma F_y &= ma_y \\ \Sigma F_z &= ma_z \end{aligned} \tag{13-7}$$

En particular, si la partícula está limitada a moverse sólo en el plano x-y, entonces se utilizan las primeras dos ecuaciones anteriores para especificar el movimiento.

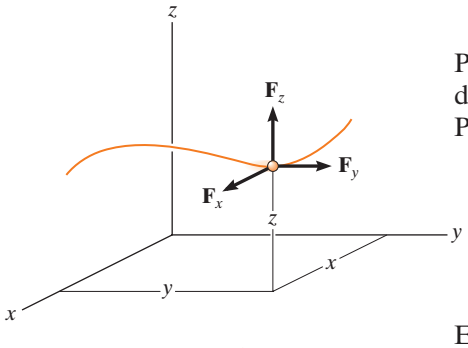


Fig. 13-5

Procedimiento para el análisis

Las ecuaciones de movimiento se utilizan para resolver problemas que requieren una relación entre las fuerzas que actúan en una partícula y el movimiento acelerado que ocasionan.

Diagrama de cuerpo libre

- Seleccione el sistema de coordenadas inercial. Por lo general, se eligen coordenadas rectangulares o x, y, z para analizar problemas en los cuales la partícula tiene *movimiento rectilíneo*.
- Una vez que se establecen las coordenadas, trace el diagrama de cuerpo libre de la partícula. Dibujar este diagrama es *muy importante*, ya que proporciona una representación gráfica que incluye *todas las fuerzas* (ΣF) que actúan en la partícula y, por lo tanto, es posible descomponer estas fuerzas en sus componentes x, y, z.
- La dirección y el sentido de la aceleración de la partícula **a** también debe establecerse. Si se desconoce el sentido, por conveniencia matemática, suponga que el sentido de cada componente de aceleración actúa en la *misma dirección* que su eje de coordenadas inercial *positivo*.
- La aceleración puede representarse como el vector ma en el diagrama cinético*.
- Identifique las incógnitas en el problema.

* En este texto por convención se utiliza siempre el diagrama cinético como auxiliar gráfico, cuando se desarrollan las comprobaciones y la teoría. En los ejemplos, la aceleración de la partícula o sus componentes se mostrarán como vectores de color azul cerca del diagrama de cuerpo libre.

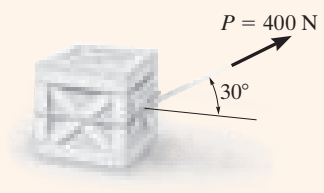
Ecuaciones de movimiento

- Si las fuerzas pueden descomponerse directamente con el diagrama de cuerpo libre, aplique las ecuaciones de movimiento en su forma de componentes escalares.
- Si la geometría del problema parece complicada, lo que a menudo ocurre en tres dimensiones, puede utilizarse el análisis vectorial cartesiano para la solución.
- *Fricción*. Si una partícula en movimiento se pone en contacto con una superficie rugosa, quizá sea necesario utilizar la *ecuación de la fuerza de fricción,* la cual relaciona las fuerzas de fricción y normales $\mathbf{F}_f$ y $\mathbf{N}$ que actúan en la superficie de contacto mediante el coeficiente de fricción cinética, es decir, $F_f = \mu_k N$. Recuerde que $\mathbf{F}_f$ siempre actúa en el diagrama de cuerpo libre opuesta al movimiento de la partícula con respecto a la superficie con la que está en contacto. Si la partícula se encuentra *a punto* de moverse relativamente con respecto a la superficie rugosa, entonces se utilizará el coeficiente de fricción estática.
- *Resorte*. Si la partícula está conectada a un *resorte elástico* de masa despreciable, la fuerza F_s del resorte puede relacionarse con su deformación mediante la ecuación $F_s = ks$. Aquí k es la rigidez del resorte medida como una fuerza por unidad de longitud, y s es el alargamiento o la compresión, definidos como la diferencia entre la longitud deformada l y la longitud no deformada l_0, es decir, $s = l - l_0$.

Cinemática

- Si se tiene que determinar la velocidad o la posición de la partícula, será necesario aplicar las ecuaciones cinemáticas necesarias, una vez que se determina la aceleración de la partícula con $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$.
- Si la *aceleración* es una función del tiempo, use $a = dv/dt$ y $v = ds/dt$ que, cuando se integran, sirven para calcular la velocidad y posición de la partícula, respectivamente.
- Si la *aceleración* es una función del desplazamiento, integre $a\,ds = v\,dv$ para obtener la velocidad en función de la posición.
- Si la *aceleración es constante*, use $v = v_0 + a_c t$, $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$, $v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$ para determinar la velocidad o la posición de la partícula.
- Si el problema implica el movimiento dependiente de varias partículas, use el método descrito en la sección 12.9 para relacionar sus aceleraciones. En todos los casos, asegúrese de que las direcciones de las coordenadas inerciales positivas usadas en las ecuaciones cinemáticas sean las mismas que las que se utilizaron para escribir las ecuaciones de movimiento; de lo contrario, la solución simultánea de las ecuaciones conducirá a errores.
- Si la solución para una componente vectorial desconocida da un escalar negativo, ello indica que la componente actúa en la dirección opuesta a la supuesta.

EJEMPLO 13.1



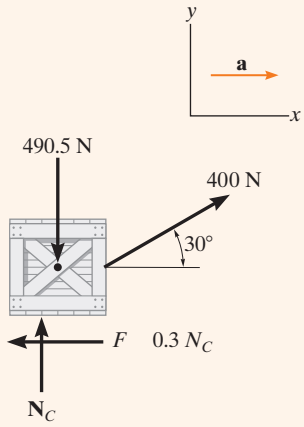
(a)

El embalaje de 50 kg mostrado en la figura 13-6*a* descansa sobre una superficie horizontal, cuyo coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.3$. Si el embalaje se somete a una fuerza de tracción de 400 N como se muestra, determine su velocidad en 3 s, si partió del reposo.

SOLUCIÓN

Si utilizamos las ecuaciones de movimiento, podemos relacionar la aceleración del embalaje con la fuerza que ocasiona el movimiento. La velocidad del embalaje se determina entonces por medio de cinemática.

Diagrama de cuerpo libre. El peso del embalaje es $W = mg = 50$ kg $(9.81\ \text{m/s}^2) = 490.5$ N. Como se muestra en la figura 13-6*b*, la magnitud de la fuerza de fricción es $F = \mu_k N_C$ y actúa hacia la izquierda, ya que se opone al movimiento del embalaje. Se supone que la aceleración **a** actúa horizontalmente, en la dirección x positiva. Existen dos incógnitas, que son N_C y a.



(b)

Fig. 13-6

Ecuaciones de movimiento. Con los datos mostrados en el diagrama de cuerpo libre, tenemos

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad 400\cos 30° - 0.3N_C = 50a \tag{1}$$

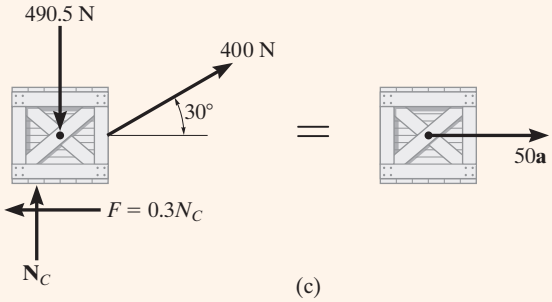
$$+\uparrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad N_C - 490.5 + 400\,\text{sen}\,30° = 0 \tag{2}$$

Al despejar la ecuación 2 para N_C y sustituyendo el resultado en la ecuación 1, y al despejar a se obtiene

$$N_C = 290.5\ \text{N}$$
$$a = 5.185\ \text{m/s}^2$$

Cinemática. Observe que la aceleración es *constante*, ya que la fuerza aplicada **P** también lo es. Como la velocidad inicial es cero, la velocidad del embalaje en 3 s es

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad v = v_0 + a_c t = 0 + 5.185(3)$$
$$= 15.6\ \text{m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

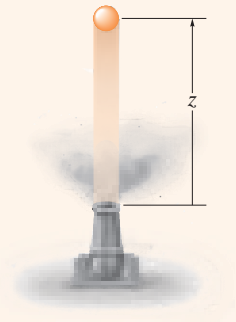


(c)

NOTA: También podemos utilizar el procedimiento alternativo que consiste en dibujar el diagrama de cuerpo libre *y* el diagrama cinético del embalaje (fig. 13-6*c*), antes de aplicar las ecuaciones de movimiento.

EJEMPLO 13.2

Se dispara un proyectil de 10 kg verticalmente hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de 50 m/s (fig. 13-7*a*). Determine la altura máxima a la que llegará si (*a*) se ignora la resistencia atmosférica; y (*b*) la resistencia atmosférica se mide como $F_D = (0.01v^2)$ N, donde v es la rapidez del proyectil en cualquier instante, medida en m/s.



(a)

SOLUCIÓN

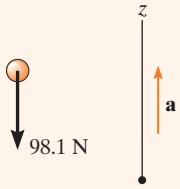
En ambos casos la fuerza conocida que actúa en el proyectil puede relacionarse con su aceleración por medio de la ecuación de movimiento. Puede utilizarse entonces la cinemática para relacionar la aceleración del proyectil con su posición.

Parte (a) Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 13-7*b*, el peso del proyectil es $W = mg = 10(9.81) = 98.1$ N. Supondremos que la aceleración **a** desconocida actúa hacia arriba en la dirección z *positiva*.

Ecuación de movimiento

$$+\uparrow \Sigma F_z = ma_z; \qquad -98.1 = 10a, \qquad a = -9.81 \text{ m s}^2$$

El resultado indica que el proyectil, como todo objeto que tiene movimiento de vuelo libre cerca de la superficie terrestre, se ve sometido a una aceleración *constante* dirigida hacia abajo de 9.81 m/s^2.

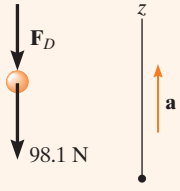


(b)

Cinemática. Inicialmente $z_0 = 0$ y $v_0 = 50$ m/s y a la altura máxima $z = h$, $v = 0$. Como la aceleración es *constante*, entonces

$$(+\uparrow) \qquad v^2 = v_0^2 + 2a_c(z - z_0)$$
$$0 = (50)^2 + 2(-9.81)(h - 0)$$
$$h = 127 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

Parte (b) Diagrama de cuerpo libre. Como la fuerza $F_D = (0.01v^2)$ N tiende a retardar el movimiento hacia arriba del proyectil, actúa hacia abajo como se indica en el diagrama de cuerpo libre (fig. 13-7*c*).



(c)

Fig. 13-7

Ecuación de movimiento

$$+\uparrow \Sigma F_z = ma_z; \qquad -0.01v^2 - 98.1 = 10a, \qquad a = -(0.001v^2 + 9.81)$$

Cinemática. Aquí la aceleración *no es constante* puesto que F_D depende de la velocidad. Como $a = f(v)$, podemos relacionar a con la posición mediante

$$(+\uparrow)\, a\, dz = v\, dv; \qquad -(0.001v^2 + 9.81)\, dz = v\, dv$$

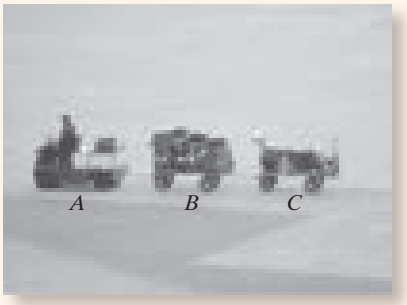
Al separar las variables e integrarlas, y como inicialmente $z_0 = 0$, $v_0 = 50$ m/s (positiva hacia arriba), y en $z = h$, $v = 0$, tenemos

$$\int_0^h dz = -\int_{50 \text{ m/s}}^{0} \frac{v\, dv}{0.001v^2 + 9.81} = -500 \ln(v^2 + 9810)\Big|_{50 \text{ m/s}}^{0}$$

$$h = 114 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

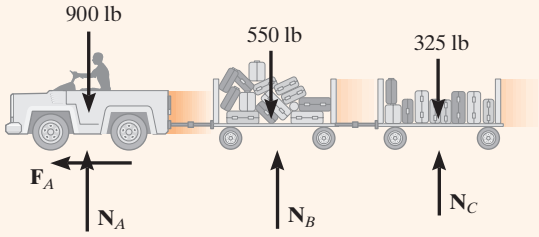
NOTA: La respuesta indica una altura más baja que la obtenida en la parte (*a*) debido a la resistencia atmosférica o resistencia al avance.

EJEMPLO 13.3



(© R. C. Hibbeler)

El furgón del equipaje A que se muestra en la fotografía pesa 900 lb y remolca un carro de 550 lb y un carro C de 325 lb. Durante un corto tiempo la fuerza de fricción desarrollada en las ruedas del furgón es $F_A = (40t)$ lb, donde t está en segundos. Si el furgón arranca del reposo, determine su rapidez en 2 segundos. Además, ¿cuál es la fuerza horizontal que actúa en el acoplamiento entre el furgón y el carro B en este instante? Ignore el tamaño del furgón y de los carros.



(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 13-8*a*, es la fuerza de fricción la que acelera tanto al furgón como a los carros. En este caso, consideramos los tres vehículos como un solo sistema.

Ecuación de movimiento. Se tiene que considerar únicamente el movimiento en la dirección horizontal.

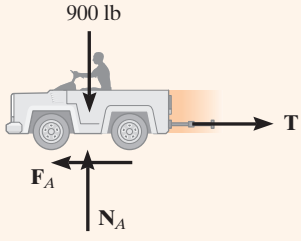
$$\stackrel{+}{\leftarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad 40t = \left(\frac{900 + 550 + 325}{32.2}\right)a$$

$$a = 0.7256t$$

Cinemática. Como la aceleración es una función del tiempo, la velocidad del furgón se obtiene mediante $a = dv/dt$ con la condición inicial de que $v_0 = 0$ en $t = 0$. Entonces,

$$\int_0^v dv = \int_0^{2\text{ s}} 0.7256t\, dt; \qquad v = 0.3628t^2\Big|_0^{2\text{ s}} = 1.45 \text{ ft/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Diagrama de cuerpo libre. Para determinar la fuerza entre el furgón y el carro B consideraremos el diagrama de cuerpo libre del furgón para que podamos "expresar" la fuerza de acoplamiento **T** como externa al diagrama de cuerpo libre (fig. 13-8*b*).



(b)

Fig. 13-8

Ecuación de movimiento. Cuando $t = 2$ *s*, entonces

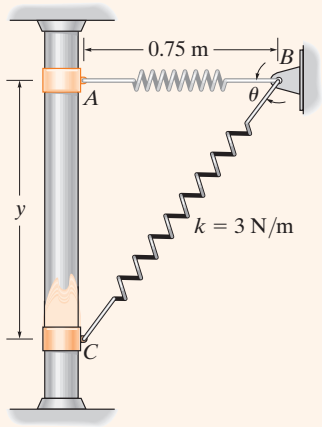
$$\stackrel{+}{\leftarrow} \Sigma F_x = ma_x: \qquad 40(2) - T = \left(\frac{900}{32.2}\right)[0.7256(2)]$$

$$T = 39.4 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Pruebe y obtenga este mismo resultado considerando el diagrama de cuerpo libre de los carros B y C como un solo sistema.

EJEMPLO 13.4

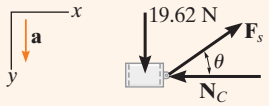
Un collar liso de 2 kg C, como se muestra en la figura 13-9*a*, está conectado a un resorte que tiene una rigidez de $k = 3$ N/m y una longitud sin alargar de 0.75 m. Si el collar se suelta del reposo en A, determine su aceleración y la fuerza normal de la varilla sobre él en el instante $y = 1$ m.



(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del collar cuando está en la posición arbitraria y se muestra en la figura 13-9*b*. Además, se *supone* que el collar se acelera de modo que "**a**" actúa hacia abajo en la dirección y *positiva*. Existen cuatro incógnitas, que son N_C, F_s, a y θ.



(b)

Fig. 13-9

Ecuaciones de movimiento

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad -N_C + F_s \cos\theta = 0 \tag{1}$$

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad 19.62 - F_s \operatorname{sen}\theta = 2a \tag{2}$$

A partir de la ecuación 2 se observa que la aceleración depende de la magnitud y la dirección de la fuerza del resorte. La solución para N_C y a es posible una vez que se conocen F_s y θ.

La magnitud de la fuerza del resorte es una función del alargamiento s del resorte; es decir, $F_s = ks$. En este caso, la longitud sin estirar es $AB = 0.75$ m (fig. 13-9*a*), por consiguiente, $s = CB - AB = \sqrt{y^2 + (0.75)^2} - 0.75$. Como $k = 3$ N/m, entonces

$$F_s = ks = 3\left(\sqrt{y^2 + (0.75)^2} - 0.75\right) \tag{3}$$

Como se muestra en la figura 13-9*a*, el ángulo θ está relacionado con y por trigonometría.

$$\tan\theta = \frac{y}{0.75}$$

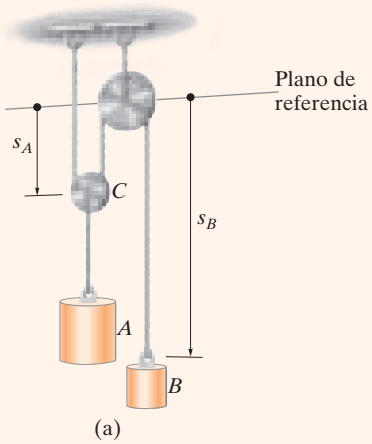
Al sustituir $y = 1$ m en las ecuaciones 3 y 4 se obtiene $F_s = 1.50$ N y $\theta = 53.1°$. Al sustituir estos resultados en las ecuaciones 1 y 2, obtenemos

$$N_C = 0.900 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$a = 9.21 \text{ m/s}^2 \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

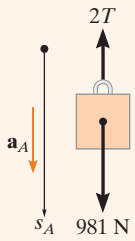
NOTA: Éste no es un caso de aceleración constante, puesto que la fuerza del resorte cambia tanto de magnitud como de dirección a medida que el collar se mueve hacia abajo.

EJEMPLO 13.5

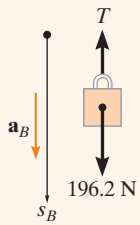


(a)

(b)



(c)



(d)

Fig. 13-10

El bloque A de 100 kg mostrado en la figura 13-10*a* se suelta del reposo. Si no se toman en cuenta las masas de las poleas y las cuerdas, determine la velocidad del bloque B de 20 kg en 2 s.

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre. Como se *ignora* la masa de las poleas, entonces para la polea C, $ma = 0$ y podemos aplicar $\Sigma F_y = 0$ como se muestra en la figura 13-10*b*. En las figuras 13-10*c* y *d* se muestran los diagramas de cuerpo libre para los bloques A y B, respectivamente. Observe que para que A permanezca estacionario $T = 490.5$ N, mientras que para que B permanezca estático $T = 196.2$ N. De ahí que A se mueve hacia abajo mientras que B se mueve hacia arriba. Aunque éste es el caso, supondremos que ambos bloques se aceleran hacia abajo, en la dirección de $+s_A$ y $+s_B$. Las tres incógnitas son T, a_A y a_B.

Ecuaciones de movimiento. Bloque A,

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad 981 - 2T = 100a_A \tag{1}$$

Bloque B,

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad 196.2 - T = 20a_B \tag{2}$$

Cinemática. La tercera ecuación necesaria se obtiene al relacionar a_A con a_B mediante un análisis de movimiento dependiente, analizado en la sección 12.9. Las coordenadas s_A y s_B en la figura 13-10*a* miden las posiciones de A y B con respecto al plano de referencia fijo. Se observa que

$$2s_A + s_B = l$$

donde l es constante y representa la longitud vertical total de la cuerda. Al diferenciar esta expresión dos veces con respecto al tiempo se obtiene.

$$2a_A = -a_B \tag{3}$$

Observe que cuando se escribieron las ecuaciones 1 a 3, la *dirección positiva siempre se supuso hacia abajo.* Es muy importante ser *consistentes* en esta suposición, ya que buscamos una solución simultánea de las ecuaciones. Los resultados son

$$T = 327.0 \text{ N}$$
$$a_A = 3.27 \text{ m/s}^2$$
$$a_B = -6.54 \text{ m/s}^2$$

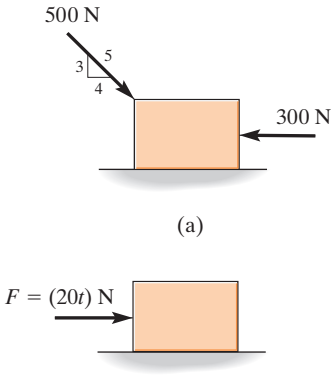
De ahí que cuando el bloque A se acelera *hacia abajo*, el bloque B se acelera *hacia arriba* como se esperaba. Como a_B es constante, la velocidad del bloque B en 2 s es, por lo tanto,

$$(+\downarrow) \qquad v = v_0 + a_B t$$
$$= 0 + (-6.54)(2)$$
$$= -13.1 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

El signo negativo indica que el bloque B se mueve hacia arriba.

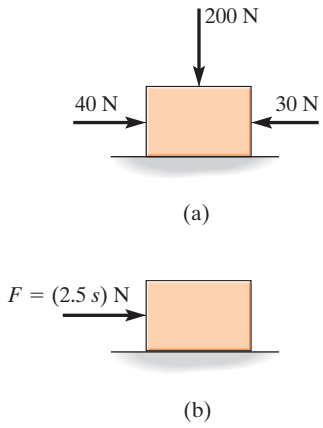
PROBLEMAS PRELIMINARES

P13-1. El bloque de 10 kg se somete a las fuerzas mostradas. En cada caso, determine su velocidad en $t = 2$ s si $v = 0$ cuando $t = 0$.



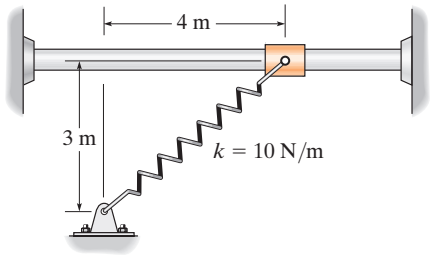
Prob. P13-1

P13-2. El bloque de 10 kg se somete a las fuerzas mostradas. En cada caso, determine su velocidad en $s = 8$ m, si $v = 3$ m/s cuando $s = 0$. El movimiento se produce hacia la derecha.



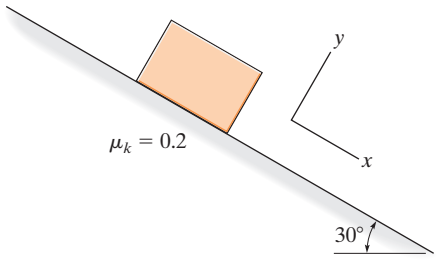
Prob. P13-2

P13-3. Determine la aceleración inicial del collarín liso de 10 kg. El resorte tiene una longitud sin estirar de 1 m.



Prob. P13-3

P13-4. Escriba las ecuaciones de movimiento en la direcciones x y y para el bloque de 10 kg.

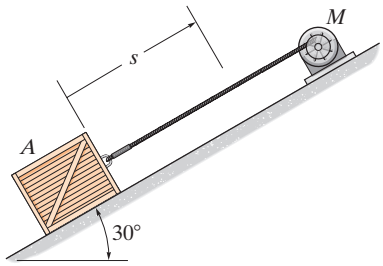


Prob. P13-4

13

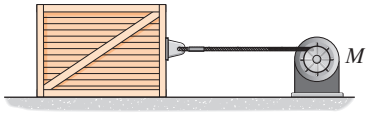
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F13-1. El motor enrolla el cable con una aceleración constante, de modo que el embalaje de 20 kg se mueve una distancia $s = 6$ m en 3 s, a partir del reposo. Determine la tensión desarrollada en el cable. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el plano es $\mu_k = 0.3$.



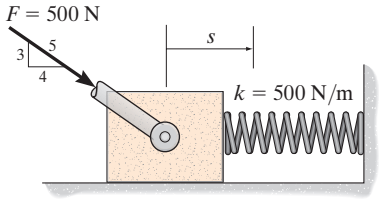
Prob. F13-1

F13-2. Si el motor ejerce una fuerza $F = (10t^2 + 100)$ N en el cable, donde t está en segundos, determine la velocidad del embalaje de 25 kg cuando $t = 4$ s. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el embalaje y el plano son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.25$, respectivamente. En un inicio el embalaje está en reposo.



Prob. F13-2

F13-3. Un resorte de rigidez $k = 500$ N/m está montado contra el bloque de 10 kg. Si éste se somete a la fuerza de $F = 500$ N, determine su velocidad en $s = 0.5$ m. Cuando $s = 0$, el bloque está en reposo y el resorte no está comprimido. La superficie de contacto es lisa.

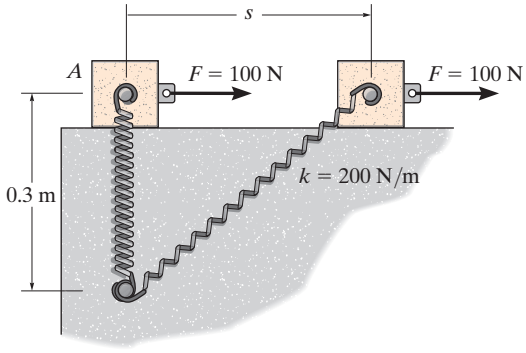


Prob. F13-3

F13-4. Al automóvil de 2 Mg lo remolca un malacate. Si éste ejerce una fuerza de $T = 100(s + 1)$ N en el cable, donde s es el desplazamiento del auto en metros, determine la rapidez del automóvil cuando $s = 10$ m, a partir del reposo. Ignore la resistencia a rodar del automóvil.

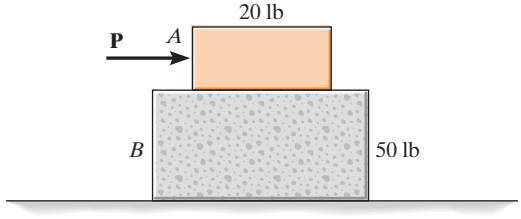
Prob. F13-4

F13.5. La rigidez del resorte es $k = 200$ N/m y no está estirado cuando el bloque de 25 kg está en A. Determine la aceleración del bloque cuando $s = 0.4$ m. La superficie de contacto entre el bloque y el plano es lisa.



Prob. F13-5

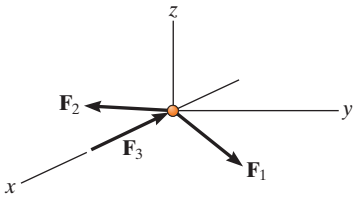
F13-6. El bloque B descansa sobre una superficie lisa. Si los coeficientes de fricción estática y cinética entre A y B son $\mu_s = 0.4$ y $\mu_k = 0.3$, respectivamente, determine la aceleración de cada bloque si $P = 6$ lb.



Prob. F13-6

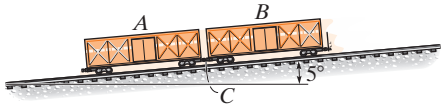
PROBLEMAS

13-1. La partícula de 6 lb se somete a la acción de su peso y de las fuerzas $\mathbf{F}_1 = \{2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}\}$ lb, $\mathbf{F}_2 = \{t^2\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} - 1\mathbf{k}\}$ lb y $\mathbf{F}_3 = \{-2t\mathbf{i}\}$ lb, donde t se da en segundos. Determine la distancia medida desde el origen a la que está la bola, 2 s después de haber sido liberada desde el reposo.



Prob. 13-1

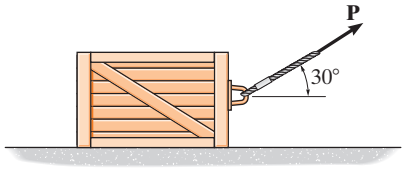
13-2. Los dos vagones de carga A y B pesan 20 000 lb y 30 000 lb, respectivamente. Si ruedan libremente pendiente abajo cuando se aplican los frenos a todas las ruedas del vagón A, lo cual lo hace patinar, determine la fuerza en el acoplamiento C entre los dos vagones. El coeficiente de fricción cinética entre las ruedas de A y los rieles es $\mu_k = 0.5$. Las ruedas del carro B giran libremente. Ignore su masa en el cálculo. *Sugerencia:* Resuelva el problema considerando de forma independiente los diagramas de cuerpo libre de los vagones A y B.



Prob. 13-2

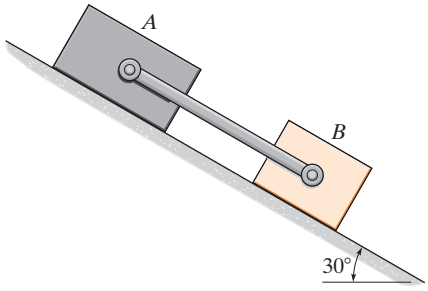
13-3. Si el coeficiente de fricción cinética entre el embalaje de 50 kg y el suelo es $\mu_k = 0.3$, determine la distancia que recorre y su velocidad cuando $t = 3$ s. El embalaje parte desde el reposo y $P = 200$ N.

***13-4.** Si el embalaje de 50 kg parte del reposo y alcanza una velocidad de $v = 4$ m/s al recorrer una distancia de 5 m hacia la derecha, determine la magnitud de la fuerza $\mathbf{P}$ que actúa sobre el embalaje. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el suelo es $\mu_k = 0.3$.



Probs. 13-3/4

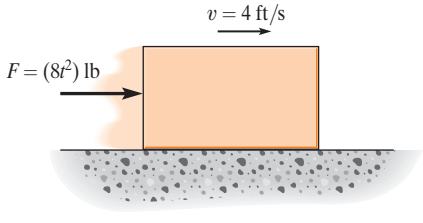
13-5. Si los bloques A y B de 10 kg y 6 kg de masa, respectivamente, se colocan sobre el plano inclinado y se sueltan, determine la fuerza desarrollada en el eslabón. Los coeficientes de fricción cinética entre los bloques y el plano inclinado son $\mu_A = 0.1$ y $\mu_B = 0.3$. Desprecie la masa del eslabón.



Prob. 13-5

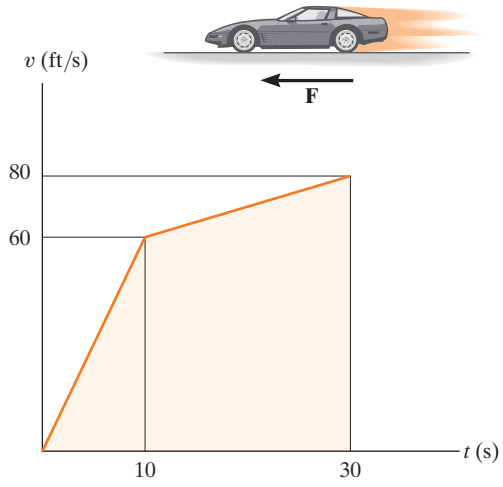
13-6. El bloque de 10 lb tiene una rapidez de 4 ft/s cuando se le aplica la fuerza $F = (8t^2)$ lb. Determine la velocidad del bloque cuando $t = 2$ s. El coeficiente de fricción cinética en la superficie es $\mu_k = 0.2$.

13-7. El bloque de 10 1b tiene una rapidez de 4 ft/s cuando se le aplica la fuerza $F = (8t^2)$ lb. Determine la velocidad del bloque cuando se mueve $s = 30$ ft. El coeficiente de fricción cinética en la superficie es $\mu_s = 0.2$.



Probs. 13-6/7

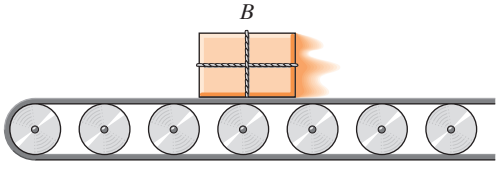
***13-8.** La gráfica representa la rapidez del automóvil deportivo de 3500 lb para el periodo de tiempo de 30 s. Grafique la variación de la fuerza de tracción **F** necesaria para producir el movimiento.



Prob. 13-8

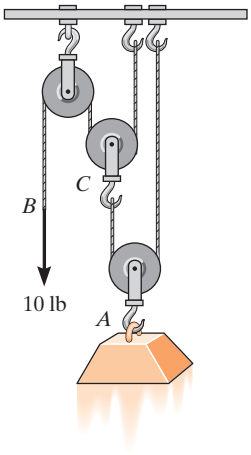
13-9. La banda transportadora se mueve a 4 m/s. Si el coeficiente de fricción estática entre la banda y el paquete B de 10 kg es $\mu_s = 0.2$, determine el tiempo más corto en el que puede detenerse la banda, de modo que el paquete no se deslice sobre ella.

13-10. La banda transportadora está diseñada para trasladar paquetes de diversos pesos. Cada paquete de 10 kg tiene un coeficiente de fricción cinética $\mu_k = 0.15$. Si la rapidez de la banda transportadora es de 5 m/s y después se detiene repentinamente, determine la distancia que se desliza el paquete sobre la banda antes de llegar al reposo.



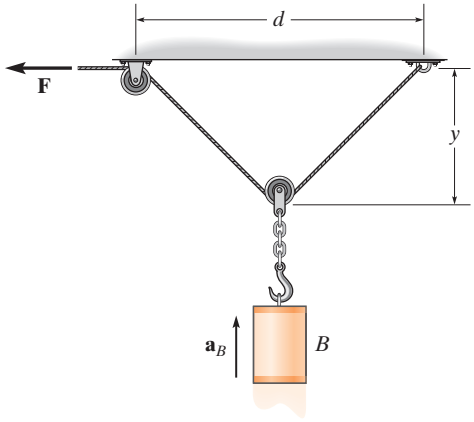
Probs. 13-9/10

13-11. Determine el tiempo necesario para jalar 4 ft hacia abajo la cuerda en B, si parte desde el reposo y se aplica una fuerza de 10 lb a la cuerda. El bloque A pesa 20 lb. Desprecie la masa de las poleas y las cuerdas.



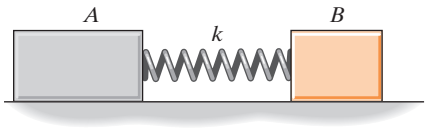
Prob. 13-11

***13-12.** El cilindro B tiene una masa m y se eleva usando la cuerda y el sistema de poleas ilustrado. Determine la magnitud de la fuerza **F** en función de la posición vertical y del bloque, de modo que al aplicar **F** el bloque se eleva con una aceleración constante $\mathbf{a}_B$. Desprecie la masa de la cuerda y las poleas.



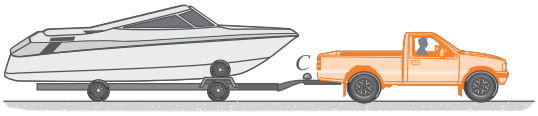
Prob. 13-12

13-13. El bloque A tiene un peso de 8 lb y el bloque B tiene un peso de 6 lb. Descansan sobre una superficie cuyo coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.2$. Si el resorte tiene una rigidez de $k = 20$ lb/ft y está comprimido 0.2 ft, determine la aceleración de cada bloque justo después de liberarse.



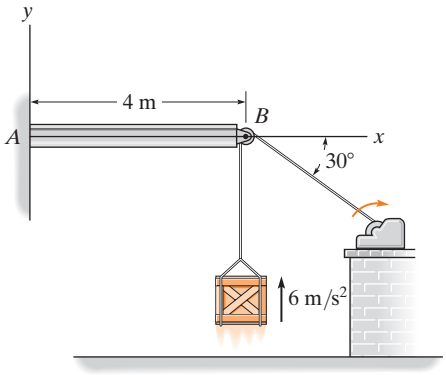
Prob. 13-13

13-14. La camioneta de 2 Mg está viajando a 15 m/s cuando se aplican los frenos en todas sus ruedas, de tal manera que patina una distancia de 10 m antes de llegar al reposo. Determine la fuerza horizontal constante desarrollada en el acoplamiento C, y la fuerza de fricción desarrollada entre los neumáticos de la camioneta y la carretera durante este tiempo. La masa total de la lancha y el remolque es de 1 Mg.



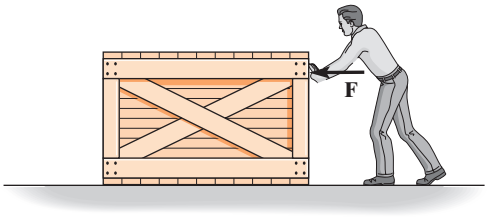
Prob. 13-14

13-15. El motor eleva el embalaje de 50 kg con una aceleración de 6 m/s^2. Determine las componentes de la fuerza de reacción y el momento de par en el soporte fijo A.



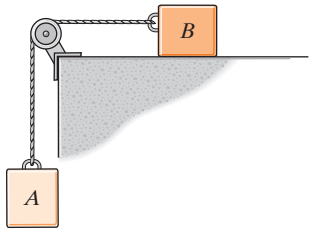
Prob. 13-15

***13-16.** El hombre de 75 kg empuja el embalaje de 150 kg con una fuerza horizontal **F**. Si los coeficientes de fricción estática y cinética entre el embalaje y la superficie son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.2$, y el coeficiente de fricción estática entre los zapatos del hombre y la superficie es $\mu_s = 0.8$, demuestre que el hombre es capaz de mover el embalaje. ¿Cuál es la mayor aceleración que el hombre puede dar al embalaje?



Prob. 13-16

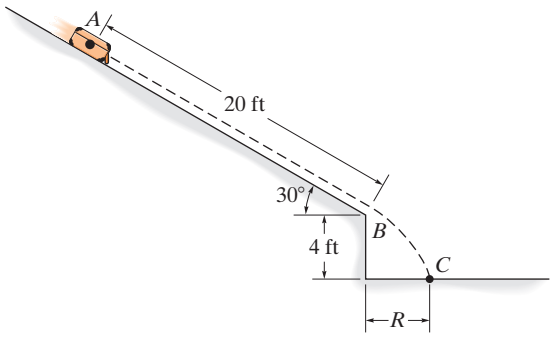
13-17. Determine la aceleración de los bloques cuando se libera el sistema. El coeficiente de fricción cinética es μ_k y la masa de cada bloque es m. Desprecie la masa de las poleas y la cuerda.



Prob. 13-17

13-18. Una maleta 40 lb se desliza desde el reposo 20 pies hacia abajo de la rampa lisa. Determine el punto donde golpea el suelo en C. ¿Cuánto tiempo se tarda en ir de A a C?

13-19. Resuelva el problema 13-18 si la maleta tiene una velocidad inicial de $v_A = 10$ ft/s, paralela a la rampa y hacia abajo, y el coeficiente de fricción cinética a lo largo de AB es $\mu_k = 0.2$.

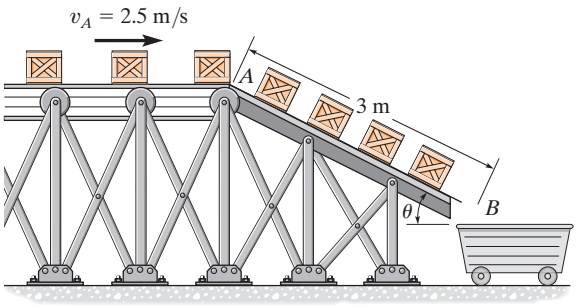


Probs. 13-18/19

13

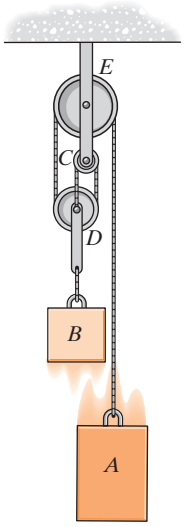
***13-20.** La banda transportadora traslada cada embalaje de 12 kg hacia la rampa en A, de modo que la rapidez del embalaje es $v_A = 2.5$ m/s, dirigida *a lo largo* de la rampa. Si el coeficiente de fricción cinética entre cada embalaje y la rampa es $\mu_k = 0.3$, determine la rapidez a la que se desliza cada embalaje sobre la rampa en B. Suponga que no se vuelca. Considere que $\theta = 30°$.

13-21. La banda transportadora traslada cada embalaje de 12 kg hacia la rampa en A, de modo que la rapidez del embalaje es $v_A = 2.5$ m/s, dirigida *a lo largo* de la rampa. Si el coeficiente de fricción cinética entre cada embalaje y la rampa es $\mu_k = 0.3$, determine la inclinación θ más pequeña de la rampa tal que los embalajes se deslizan y caen en el carro.



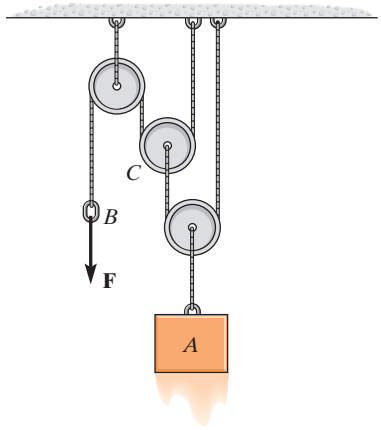
Probs. 13-20/21

13-22. El bloque A de 50 kg se libera desde el reposo. Determine la velocidad del bloque B de 15 kg en 2 s.



Prob. 13-22

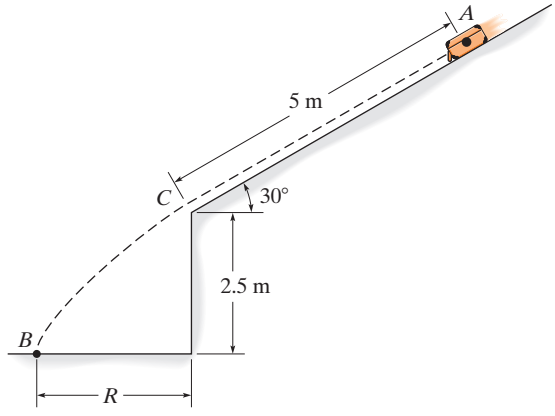
13-23. Si la fuerza suministrada es $F = 150$ N, determine la velocidad del bloque A de 50 kg, si éste se ha elevado 3 m y parte desde el reposo.



Prob. 13-23

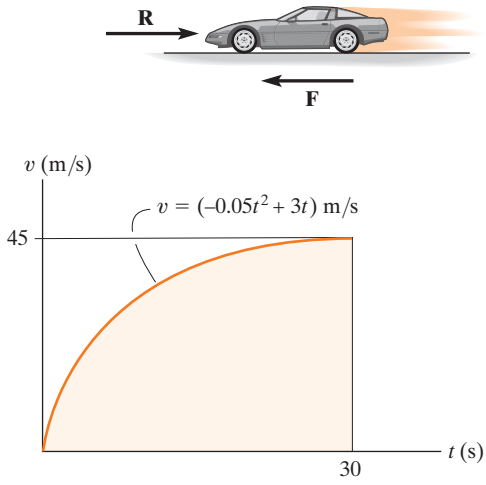
***13-24.** Una maleta de 60 kg se desliza desde el reposo 5 m hacia abajo sobre la rampa lisa. Determine la distancia R a la que golpea el suelo en B. ¿Cuánto tiempo tarda en ir desde A hasta B?

13-25. Resuelva el problema 13-24 si la maleta tiene una velocidad inicial, hacia abajo paralela a la rampa, de $v_A = 2$ m/s y el coeficiente de fricción cinética a lo largo de AC es $\mu_k = 0.2$.



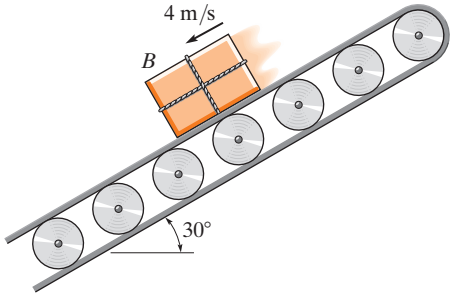
Probs. 13-24/25

13-26. El auto deportivo de 1.5 Mg tiene una fuerza de tracción de $F = 4.5$ kN. Si produce la velocidad descrita por la gráfica de v-t mostrada, grafique la resistencia R del aire contra t para este periodo de tiempo.



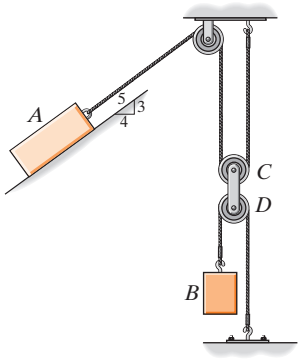
Prob. 13-26

13-27. La banda transportadora se mueve hacia abajo a 4 m/s. Si el coeficiente de fricción estática entre la banda y el paquete B de 15 kg es $\mu_s = 0.8$, determine el tiempo más corto en el que la banda se puede detener, de modo que el paquete no se deslice sobre ella.



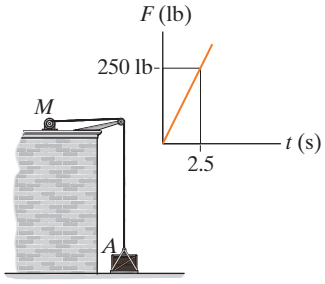
Prob. 13-27

***13-28.** En el instante mostrado, el bloque A de 100 lb está bajando por el plano a 5 ft/s y está unido al bloque B de 50 lb. Si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano inclinado es $\mu_k = 0.2$, determine la aceleración de A y la distancia que se desliza A antes de detenerse. Desprecie la masa de las poleas y los cables.



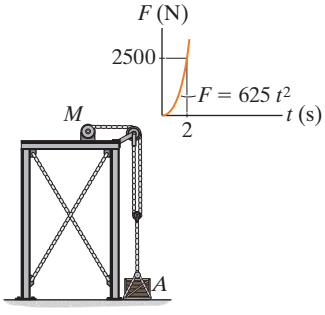
Prob. 13-28

13-29. En la gráfica se muestra la fuerza ejercida por el motor sobre el cable. Determine la velocidad del embalaje de 200 lb cuando $t = 2.5$ s.



Prob. 13-29

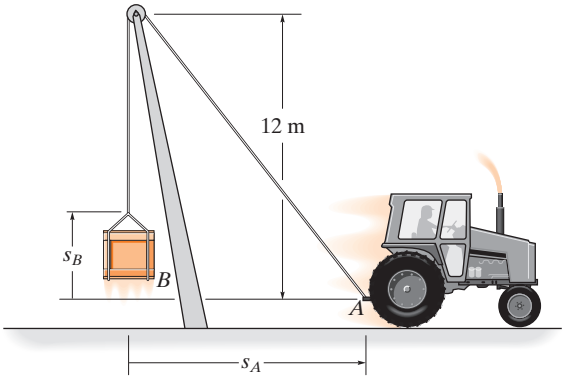
13-30. En la gráfica se muestra la fuerza del motor M sobre el cable. Determine la velocidad del embalaje A de 400 kg cuando $t = 2$ s.



Prob. 13-30

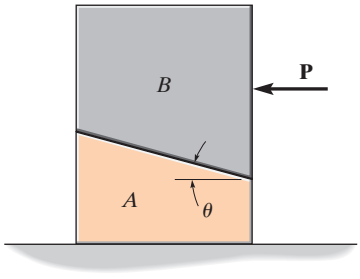
13-31. Se utiliza el tractor para levantar la carga B de 150 kg con el sistema que consiste de una cuerda de 24 m de largo, una grúa tipo pluma y una polea. Si el tractor se desplaza hacia la derecha a una rapidez constante de 4 m/s, determine la tensión en la cuerda si $s_A = 5$ m. Cuando $s_A = 0, s_B = 0$.

***13-32.** Se utiliza el tractor para levantar la carga B de 150 kg con el sistema que consiste de una cuerda de 24 m de largo, una grúa tipo pluma y una polea. Si el tractor se desplaza hacia la derecha con una aceleración de 3 m/s^2 y tiene una velocidad de 4 m/s en el instante en que $s_A = 5$ m, determine la tensión en la cuerda en este instante. Cuando $s_A = 0, s_B = 0$.



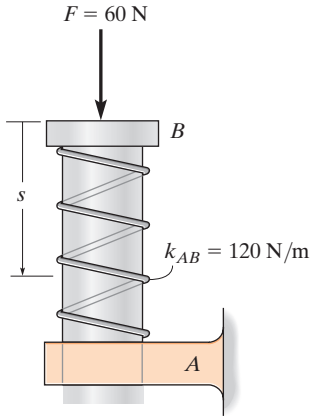
Probs. 13-31/32

13-33. Los bloques A y B tienen una masa m. Determine la mayor fuerza horizontal **P** que se puede aplicar a B de modo que no se deslice sobre A. Además, ¿cuál es la aceleración correspondiente? El coeficiente de fricción estática entre A y B es μ_s. Desprecie la fricción entre A y la superficie horizontal.



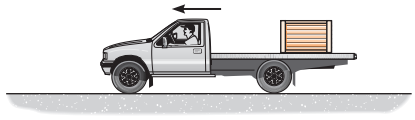
Prob. 13-33

13-34. El cilindro liso de 4 kg se sostiene mediante el resorte que tiene una rigidez de $k_{AB} = 120$ N/m. Determine la velocidad del cilindro cuando se mueve hacia abajo $s = 0.2$ m, por la aplicación de la fuerza $F = 60$ N, desde su posición de equilibrio.



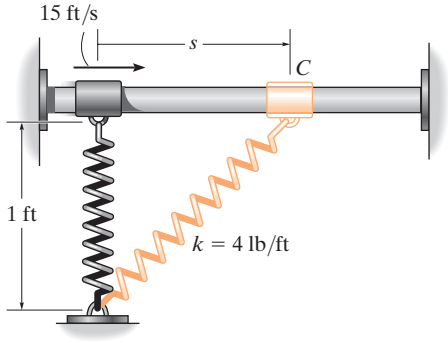
Prob. 13-34

13-35. El coeficiente de fricción estática entre el embalaje de 200 kg y la plataforma plana de la camioneta es $\mu_s = 0.3$. Determine el tiempo más corto para que la camioneta alcance una rapidez de 60 km/h, si parte desde el reposo con aceleración constante, de modo que el embalaje no se deslice.



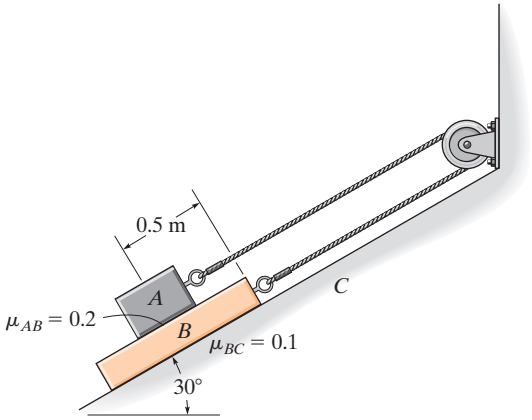
Prob. 13-35

***13-36.** El collarín de 2 lb C se ajusta holgadamente en el eje liso. Si el resorte no está estirado cuando $s = 0$ y al collarín se le da una velocidad de 15 ft/s, determine la velocidad del collarín cuando $s = 1$ ft.



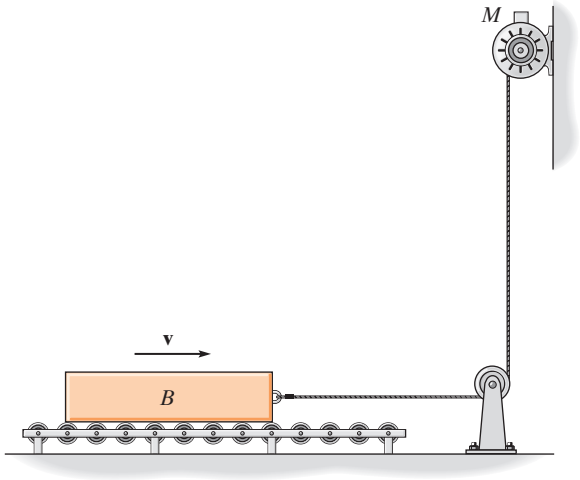
Prob. 13-36

13-37. El bloque A de 10 kg descansa sobre la placa B de 50 kg en la posición mostrada. Si se desprecia la masa de la cuerda y la polea, y se usan los coeficientes de fricción cinética indicados, determine el tiempo necesario para que el bloque A se deslice 0.5 m *sobre la placa* cuando el sistema se libera desde el reposo.



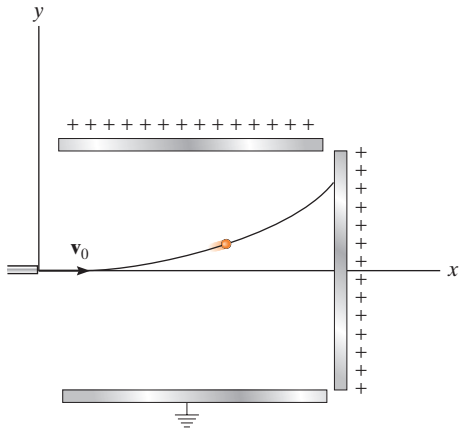
Prob. 13-37

13-38. La barra B de 300 kg, inicialmente en reposo, está siendo trasladada mediante una serie de rodillos pequeños. Determine la fuerza en el cable cuando $t = 5$ s, si el motor M enrolla el cable durante un corto tiempo a razón de $v = (0.4\,t^2)$ m/s, donde t se da en segundos ($0 \le t \le 6$ s). ¿Hasta qué distancia se mueve la barra en 5 s? Desprecie la masa del cable, la polea y los rodillos.



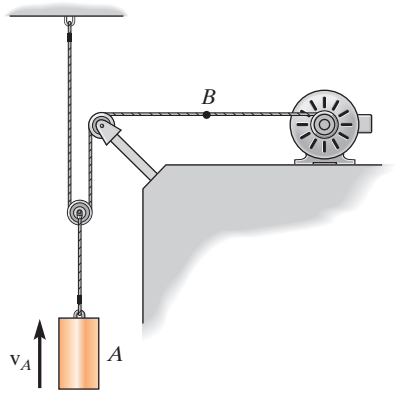
Prob. 13-38

13-39. Un electrón de masa m se libera con una velocidad horizontal inicial de $\mathbf{v}_0$. Si se somete a dos campos de fuerza para los cuales $F_x = F_0$ y $F_y = 0.3F_0$, donde F_0 es constante, determine la ecuación de la trayectoria y la rapidez del electrón en cualquier instante t.



Prob. 13-39

***13-40.** El cilindro de 400 lb en A se eleva usando el motor y el sistema de poleas mostrado. Si la rapidez del punto B en el cable se incrementa a una razón constante desde cero hasta $v_B = 10$ ft/s en $t = 5$ s, determine la tensión en el cable en B para ocasionar el movimiento.

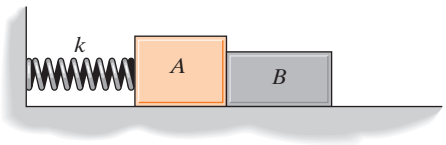


Prob. 13-40

13

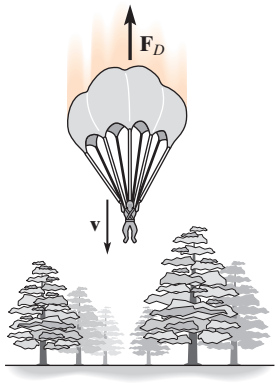
13-41. El bloque A tiene una masa m_A y está unido a un resorte que tiene una rigidez k y una longitud sin estirar l_0. Si otro bloque B, que tiene una masa m_B, se presiona contra A de modo que el resorte se deforma una distancia d, determine la distancia que ambos bloques se deslizan sobre la superficie lisa antes de que comiencen a separarse. ¿Cuál es su velocidad en ese instante?

13-42. El bloque A tiene una masa m_A y está unido a un resorte que tiene una rigidez k y una longitud no estirada l_0. Si otro bloque B, que tiene una masa m_B, se presiona contra A de modo que el resorte se deforma una distancia d, demuestre que para que se produzca la separación es necesario que $d > 2\mu_k g(m_A + m_B)/k$, donde μ_k es el coeficiente de fricción cinética entre los bloques y el suelo. Además, ¿cuál es la distancia que los bloques se deslizan sobre la superficie antes de separarse?



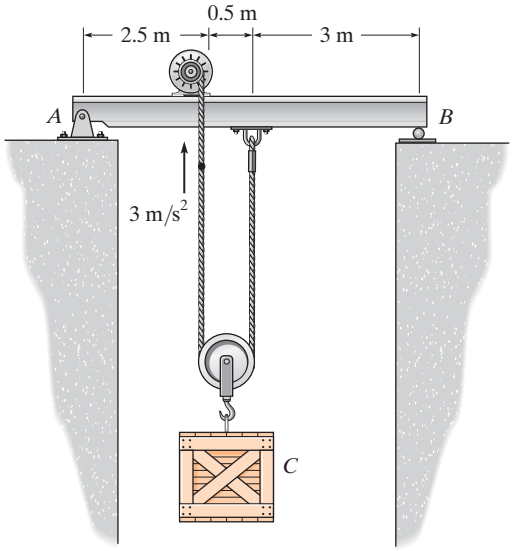
Probs. 13-41/42

13-43. Un paracaidista que tiene una masa m abre su paracaídas desde una posición de reposo a una gran altura. Si la fuerza de arrastre atmosférica es $F_D = kv^2$, donde k es una constante, determine su velocidad cuando ha caído por un tiempo t. ¿Cuál es su velocidad cuando aterriza en el suelo? Esta velocidad se conoce como *velocidad terminal* y se encuentra al considerar que el tiempo de caída $t \to \infty$.



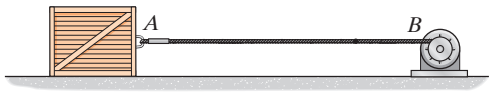
Prob. 13-43

***13-44.** Si el motor enrolla el cable con una aceleración de 3 m/s^2, determine las reacciones en los apoyos A y B. La viga tiene una masa uniforme de 30 kg/m y el embalaje tiene una masa de 200 kg. Desprecie la masa del motor y las poleas.



Prob. 13-44

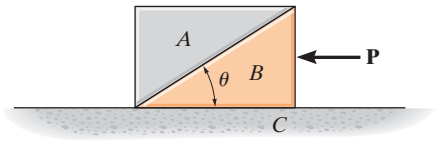
13-45. Si la fuerza ejercida sobre el cable AB por el motor es $F = (100t^{3/2})$ N, donde t se da en segundos, determine la velocidad del embalaje de 50 kg cuando $t = 5$ s. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el embalaje y el suelo son $\mu_s = 0.4$ y $\mu_k = 0.3$, respectivamente. En un inicio, el embalaje está en reposo.



Prob. 13-45

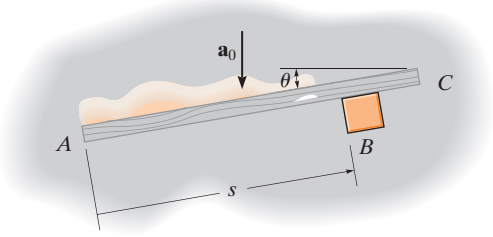
13-46. La masa de los bloques A y B es m. Determine la fuerza horizontal **P** máxima que puede aplicarse a B, de modo que A no se mueva con respecto a B. Todas las superficies son lisas.

13-47. La masa de los bloques A y B es m. Determine la fuerza horizontal **P** máxima que puede aplicarse a B, de modo que A no se deslice con respecto a B. El coeficiente de fricción estática entre A y B es μ_s. Desprecie la fricción entre B y C.



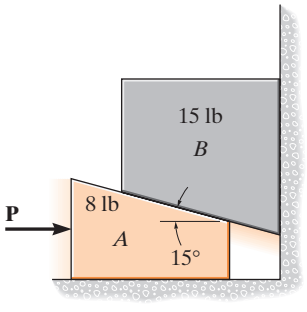
Probs. 13-46/47

***13-48.** El bloque liso B de tamaño despreciable tiene una masa m y descansa sobre el plano horizontal. Si la tabla AC empuja el bloque en un ángulo θ con una aceleración constante $\mathbf{a}_0$, determine la velocidad del bloque a lo largo de la tabla y la distancia s que se mueve el bloque a lo largo de la tabla en función del tiempo t. El bloque parte del reposo cuando $s = 0, t = 0$.



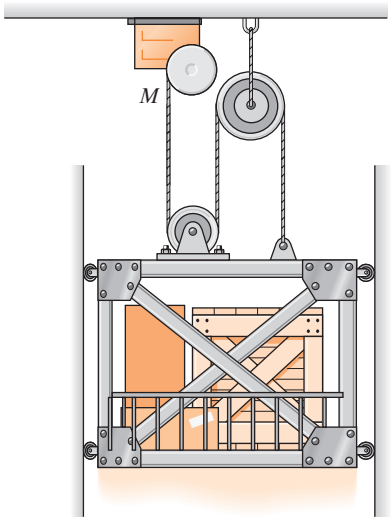
Prob. 13-48

13-49. Si se aplica una fuerza horizontal $P = 12$ lb al bloque A, determine la aceleración del bloque B. Desprecie la fricción.



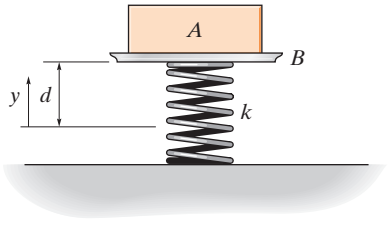
Prob. 13-49

13-50. Un elevador y su carga tienen una masa de 1 Mg. La rotación se evita mediante los rieles y las ruedas montadas en sus costados. Si el motor M desarrolla una tensión constante $T = 4$ kN en el cable conectado al elevador, determine la velocidad del ascensor cuando se ha movido 6 m hacia arriba partiendo desde el reposo. Desprecie la masa de las poleas y los cables.



Prob. 13-50

13-51. El bloque A tiene una masa m_A y descansa sobre la bandeja B, que tiene una masa m_B. Ambos se apoyan sobre un resorte que tiene una rigidez k y éste está unido a la parte inferior de la bandeja y al suelo. Determine la distancia d que la bandeja debería empujarse hacia abajo desde la posición de equilibrio y que parta del reposo, de modo que ocurra una separación del bloque con respecto a la superficie de la bandeja, en el instante que el resorte regresa a su posición sin estirar.



Prob. 13-51

13

13.5 Ecuaciones de movimiento: coordenadas normales y tangenciales

Cuando una partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria curva conocida, su ecuación de movimiento puede escribirse en las direcciones tangencial, normal y binormal (fig. 13-11). Observe que la partícula no se mueve en la dirección binormal, ya que está limitada a moverse a lo largo de la trayectoria. Tenemos

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\Sigma F_t \mathbf{u}_t + \Sigma F_n \mathbf{u}_n + \Sigma F_b \mathbf{u}_b = m\mathbf{a}_t + m\mathbf{a}_n$$

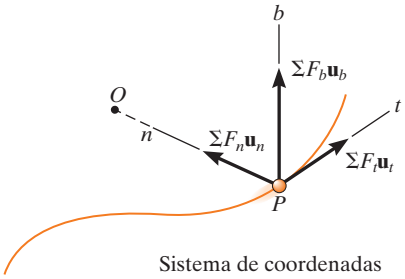
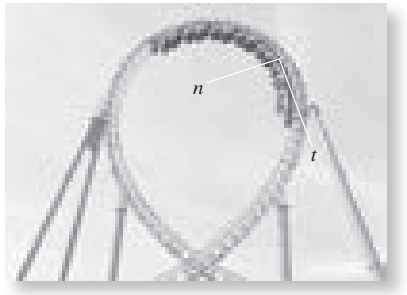


Fig. 13-11

Esta ecuación se satisface siempre que

$$\begin{aligned} \Sigma F_t &= ma_t \\ \Sigma F_n &= ma_n \\ \Sigma F_b &= 0 \end{aligned} \tag{13-8}$$

Recuerde que a_t $(= dv/dt)$ representa la razón de cambio de la magnitud de la velocidad con respecto del tiempo. Por lo tanto, si $\Sigma \mathbf{F}_t$ actúa en la dirección del movimiento, la rapidez de la partícula se incrementará; mientras que si actúa en la dirección opuesta, la partícula se desacelerará. Asimismo, a_n $(= v^2/\rho)$ representa la razón de cambio de la dirección de la velocidad con respecto del tiempo. Ésta es provocada por $\Sigma \mathbf{F}_n$, que *siempre* actúa en la dirección n positiva, es decir, hacia el centro de curvatura de la trayectoria. Por eso a menudo se conoce como *fuerza centrípeta*.



La fuerza desequilibrada de la cuerda sobre el esquiador le proporciona una componente normal de aceleración. (© R. C. Hibbeler)

Procedimiento para el análisis

Cuando un problema implica el movimiento de una partícula a lo largo de una *trayectoria curva conocida*, en el análisis se utilizarán coordenadas normales y tangenciales, ya que las componentes de aceleración son fáciles de formular. El método para aplicar las ecuaciones de movimiento, las cuales relacionan las fuerzas con las aceleraciones, se describió en el procedimiento explicado en la sección 13-4. Específicamente, para las coordenadas t, n, b se puede formular como sigue:

Diagrama de cuerpo libre

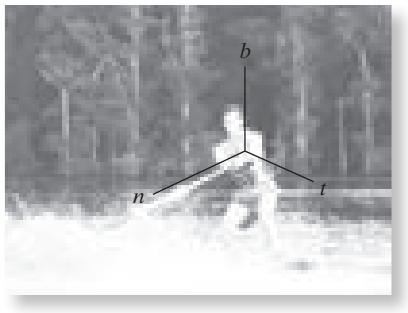
- Establezca el sistema de coordenadas t, n, b inercial en la partícula y trace el diagrama de cuerpo libre de ésta.
- La aceleración normal de la partícula $\mathbf{a}_n$ *siempre* actúa en la dirección n positiva.
- Si se desconoce la aceleración tangencial $\mathbf{a}_t$, suponga que actúa en la dirección t positiva.
- No hay aceleración en la dirección b.
- Identifique las incógnitas en el problema.

Ecuaciones de movimiento

- Aplique las ecuaciones de movimiento, ecuaciones 13-8.

Cinemática

- Formule las componentes normales y tangenciales de la aceleración; es decir, $a_t = dv/dt$ o bien $a_t = v\, dv/ds$ y $a_n = v^2/\rho$.
- Si la trayectoria se define como $y = f(x)$, el radio de curvatura en el punto donde la partícula está localizada se obtiene con $\rho = [1 + (dy/dx)^2]^{3/2}/|d^2y/dx^2|$.

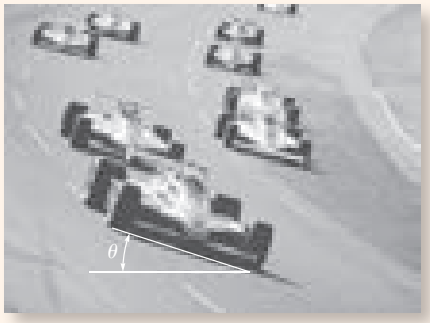


La fuerza desequilibrada de la cuerda sobre el esquiador le proporciona una componente normal de aceleración. (© R. C. Hibbeler)

13

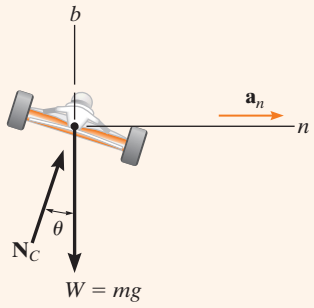
EJEMPLO 13.6

Determine el ángulo de inclinación θ de la pista para que las llantas de los autos de carreras mostrados en la figura 13-12*a* no dependan de la fricción y no se deslicen hacia arriba o hacia abajo de la pista. Suponga que el tamaño de los automóviles es insignificante, que su masa es m y que se desplazan alrededor de la curva de radio ρ a una rapidez constante v.



(a)

(© R. C. Hibbeler)



(b)

Fig. 13-12

SOLUCIÓN

Antes de analizar la siguiente solución, pensemos en por qué debería resolverse por medio de las coordenadas t, n, b.

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 13-12*b* y como se enunció en el problema, en el automóvil no actúa ninguna fuerza de fricción. En este caso $\mathbf{N}_C$ representa la *resultante* del suelo en las cuatro ruedas. Como a_n puede calcularse, las incógnitas son N_C y θ.

Ecuaciones de movimiento. Con los ejes n, b mostrados,

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_n = ma_n; \qquad N_C \operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{\rho} \tag{1}$$

$$+\uparrow \Sigma F_b = 0; \qquad N_C \cos\theta - mg = 0 \tag{2}$$

Al eliminar N_C y m de estas ecuaciones mediante la división de la ecuación 1 entre la ecuación 2, obtenemos

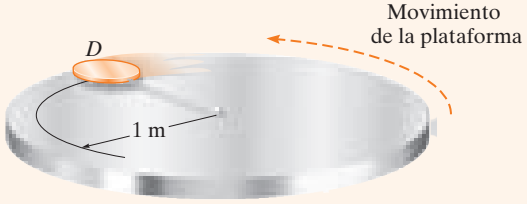
$$\tan\theta = \frac{v^2}{g\rho}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{g\rho}\right) \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: El resultado es independiente de la masa del automóvil. Además, una suma de fuerzas en la dirección tangencial no afecta la solución. Si se hubiera considerado, entonces $a_t = dv/dt = 0$, ya que el automóvil se desplaza a *rapidez constante*. Un análisis adicional de este problema se aborda en el problema 21-53.

EJEMPLO 13.7

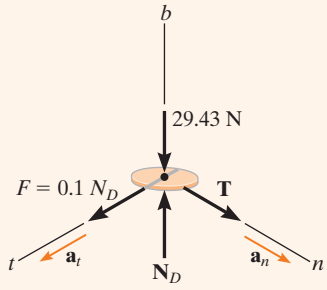
El disco D de 3 kg está sujeto al extremo de una cuerda como se muestra en la figura 13-13*a*. El otro extremo de la cuerda está sujeto a una articulación de rótula ubicada en el centro de una plataforma. Si ésta gira con rapidez y el disco se coloca sobre ella y se suelta desde el reposo, como se muestra, determine el tiempo que le lleva alcanzar una rapidez lo bastante grande como para romper la cuerda. La tensión máxima que la cuerda puede soportar es 100 N y el coeficiente de fricción cinética entre el disco y la plataforma es $\mu_k = 0.1$



(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. La magnitud de la fuerza de fricción es $F = \mu_k N_D = 0.1 N_D$ y su sentido en la dirección que se opone al *movimiento relativo* del disco con respecto de la plataforma. Esta fuerza es la que le imprime al disco una componente tangencial de aceleración que hace que v se incremente, por lo que T aumenta hasta que alcanza 100 N. El peso del disco es $W = 3(9.81) = 29.43$ N. Como a_n puede relacionarse con v, las incógnitas son N_D, a_t y v.



(b)

Fig. 13-13

Ecuaciones de movimiento

$$\Sigma F_n = ma_n; \qquad T = 3\left(\frac{v^2}{1}\right) \tag{1}$$

$$\Sigma F_t = ma_t; \qquad 0.1N_D = 3a_t \tag{2}$$

$$\Sigma F_b = 0; \qquad N_D - 29.43 = 0 \tag{3}$$

Con $T = 100$ N, la ecuación 1 puede resolverse para la velocidad crítica v_{cr} del disco necesaria para romper la cuerda. Al resolver todas las ecuaciones, obtenemos

$$N_D = 29.43 \text{ N}$$

$$a_t = 0.981 \text{ m/s}^2$$

$$v_{\text{cr}} = 5.77 \text{ m/s}$$

Cinemática. Como a_t es *constante*, el tiempo requerido para romper la cuerda es

$$v_{\text{cr}} = v_0 + a_t t$$

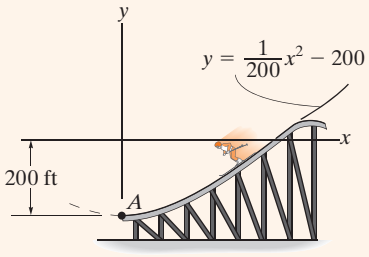
$$5.77 = 0 + (0.981)t$$

$$t = 5.89 \text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

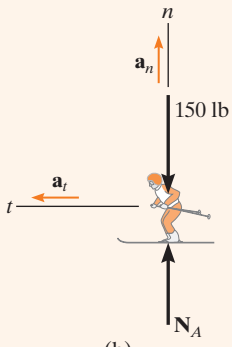
EJEMPLO 13.8

(© R. C. Hibbeler)

El diseño de la rampa de salto de esquís que se muestra en la fotografía requiere conocer el tipo de fuerzas que se ejercerán en la esquiadora y su trayectoria aproximada. Si en este caso la rampa se puede representar de forma aproximada por la parábola de la figura 13-14*a*, determine la fuerza normal en la esquiadora de 150 lb en el momento en que llega al extremo de la rampa, punto *A*, donde su velocidad es de 65 ft/s. Además, ¿cuál es su aceleración en este punto?



(a)



(b)

Fig. 13-14

SOLUCIÓN

¿Por qué consideramos utilizar coordenadas *n*, *t* para resolver este problema?

Diagrama de cuerpo libre. Dado que $dy/dx = x/100|_{x=0} = 0$, la pendiente en *A* es horizontal. El diagrama de cuerpo libre de la esquiadora cuando está en *A* se muestra en la figura 13-14*b*. Como la trayectoria es *curva*, existen dos componentes de aceleración, $\mathbf{a}_n$ y $\mathbf{a}_t$. Puesto que a_n puede calcularse, las incógnitas son a_t y N_A.

Ecuaciones de movimiento

$$+\uparrow \Sigma F_n = ma_n; \qquad N_A - 150 = \frac{150}{32.2}\left(\frac{(65)^2}{\rho}\right) \tag{1}$$

$$\pm \Sigma F_t = ma_t; \qquad 0 = \frac{150}{32.2}a_t \tag{2}$$

El radio de curvatura ρ de la trayectoria debe determinarse en el punto *A* (0, −200 ft). Aquí $y = \frac{1}{200}x^2 - 200$, $dy/dx = \frac{1}{100}x$, $d^2y/dx^2 = \frac{1}{100}$, de modo que en $x = 0$,

$$\rho = \left.\frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}\right|_{x=0} = \frac{[1 + (0)^2]^{3/2}}{|\frac{1}{100}|} = 100 \text{ ft}$$

Si sustituimos este valor en la ecuación 1 y despejamos N_A, obtenemos

$$N_A = 347 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

Cinemática. A partir de la ecuación 2,

$$a_t = 0$$

Por lo tanto,

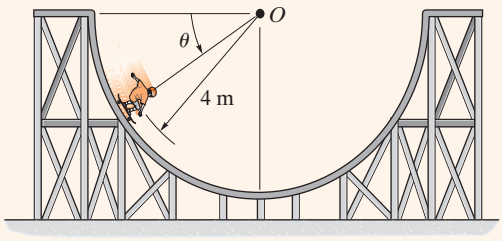
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(65)^2}{100} = 42.2 \text{ ft/s}^2$$

$$a_A = a_n = 42.2 \text{ ft/s}^2 \uparrow \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Aplique la ecuación de movimiento en la dirección *y* y demuestre que cuando la esquiadora está en el aire su aceleración hacia abajo es de 32.2 ft/s^2.

EJEMPLO 13.9

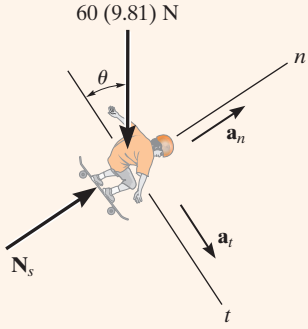
El patinador de 60 kg que aparece en la figura 13-15*a* se desliza cuesta abajo de la pista circular. Si parte del reposo cuando $\theta = 0°$, determine la magnitud de la reacción normal que la pista ejerce en él cuando $\theta = 60°$. Desprecie su tamaño en el cálculo.



(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del patinador cuando está en una *posición arbitraria* θ se muestra en la figura 13-15*b*. En $\theta = 60°$ hay tres incógnitas, N_s, a_t y a_n (o v).



(b)

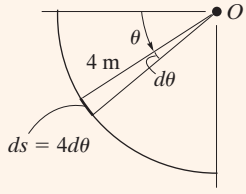
Ecuaciones de movimiento

$$+\nearrow \Sigma F_n = ma_n; \qquad N_s - [60(9.81)\text{N}]\,\text{sen}\,\theta = (60\text{ kg})\left(\frac{v^2}{4\text{ m}}\right) \qquad (1)$$

$$+\searrow \Sigma F_t = ma_t; \qquad [60(9.81)\text{N}]\cos\theta = (60\text{ kg})\,a_t$$

$$a_t = 9.81\cos\theta$$

Cinemática. Como a_t se expresa en función de θ, para determinar la rapidez del patinador cuando $\theta = 60°$ se utiliza la ecuación $v\,dv = a_t\,ds$. Con la relación geométrica $s = \theta r$, donde $ds = r\,d\theta = (4\text{ m})d\theta$ (fig. 13-15*c*) y la condición inicial $v = 0$ en $\theta = 0°$, tenemos



(c)

Fig. 13-15

$$v\,dv = a_t\,ds$$

$$\int_0^v v\,dv = \int_0^{60°} 9.81\cos\theta(4\,d\theta)$$

$$\frac{v^2}{2}\bigg|_0^v = 39.24\,\text{sen}\,\theta\bigg|_0^{60°}$$

$$\frac{v^2}{2} - 0 = 39.24(\text{sen}\,60° - 0)$$

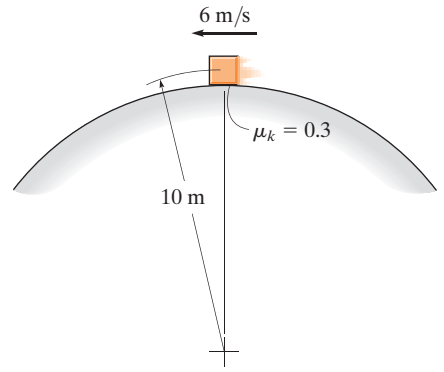
$$v^2 = 67.97\text{ m}^2/\text{s}^2$$

Si sustituimos este resultado y $\theta = 60°$ en la ecuación (1), tenemos

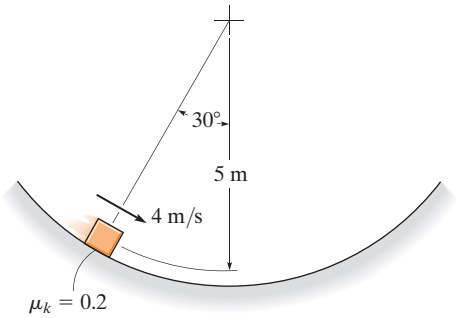
$$N_s = 1529.23\text{ N} = 1.53\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS PRELIMINARES

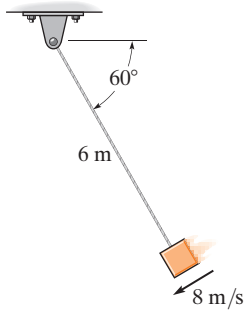
P13-5. Configure los ejes n, t y escriba las ecuaciones de movimiento para el bloque de 10 kg a lo largo de cada uno de estos ejes.



(a)



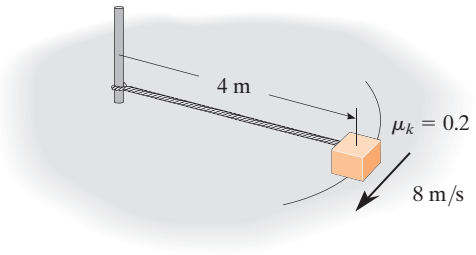
(b)



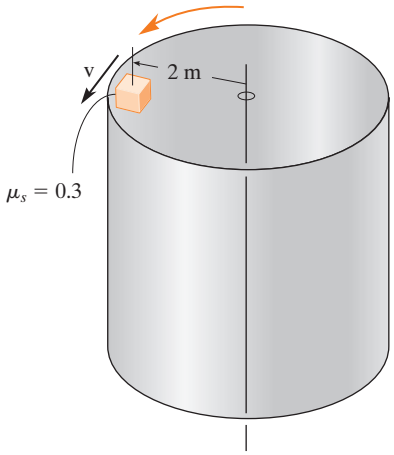
(c)

Prob. P13-5

P13-6. Configure los ejes n, b, t y escriba las ecuaciones de movimiento para el bloque de 10 kg a lo largo de cada uno de estos ejes.



(a)



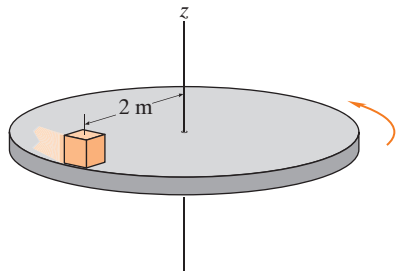
Rotación constante
El bloque tiene un movimiento inminente

(b)

Prob. P13-6

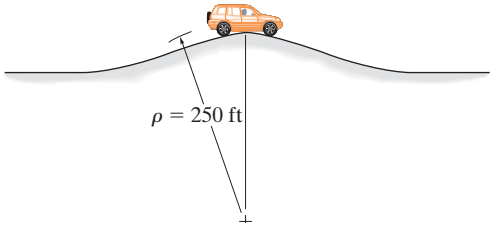
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F13-7. El bloque descansa a una distancia de 2 m del centro de la plataforma. Si el coeficiente de fricción estática entre el bloque y la plataforma es $\mu_s = 0.3$, determine la rapidez máxima que el bloque puede alcanzar antes de que comience a deslizarse. Suponga que el movimiento angular del disco se incrementa lentamente.



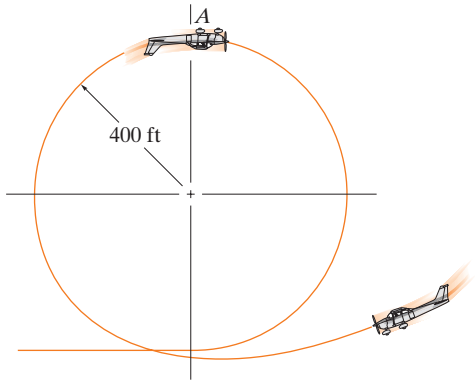
Prob. F13-7

F13-8. Determine la rapidez máxima a que el jeep puede viajar sobre la cresta de la colina sin que pierda contacto con la carretera.



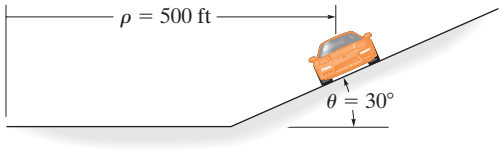
Prob. F13-8

F13-9. Un piloto pesa 150 lb y vuela a una rapidez constante de 120 ft/s. Determine la fuerza normal que ejerce en el asiento del avión cuando está de cabeza en A. La trayectoria circular tiene un radio de curvatura de 400 ft.



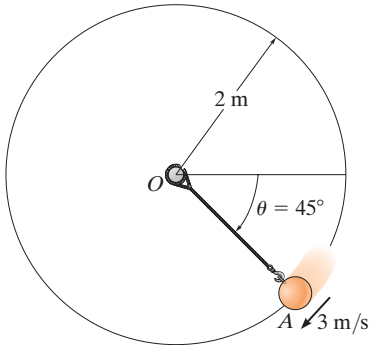
Prob. F13-9

F13-10. El auto deportivo se desplaza a lo largo de una carretera con una inclinación de 30° y cuyo radio de curvatura es de $\rho = 500$ ft. Si el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y la carretera es $\mu_s = 0.2$, determine la rapidez máxima que es segura para que no se deslice. Ignore el tamaño del automóvil.



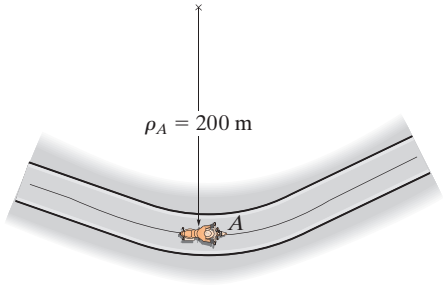
Prob. F13-10

F13-11. Si la velocidad de la bola de 10 kg es de 3 m/s cuando está en la posición A, a lo largo de la trayectoria vertical, determine la tensión en la cuerda y el incremento de su rapidez en esta posición.



Prob. F13-11

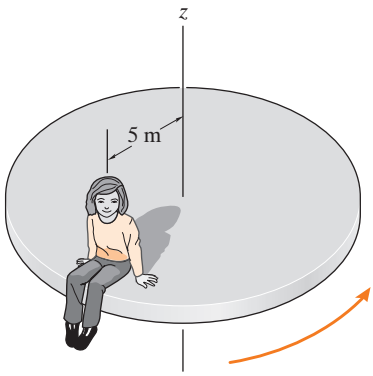
F13-12. La masa del motociclista es de 0.5 Mg y su tamaño es despreciable. Pasa por el punto A a una rapidez de 15 m/s, la cual se incrementa a un ritmo constante de 1.5 m/s^2. Determine la fuerza de fricción resultante ejercida por la carretera en los neumáticos en este instante.



Prob. F13-12

PROBLEMAS

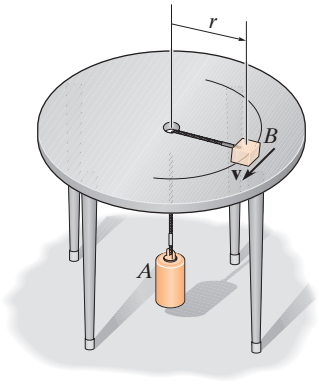
***13-52.** Una niña que tiene una masa de 15 kg se sienta inmóvil con respecto a la superficie de una plataforma horizontal a una distancia de $r = 5$ m desde el centro de la plataforma. Si el movimiento angular de la plataforma se incrementa *lentamente*, de modo que la componente tangencial de la aceleración de la niña puede despreciarse, determine la rapidez máxima que tendrá la niña antes de empezar a deslizarse hacia afuera de la plataforma. El coeficiente de fricción estática entre la niña y la plataforma es $\mu_S = 0.2$.



Prob. 13-52

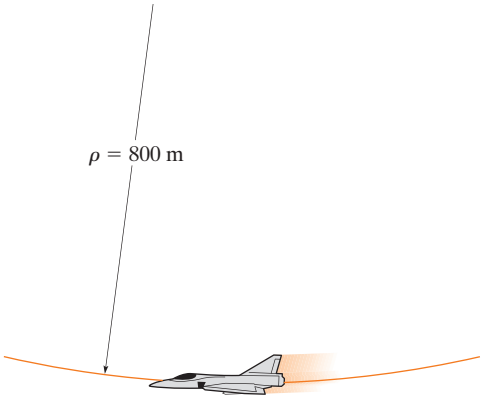
13-53. El bloque B de 2 kg y el cilindro A de 15 kg están conectados a una cuerda delgada que pasa por un orificio en el centro de una mesa lisa. Si al bloque se le imprime una rapidez de $v = 10$ m/s, determine el radio r de la trayectoria circular a lo largo de la cual se desplaza.

13-54. El bloque B de 2 kg y el cilindro A de 15 kg están conectados a una cuerda delgada que pasa por un orificio en el centro de una mesa lisa. Si el bloque se desplaza a lo largo de una trayectoria circular de radio $r = 1.5$ m, determine la rapidez del bloque.



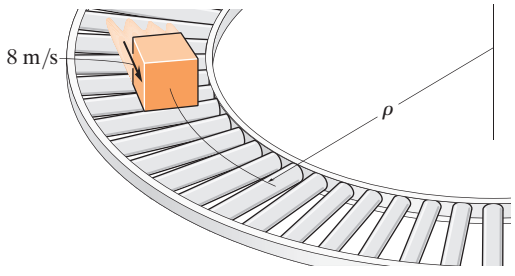
Probs. 13-53/54

13-55. Determine la rapidez constante máxima a la que el piloto puede viajar alrededor de la curva que está en un plano vertical que tiene un radio de curvatura $\rho = 800$ m, de manera que experimenta una aceleración máxima $a_n = 8g = 78.5$ m/s^2. Si el piloto tiene una masa de 70 kg, determine la fuerza normal que ejerce sobre el asiento del avión cuando viaja a esta velocidad y se encuentra en su punto más bajo.



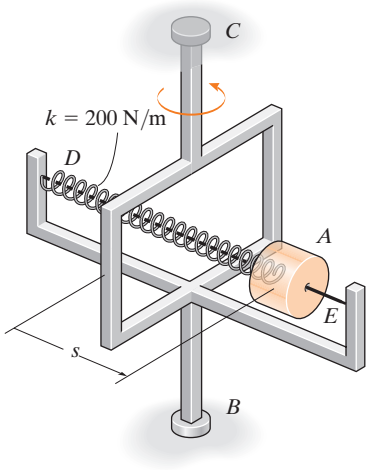
Prob. 13-55

***13-56.** Se requiere mover cajas de cartón con una masa de 5 kg a lo largo de la línea de ensamble a una rapidez constante de 8 m/s. Determine el radio de curvatura más pequeño, ρ, para el transportador, de modo que las cajas de cartón no se deslicen. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre una caja de cartón y el transportador son $\mu_s = 0.7$ y $\mu_k = 0.5$, respectivamente.



Prob. 13-56

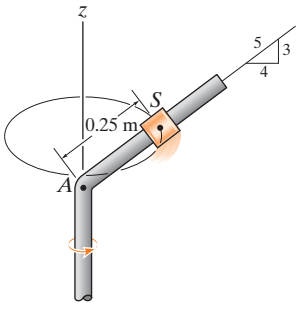
13-57. El collarín A, que tiene una masa de 0.75 kg, está unido a un resorte que tiene una rigidez de $k = 200$ N/m. Cuando la varilla BC gira alrededor del eje vertical, el collarín se desliza hacia el exterior a lo largo de la varilla lisa DE. Si el resorte no está estirado cuando $s = 0$, determine la rapidez constante del collarín a fin de que $s = 100$ mm. Además, ¿cuál es la fuerza normal de la varilla sobre el collarín? Desprecie el tamaño del collarín.



Prob. 13-57

11-58. El carrete S de 2 kg se ajusta holgadamente sobre la varilla inclinada, cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.2$. Si el carrete se encuentra a 0.25 m de A, determine la rapidez constante mínima que puede tener el carrete, de modo que no se deslice hacia abajo sobre la varilla.

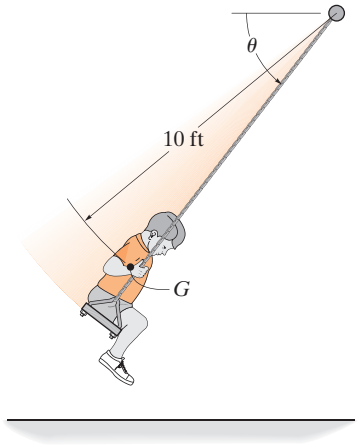
13-59. El carrete S de 2 kg se ajusta holgadamente sobre la varilla inclinada, cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.2$. Si el carrete se encuentra a 0.25 m de A, determine la rapidez constante máxima que puede tener el carrete, de modo que no se deslice hacia arriba sobre la varilla.



Probs. 13-58/59

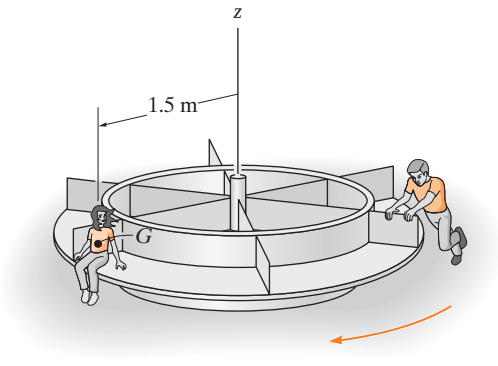
***13-60.** En el instante $\theta = 60°$, el centro de masa G del niño tiene una rapidez hacia abajo $v_G = 15$ ft/s. Determine la razón de cambio de su incremento y la tensión en cada una de las dos cuerdas del columpio en ese instante. El niño tiene un peso de 60 lb. Desprecie el tamaño del niño y la masa del asiento y de las cuerdas.

13-61. En el instante $\theta = 60°$, el centro de masa G del niño está momentáneamente en reposo. Determine su rapidez y la tensión en cada una de las dos cuerdas del columpio, cuando $\theta = 90°$. El niño tiene un peso de 60 lb. Desprecie el tamaño del niño y la masa del asiento y de las cuerdas.



Probs. 13-60/61

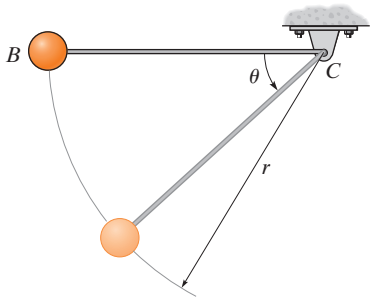
13-62. Una niña que tiene una masa de 25 kg se sienta en el borde del carrusel, de modo que su centro de masa G está a una distancia de 1.5 m del eje de rotación. Si el movimiento angular de la plataforma se incrementa *lentamente* de manera que la componente tangencial de la aceleración de la niña es despreciable, determine la rapidez máxima que puede tener antes de que ella comience a deslizarse hacia afuera del carrusel. El coeficiente de fricción estática entre la niña y el carrusel es $\mu_s = 0.3$.



Prob. 13-62

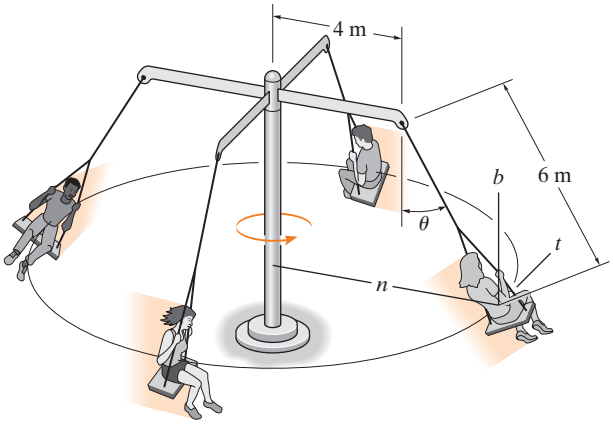
13-63. La bola B del péndulo tiene un peso de 5 lb y se suelta desde el reposo en la posición mostrada, $\theta = 0°$. Determine la tensión en la cuerda BC justo después de que se liberó la bola, $\theta = 0°$, y también en el instante en que la bola alcanza $\theta = 45°$. Considere que $r = 3$ ft.

***13-64.** La bola B del péndulo tiene una masa m, y se suelta desde el reposo cuando $\theta = 0°$. Determine la tensión en la cuerda BC inmediatamente después de eso; también, calcule la tensión en el instante en que la bola alcanza la posición arbitraria θ.



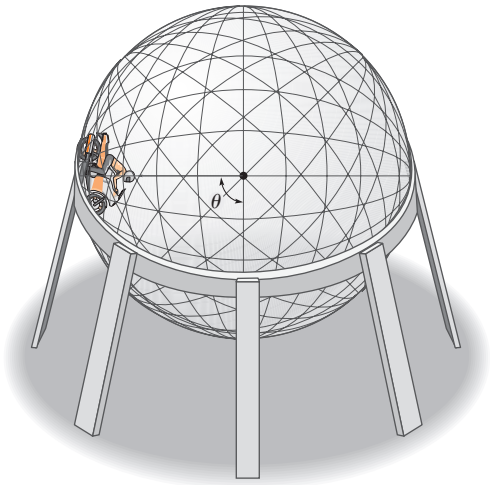
Probs. 13-63/64

13-65. Determine la rapidez constante de los pasajeros en el juego mecánico, si se observa que los cables de soporte están dirigidos a un ángulo $\theta = 30°$ de la vertical. Cada silla tiene una masa de 80 kg incluyendo a su pasajero. Además, ¿cuáles son las componentes de la fuerza en las direcciones n, t y b que ejerce la silla sobre un pasajero de 50 kg durante el movimiento?



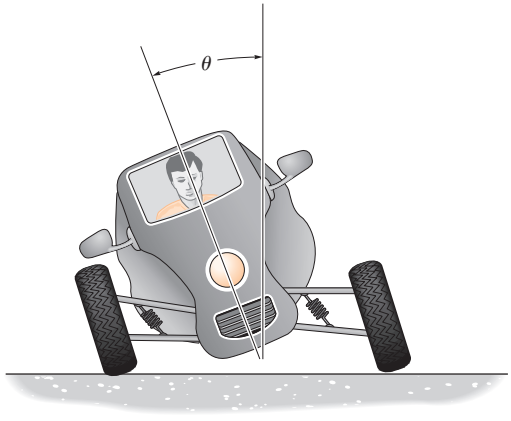
Prob. 13-65

13-66. Un motociclista en un circo conduce su moto dentro de la esfera hueca. Si el coeficiente de fricción estática entre las ruedas de la motocicleta y la esfera es $\mu_s = 0.4$, determine la rapidez mínima a la que debe viajar si debe subirse a la pared cuando $\theta = 90°$. La masa de la motocicleta y el piloto es de 250 kg, y el radio de curvatura desde el centro de gravedad es $\rho = 20$ ft. Para realizar el cálculo, desprecie el tamaño de la motocicleta.



Prob. 13-66

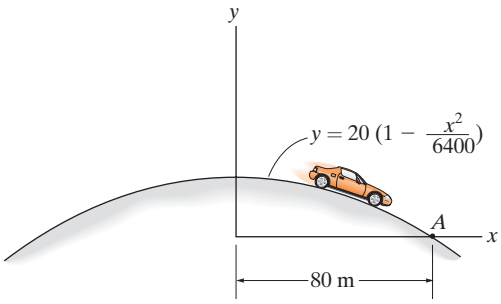
13-67. El vehículo está diseñado para combinar la sensación de una motocicleta con la comodidad y seguridad de un automóvil. Si el vehículo viaja a una rapidez constante de 80 km/h por una carretera curva circular de 100 m de radio, determine el ángulo de inclinación θ del vehículo, de modo que sólo una fuerza normal producida por el asiento actúe en el conductor. Desprecie el tamaño del conductor.



Prob. 13-67

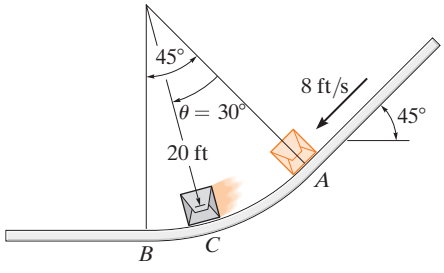
***13-68.** Un automóvil de 0.8 Mg viaja sobre la colina que tiene la forma de una parábola. Si el conductor mantiene una rapidez constante de 9 m/s, determine tanto la fuerza normal resultante como la fuerza de fricción resultante, que todas las ruedas del carro ejercen sobre la carretera en el instante en que llega al punto A. Ignore el tamaño del automóvil.

13-69. Un automóvil de 0.8 Mg viaja sobre la colina que tiene la forma de una parábola. Cuando el automóvil está en el punto A, viaja a una rapidez de 9 m/s y la incrementa a 3 m/s^2. Determine tanto la fuerza normal resultante como la fuerza de fricción resultante que todas las ruedas del automóvil ejercen en la carretera en este instante. Ignore el tamaño del automóvil.



Probs. 13-68/69

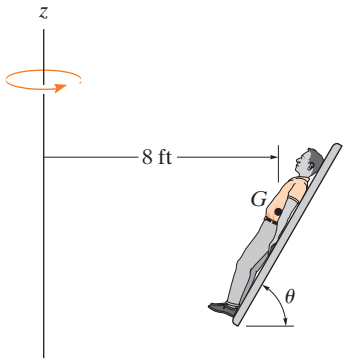
13-70. El paquete tiene un peso de 5 lb y se desliza hacia abajo sobre la rampa. Cuando llega a la parte curva AB, se desplaza a 8 ft/s ($\theta = 0°$). Si la rampa es lisa, determine la rapidez del paquete cuando alcanza el punto intermedio C ($\theta = 30°$) y cuando alcanza el plano horizontal ($\theta = 45°$). Además, encuentre la fuerza normal sobre el paquete en C.



Prob. 13-70

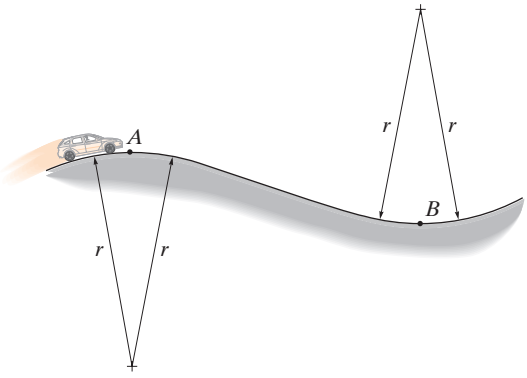
13-71. El hombre de 150 lb descansa contra un cojín, cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.5$. Determine las fuerzas resultantes normal y de fricción que el cojín ejerce sobre el hombre si, debido a la rotación con respecto al eje z, tiene una rapidez constante $v = 20$ ft/s. Desprecie el tamaño del hombre. Considere que $\theta = 60°$.

***13-72.** El hombre de 150 lb descansa contra un cojín cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.5$. Si gira con respecto al eje z con una rapidez constante $v = 30$ ft/s, determine el menor ángulo θ del cojín en el que comenzará a deslizarse.



Probs. 13-71/72

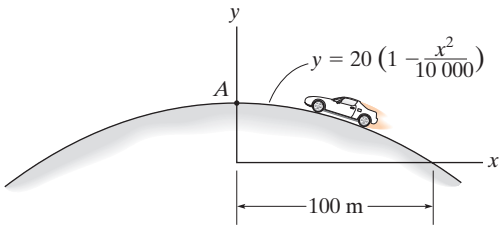
13-73. Determine la rapidez máxima a la que el automóvil con masa m puede pasar por encima del punto A de la carretera con segmentos curvos y seguir manteniendo contacto con la carretera. Si el auto mantiene esta rapidez, ¿cuál es la reacción normal que ejerce la carretera sobre el automóvil cuando pasa el punto más bajo del camino en B?



Prob. 13-73

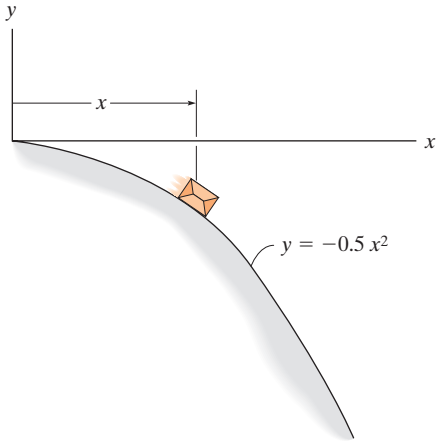
13

13-74. Determine la rapidez constante máxima a la que el automóvil de 2 Mg puede viajar sobre la cresta de la colina en A sin despegarse de la superficie de la carretera. Para realizar los cálculos, desprecie el tamaño del auto.



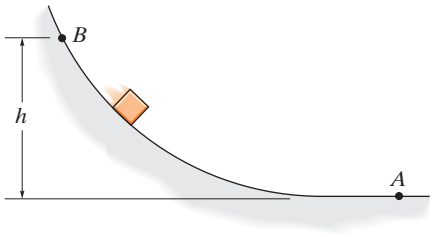
Prob. 13-74

13-75. La caja tiene una masa m y se desliza hacia abajo por la rampa lisa que tiene la forma de una parábola. Si tiene una velocidad inicial de v_0 en el origen, determine su velocidad como una función de x. Además, ¿cuál es la fuerza normal sobre la caja y la aceleración tangencial en función de x?



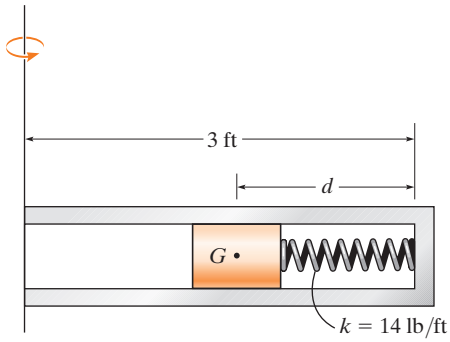
Prob. 13-75

***13-76.** Demuestre que si el bloque se libera desde el reposo en el punto B de una trayectoria lisa con *forma arbitraria*, la rapidez que alcanza cuando se llega al punto A es igual a la rapidez que alcanza cuando cae libremente a través de una altura h; es decir, h; i.e., $v = \sqrt{2gh}$.



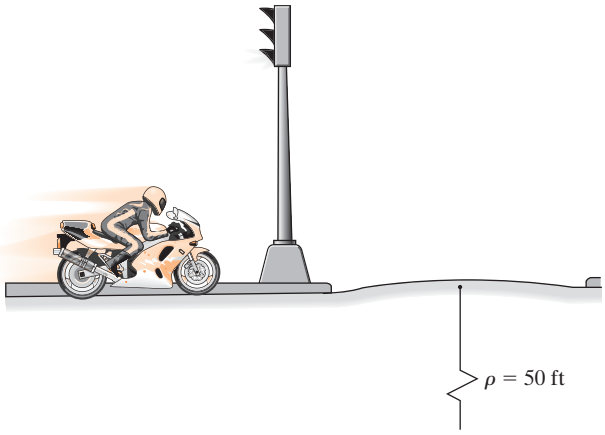
Prob. 13-76

13-77. El tapón cilíndrico tiene un peso de 2 lb y se mueve libremente dentro del tubo liso. El resorte tiene una rigidez $k = 14$ lb/ft y, cuando no se produce ningún movimiento, la distancia $d = 0.5$ ft. Determine la fuerza del resorte sobre el tapón cuando éste se encuentra en reposo con respecto al tubo. El tapón se desplaza con una rapidez constante de 15 ft/s, que es causada por la rotación del tubo con respecto al eje vertical.



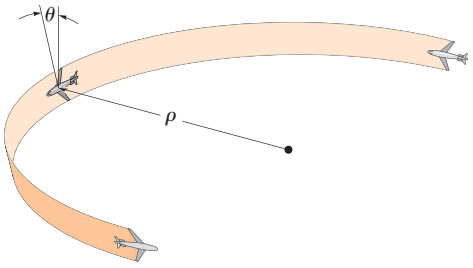
Prob. 13-77

13-78. Al pasar por un crucero, un motociclista se encuentra con el ligero desnivel o corona causada por el cruce de las calles. Si la cresta del desnivel tiene un radio de curvatura $\rho = 50$ ft, determine la rapidez constante máxima a la que puede viajar sin despegarse de la superficie de la carretera. Para los cálculos, desprecie el tamaño de la motocicleta y el motociclista. El piloto y su moto tienen un peso total de 450 lb.



Prob. 13-78

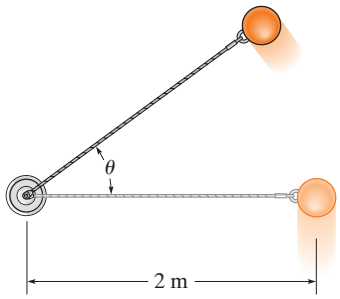
13-79. El avión, que viaja a una rapidez constante de 50 m/s, ejecuta un giro en la curva que está en un plano horizontal. Si el avión se inclina a $\theta = 15°$, cuando el piloto experimenta sólo una fuerza normal sobre el asiento del avión, determine el radio de curvatura ρ de la curva. También, calcule la fuerza normal del asiento sobre el piloto, si él tiene una masa de 70 kg.



Prob. 13-79

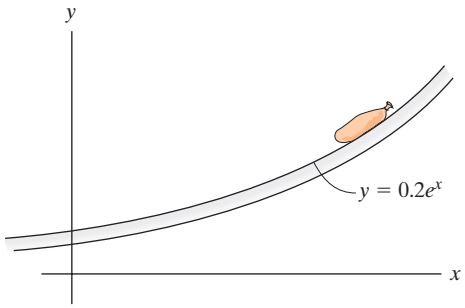
***13-80.** La bola del péndulo de 2 kg se mueve en el plano vertical con una velocidad de 8 m/s, cuando $\theta = 0°$. Determine la tensión inicial de la cuerda y también, su magnitud, en el instante en que la bolla llega a $\theta = 30°$. Desprecie el tamaño de la bola.

13-81. La bola del péndulo de 2 kg se mueve en el plano vertical con una velocidad de 6 m/s cuando $\theta = 0°$. Determine el ángulo θ, donde la tensión en la cuerda se vuelve cero.



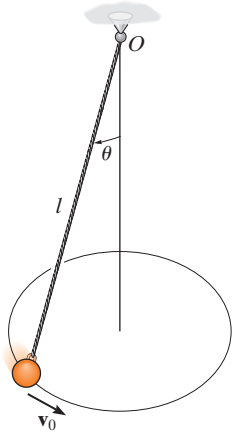
Probs. 13-80/81

13-82. El saco de 8 kg se desliza sobre la rampa lisa. Si tiene una rapidez de 1.5 m/s cuando $y = 0.2$ m, determine la reacción normal que ejerce la rampa sobre el saco y la razón de cambio de la rapidez del saco en ese instante.



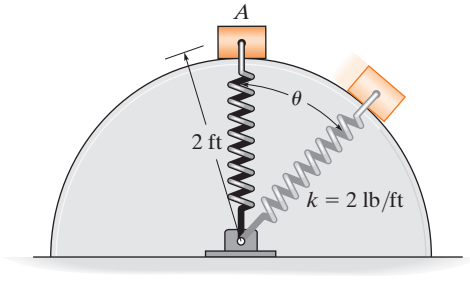
Prob. 13-82

13-83. La bola tiene una masa m y está unida a la cuerda de longitud l. La cuerda se encuentra atada en la parte superior a un eslabón giratorio y la bola recibe una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$. Demuestre que el ángulo θ que forma la cuerda con la vertical, cuando la bola viaja alrededor de la trayectoria circular, debe satisfacer la ecuación $\tan\theta \operatorname{sen}\theta = v_0^2/gl$. Desprecie la resistencia del aire y el tamaño de la bola.

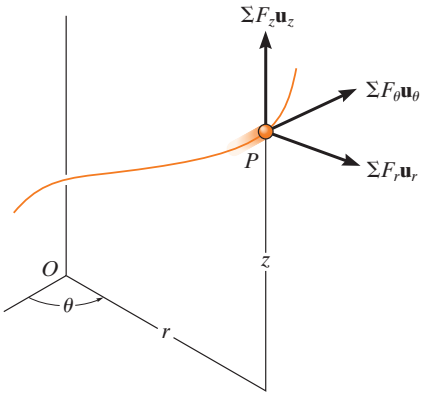


Prob. 13-83

***13-84.** El bloque de 2 lb se suelta desde el reposo en A y se desliza hacia abajo sobre la superficie cilíndrica lisa. Si el resorte tiene una rigidez $k = 2$ lb/ft, determine su longitud no estirada, tal que no permita que el bloque se despegue de la superficie hasta que $\theta = 60°$.



Prob. 13-84



Sistema de coordenadas inercial

Fig. 13-16

13.6 Ecuaciones de movimiento: coordenadas cilíndricas

Cuando todas las fuerzas que actúan en una partícula se descomponen en sus componentes cilíndricas, es decir, a lo largo de las direcciones de los vectores unitarios $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$ y $\mathbf{u}_z$ (fig. 13-16), la ecuación de movimiento se expresa como

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\Sigma F_r \mathbf{u}_r + \Sigma F_\theta \mathbf{u}_\theta + \Sigma F_z \mathbf{u}_z = m a_r \mathbf{u}_r + m a_\theta \mathbf{u}_\theta + m a_z \mathbf{u}_z$$

Para que esta ecuación se satisfaga, requerimos

$$\begin{aligned} \Sigma F_r &= m a_r \\ \Sigma F_\theta &= m a_\theta \\ \Sigma F_z &= m a_z \end{aligned} \tag{13-9}$$

Si la partícula sólo puede moverse en el plano r-θ, entonces únicamente se utilizan las primeras dos ecuaciones 13-9 para especificar el movimiento.

Fuerzas tangenciales y normales. El tipo de problema más directo que implica coordenadas cilíndricas requiere determinar las componentes de fuerza resultantes $\Sigma F_r, \Sigma F_\theta, \Sigma F_z$ que hacen que una partícula se mueva con una aceleración *conocida*. Si, no obstante, el movimiento acelerado de la partícula no está completamente especificado en el instante dado, entonces se deberán tener o calcular algunos datos relacionados con las direcciones o magnitudes de las fuerzas que actúan en la partícula, para resolver las ecuaciones 13-9. Por ejemplo, la fuerza **P** hace que la partícula de la figura 13-17*a* se mueva a lo largo de una trayectoria $r = f(\theta)$. La *fuerza normal* **N** que la trayectoria ejerce en la partícula siempre es *perpendicular a la tangente de la trayectoria*, en tanto que la fuerza de fricción **F** siempre actúa a lo largo de la tangente en la dirección opuesta del movimiento. Las *direcciones* de **N** y **F** pueden especificarse con respecto a la coordenada radial con el ángulo ψ (psi) (fig. 13-17*b*), el cual se define entre la línea radial *extendida* y la tangente a la curva.

El movimiento de los carros de la montaña rusa a lo largo de esta espiral puede estudiarse utilizando coordenadas cilíndricas (© R. C. Hibbeler)

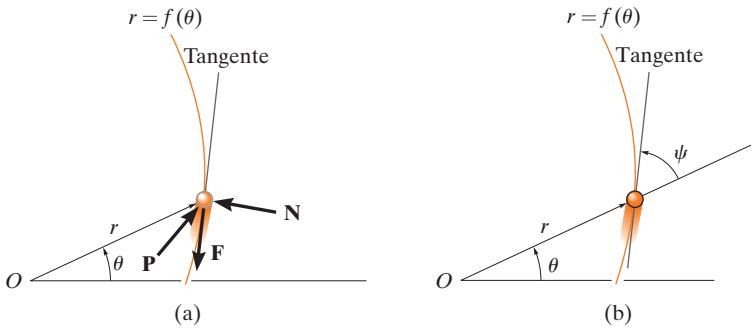
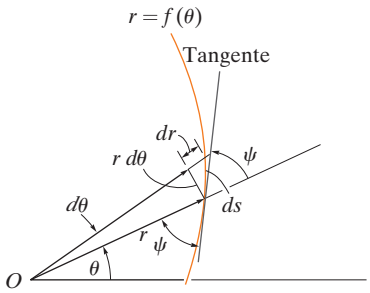


Fig. 13-17

Este ángulo se obtiene al observar que cuando la partícula recorre una distancia ds a lo largo de la trayectoria (fig. 13-17c), la componente del desplazamiento en la dirección radial es dr y en la dirección transversal es $r\,d\theta$. Como estas dos componentes son mutuamente perpendiculares, el ángulo ψ se determina a partir de $\tan\psi = r\,d\theta/dr$, o bien,

$$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta} \tag{13-10}$$

Si ψ se calcula como una cantidad positiva, entonces se mide de la *línea radial extendida* a la tangente en sentido antihorario o en la dirección positiva de θ. Si es negativo, se mide en la dirección opuesta a la θ positiva. Por ejemplo, considere el cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$, de la figura 13-18. Como $dr/d\theta = -a \operatorname{sen}\theta$, entonces cuando $\theta = 30°$, $\tan\psi = a(1 + \cos 30°)/(-a \operatorname{sen} 30°) = -3.732$, o $\psi = -75°$, medido en sentido horario, opuesto a $+\theta$ como se indica en la figura.



(c)

Fig. 13-17(cont.)

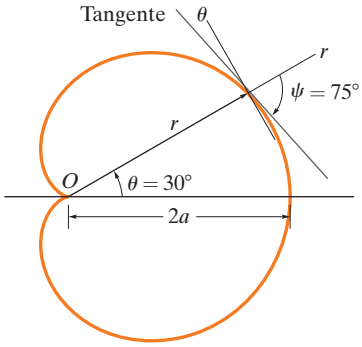


Fig. 13-18

Procedimiento para el análisis

Las coordenadas cilíndricas o polares son una elección adecuada para el análisis de un problema para el cual se dan datos con respecto al movimiento angular de la línea radial r, o en casos donde la trayectoria puede expresarse convenientemente en función de estas coordenadas. Una vez que se establecen estas coordenadas, las ecuaciones de movimiento pueden aplicarse entonces para relacionar las fuerzas que actúan en la partícula con sus componentes de aceleración. El método para hacerlo se describió en el procedimiento para el análisis dado en la sección 13.4. Lo siguiente es un resumen de este procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre

- Establezca el sistema de coordenadas r, θ, z inercial y trace el diagrama de cuerpo libre de la partícula.
- Suponga que $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_z$ actúan en las *direcciones positivas* de r, θ, z si son desconocidas.
- Identifique todas las incógnitas en el problema.

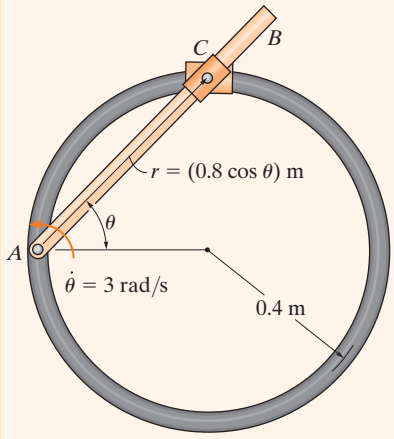
Ecuaciones de movimiento

- Aplique las ecuaciones de movimiento, ecuaciones 13-9.

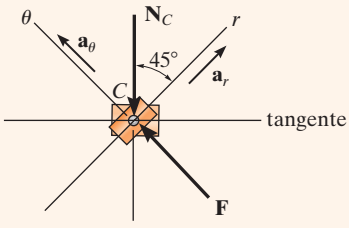
Cinemática

- Use los métodos de la sección 12.8 para determinar r y las derivadas con respecto al tiempo $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{z}$, y luego, evalúe las componentes de aceleración $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}, a_z = \ddot{z}$.
- Si cualquiera de las componentes de aceleración se calcula como una cantidad negativa, ello indica que actúa en la dirección de su coordenada negativa.
- Cuando calculan las derivadas con respecto al tiempo de $r = f(\theta)$, es muy importante utilizar la regla de la cadena del cálculo, la cual se analiza en el apéndice C.

EJEMPLO 13.10



(a)



(b)

Fig. 13-19

El doble anillo liso de 0.5 kg que se muestra en la figura 13-19*a* puede deslizarse libremente sobre el brazo AB y la varilla guía circular. Si el brazo gira a una velocidad angular constante de $\dot{\theta} = 3$ rad/s, determine la fuerza que el brazo ejerce sobre el anillo en el instante $\theta = 45°$. El movimiento ocurre en el plano horizontal.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. La reacción normal $\mathbf{N}_C$ de la varilla guía circular y la fuerza $\mathbf{F}$ del brazo AB actúan en el anillo en el plano del movimiento (fig. 13-19*b*). Observe que $\mathbf{F}$ actúa perpendicular al eje del brazo AB, es decir, en la dirección del eje θ, en tanto que $\mathbf{N}_C$ lo hace perpendicular a la tangente de la trayectoria circular en $\theta = 45°$. Las cuatro incógnitas son N_C, F, a_r y a_θ.

Ecuaciones de movimiento

$$+\nearrow \Sigma F_r = ma_r: \qquad -N_C \cos 45° = (0.5 \text{ kg})\, a_r \tag{1}$$

$$+\nwarrow \Sigma F_\theta = ma_\theta: \qquad F - N_C \operatorname{sen} 45° = (0.5 \text{ kg})\, a_\theta \tag{2}$$

Cinemática. Con la regla de la cadena (vea el apéndice C), la primera y la segunda derivadas con respecto al tiempo de r cuando $\theta = 45°$, $\dot{\theta} = 3$ rad/s, $\ddot{\theta} = 0$, son

$$\begin{aligned} r &= 0.8 \cos\theta = 0.8 \cos 45° = 0.5657 \text{ m} \\ \dot{r} &= -0.8 \operatorname{sen}\theta\, \dot{\theta} = -0.8 \operatorname{sen} 45°(3) = -1.6971 \text{ m/s} \\ \ddot{r} &= -0.8\left[\operatorname{sen}\theta\, \ddot{\theta} + \cos\theta\, \dot{\theta}^2\right] \\ &= -0.8[\operatorname{sen} 45°(0) + \cos 45°(3^2)] = -5.091 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -5.091 \text{ m/s}^2 - (0.5657 \text{ m})(3 \text{ rad/s})^2 = -10.18 \text{ m/s}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (0.5657 \text{ m})(0) + 2(-1.6971 \text{ m/s})(3 \text{ rad/s}) \\ &= -10.18 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Si sustituimos estos resultados en las ecuaciones (1) y (2) y resolvemos,

$$N_C = 7.20 \text{ N}$$

$$F = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 13.11

El cilindro C liso de 2 kg de la figura 13-20*a* tiene un pasador P en su centro, el cual pasa a través de la ranura del brazo OA. Si se hace que el brazo gire en el *plano vertical* a una razón constante $\dot{\theta} = 0.5$ rad/s, determine la fuerza que ejerce el brazo sobre el perno guía en el instante $\theta = 60°$.

SOLUCIÓN

¿Por qué es una buena idea utilizar coordenadas polares para resolver este problema?

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del cilindro se muestra en la figura 13-20*b*. La fuerza en el perno guía, $\mathbf{F}_P$, actúa perpendicular a la ranura del brazo. Como siempre, se supone que $\mathbf{a}_r$ y $\mathbf{a}_\theta$ actúan en las direcciones de r y θ *positivas*, respectivamente. Identifique las cuatro incógnitas.

Ecuaciones de movimiento. Con los datos en la figura 13-20*b*, tenemos

$$+\swarrow \Sigma F_r = ma_r; \quad 19.62 \operatorname{sen}\theta - N_C \operatorname{sen}\theta = 2a_r \tag{1}$$

$$+\searrow \Sigma F_\theta = ma_\theta; \quad 19.62 \cos\theta + F_P - N_C \cos\theta = 2a_\theta \tag{2}$$

Cinemática. A partir de la figura 13-20*a*, r puede relacionarse con θ mediante la ecuación

$$r = \frac{0.4}{\operatorname{sen}\theta} = 0.4 \csc\theta$$

Como $d(\csc\theta) = -(\csc\theta \cot\theta)\, d\theta$ y $d(\cot\theta) = -(\csc^2\theta)d\theta$, entonces r y las derivadas con respecto al tiempo necesarias son

$$\dot{\theta} = 0.5 \qquad r = 0.4 \csc\theta$$

$$\ddot{\theta} = 0 \qquad \dot{r} = -0.4(\csc\theta \cot\theta)\dot{\theta}$$

$$= -0.2 \csc\theta \cot\theta$$

$$\ddot{r} = -0.2(-\csc\theta \cot\theta)(\dot{\theta}) \cot\theta - 0.2 \csc\theta(-\csc^2\theta)\dot{\theta}$$

$$= 0.1 \csc\theta(\cot^2\theta + \csc^2\theta)$$

Al evaluar estas fórmulas en $\theta = 60°$, obtenemos

$$\dot{\theta} = 0.5 \qquad r = 0.462$$

$$\ddot{\theta} = 0 \qquad \dot{r} = -0.133$$

$$\ddot{r} = 0.192$$

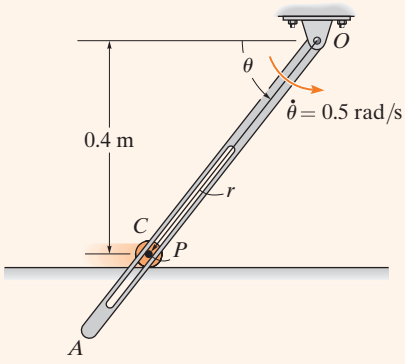
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0.192 - 0.462(0.5)^2 = 0.0770$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(-0.133)(0.5) = -0.133$$

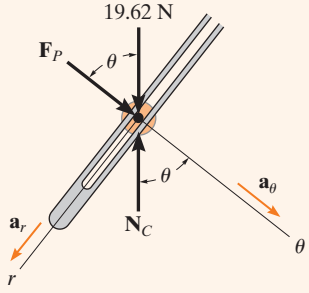
Si sustituimos estos resultados en las ecuaciones 1 y 2 con $\theta = 60°$ y resolvemos, se obtiene

$$N_C = 19.4\ N \qquad F_P = -0.356\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

El signo negativo indica que $\mathbf{F}_P$ actúa opuesta a la dirección mostrada en la figura 13-20*b*.



(a)

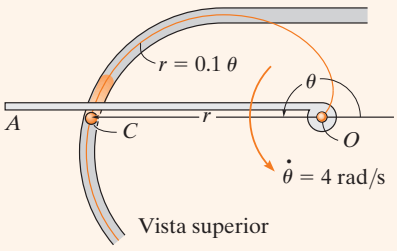


(b)

Fig. 13-20

13

EJEMPLO 13.12



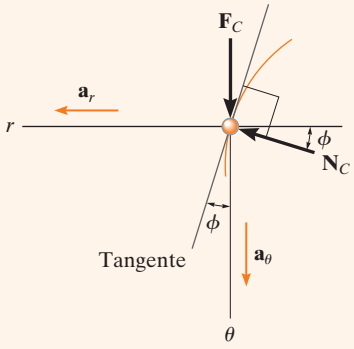
(a)

Una lata C de 0.5 kg de masa se mueve a lo largo del canal ubicado en el plano horizontal que se muestra en la figura 13-21*a*. El canal tiene forma de espiral, la cual está definida por la ecuación $r = (0.1\theta)$m, donde θ está en radianes. Si el brazo OA gira a una velocidad constante $\dot{\theta} = 4$ rad/s en el plano horizontal, determine la fuerza que ejerce en la lata en el instante $\theta = \pi$ rad. Ignore la fricción y el tamaño de la lata.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. La fuerza impulsora $\mathbf{F}_C$ actúa perpendicular al brazo OA, en tanto que la fuerza normal que ejerce la pared del canal en la lata, $\mathbf{N}_C$, lo hace perpendicular a la tangente a la curva en $\theta = \pi$ rad (fig. 13-21*b*). Como siempre, se supone que $\mathbf{a}_r$ y $\mathbf{a}_\theta$ actúan en las *direcciones positivas* de r y θ, respectivamente. Como la trayectoria está especificada, el ángulo ψ que la línea radial extendida r forma con la tangente (fig. 13-21*c*) se determina con la ecuación 13-10. Tenemos $r = 0.1\theta$, de modo que $dr/d\theta = 0.1$ y, por consiguiente,

$$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{0.1\theta}{0.1} = \theta$$



(b)

Cuando $\theta = \pi$, $\psi = \tan^{-1}\pi = 72.3°$, de modo que $\phi = 90° - \psi = 17.7°$, como se muestra en la figura 13-21*c*. Identifique las cuatro incógnitas en la figura 13-21*b*.

Ecuaciones de movimiento. Con $\phi = 17.7°$ y los datos de la figura 13-21*b*, tenemos

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_r = ma_r; \qquad N_C \cos 17.7° = 0.5a_r \tag{1}$$

$$+\downarrow\Sigma F_\theta = ma_\theta; \qquad F_C - N_C \operatorname{sen} 17.7° = 0.5a_\theta \tag{2}$$

Cinemática. Las derivadas con respecto al tiempo de r y θ son

$$\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s} \qquad r = 0.1\theta$$

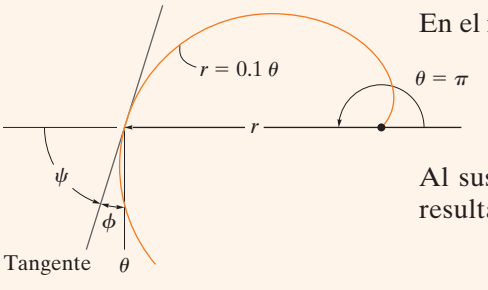
$$\ddot{\theta} = 0 \qquad \dot{r} = 0.1\dot{\theta} = 0.1(4) = 0.4 \text{ m/s}$$

$$\ddot{r} = 0.1\ddot{\theta} = 0$$

En el instante $\theta = \pi$ rad,

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - 0.1(\pi)(4)^2 = -5.03 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(0.4)(4) = 3.20 \text{ m/s}^2$$



(c)

Fig. 13-21

Al sustituir estos resultados en las ecuaciones 1 y 2 y resolviendo, resulta

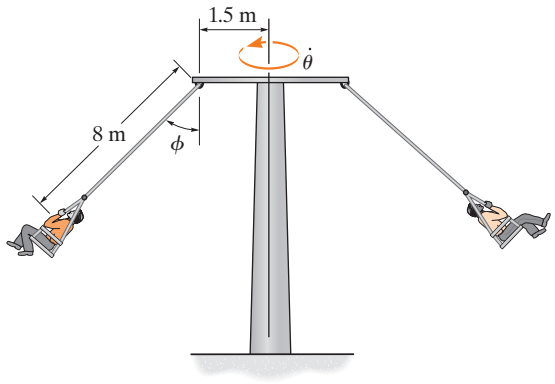
$$N_C = -2.64 \text{ N}$$

$$F_C = 0.800 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

¿Qué indica el signo negativo de N_C?

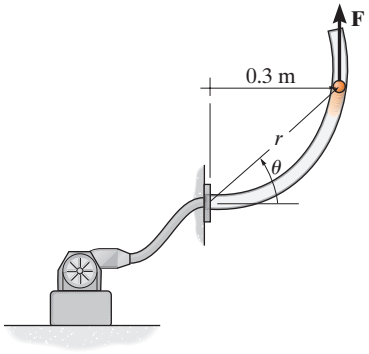
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F13-13. Determine la velocidad angular constante $\dot{\theta}$ del poste vertical del juego mecánico si $\phi = 45°$. Ignore la masa de los cables y el tamaño de los pasajeros.



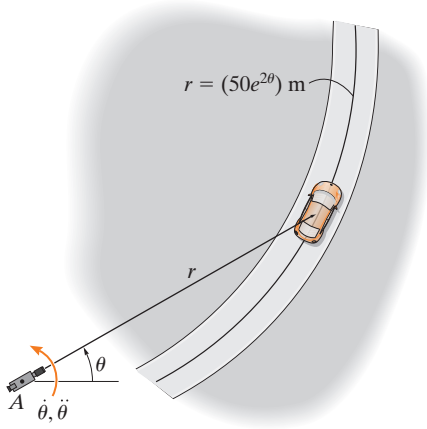
Prob. F13-13

F13-14. La bola de 0.2 kg es impulsada por medio de aire a través del tubo circular liso, que está en un plano vertical, y cuya forma está definida por $r = (0.6 \text{ sen } \theta)$ m, donde θ está en radianes. Si $\theta = (\pi t^2)$ rad, donde t está en segundos, determine la magnitud de la fuerza **F** ejercida por el ventilador en la bola cuando $t = 0.5$ s.



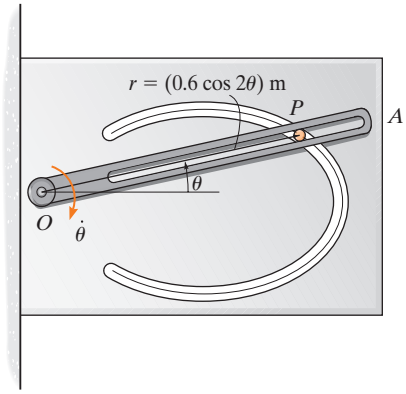
Prob. F13-14

F13-15. El automóvil de 2 Mg toma la curva descrita por $r = (50e^{2\theta})$ m, donde θ está en radianes. Si se coloca una cámara en A y gira con una velocidad angular de $\dot{\theta} = 0.05$ rad/s y una aceleración angular de $\ddot{\theta} = 0.01$ rad/s^2 en el instante $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad, determine la fuerza de fricción resultante desarrollada entre los neumáticos y la carretera en este instante.



Prob. F13-15

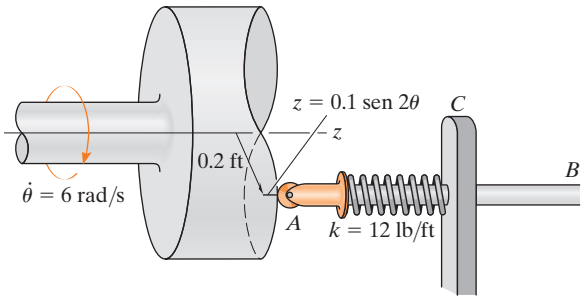
F13-16. El pasador P de 0.2 kg sólo puede moverse en la ranura curva lisa, la cual está definida por la lemniscata de Bernoulli $r = (0.6 \cos 2\theta)$. El brazo ranurado OA, el cual tiene una velocidad angular constante en sentido horario de $\dot{\theta} = -3$ rad/s, controla su movimiento. Determine la fuerza que el brazo OA ejerce en el pasador P cuando $\theta = 0°$. El movimiento se da en el plano vertical.



Prob. F13-16

PROBLEMAS

13-85. El seguidor de resorte AB tiene un peso de 0.75 lb y se mueve hacia atrás y adelante conforme su extremo rueda sobre la superficie contorneada de la leva, donde $r = 0.2$ ft y $z = (0.1 \text{ sen } 2\theta)$ ft. Si la leva gira a una velocidad angular constante de 6 rad/s, determine la fuerza en el extremo A del seguidor cuando $\theta = 45°$. En esta posición, el resorte está comprimido 0.4 ft. Desprecie la fricción en el rodamiento C.

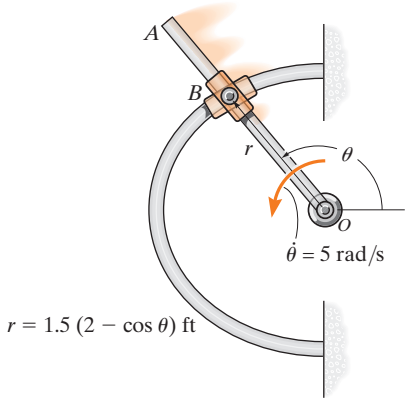


Prob. 13-85

13-86. Determine la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre una partícula de 5 kg en el instante $t = 2$ s, si la partícula se mueve a lo largo de una trayectoria horizontal definida por las ecuaciones $r = (2t + 10)$ m y $\theta = (1.5t^2 - 6t)$ rad, donde t se da en segundos.

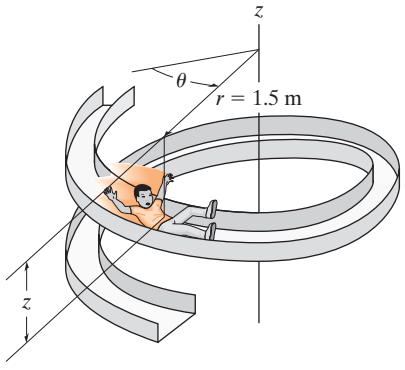
13-87. La trayectoria del movimiento de una partícula de 5 lb en el plano horizontal se describe en términos de coordenadas polares como $r = (2t + 1)$ ft y $\theta = (0.5t^2 - t)$ rad, donde t se da en segundos. Determine la magnitud de la fuerza desbalanceada que actúa sobre la partícula cuando $t = 2$ s.

***13-88.** La varilla OA gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante de $\dot{\theta} = 5$ rad/s. El collarín doble B está articulado de modo que un collarín se desliza sobre la varilla giratoria y el otro se desliza sobre la varilla curva que está en un plano *horizontal*, cuya forma se describe mediante la ecuación $r = 1.5(2 - \cos\theta)$ ft. Si los dos collarines pesan 0.75 lb, determine la fuerza normal que la varilla curva ejerce sobre un collarín en el instante $\theta = 120°$. Desprecie la fricción.



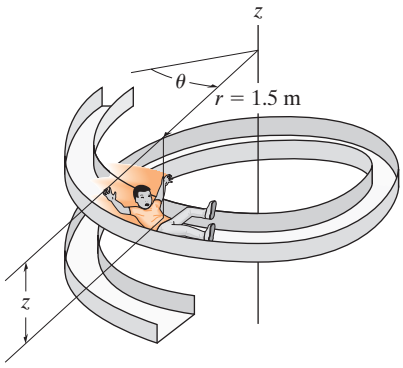
Prob. 13-88

13.89. El niño con masa de 40 kg se desliza por el tobogán en espiral a una rapidez constante tal que su posición, medida desde la parte superior del tobogán, tiene componentes $r = 1.5$ m, $\theta = (0.7t)$ rad y $z = (-0.5t)$ m, donde t se da en segundos. Determine las componentes de fuerza $\mathbf{F}_r$, $\mathbf{F}_\theta$ y $\mathbf{F}_z$ que ejerce el tobogán sobre el niño en el instante $t = 2$ s. Desprecie el tamaño del niño.



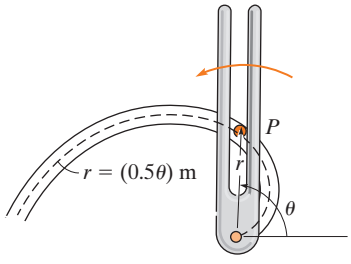
Prob. 13-89

13.90. El niño de 40 kg se desliza por el tobogán liso en espiral, de modo que cuando $z = -2$ m/s su rapidez es de 2 m/s. Determine las componentes r, θ, z de la fuerza que el tobogán ejerce sobre el niño en este instante. Desprecie el tamaño del niño.



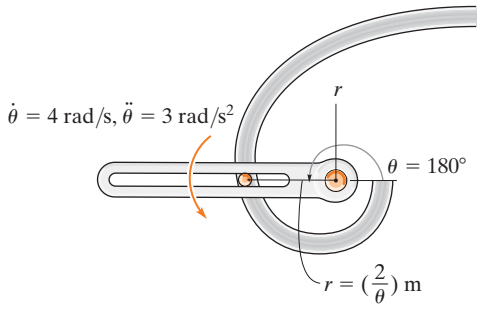
Prob. 13-90

13-91. Usando una varilla en forma de horquilla, un perno guía liso P de 5 kg es obligado a moverse verticalmente a lo largo de la trayectoria *ranurada vertical* $r = (0.5\,\theta)$ m, donde θ se da en radianes. Si la posición angular del brazo es $\theta = (\frac{\pi}{8}t^2)$ rad, donde t se da en segundos, determine la fuerza de la varilla sobre el perno guía y la fuerza normal de la ranura sobre el perno guía en el instante $t = 2$ s. El perno guía está en contacto con sólo *un borde* de la varilla y la ranura en cualquier instante.



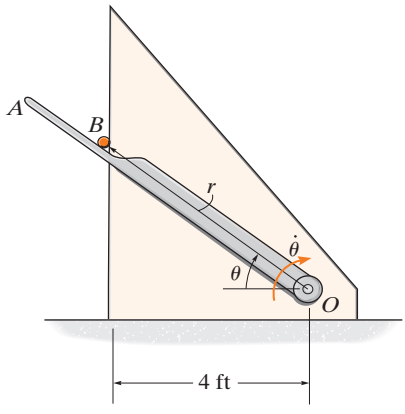
Prob. 13-91

***13-92.** El brazo gira a razón de $\dot{\theta} = 4$ rad/s cuando $\ddot{\theta} = 3$ rad/s^2 y $\theta = 180°$. Determine la fuerza que debe ejercer sobre el cilindro liso de 0.5 kg, si está limitado a moverse a lo largo de la trayectoria ranurada. El movimiento se produce en el plano horizontal.



Prob. 13-92

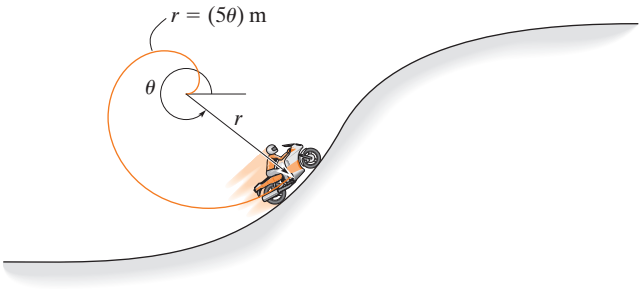
13-93. Si el brazo OA gira en sentido horario con una velocidad angular constante de $\dot{\theta} = 1.5$ rad/s, determine la fuerza que el brazo OA ejerce sobre el cilindro liso B de 4 lb cuando $\theta = 45°$.



Prob. 13-93

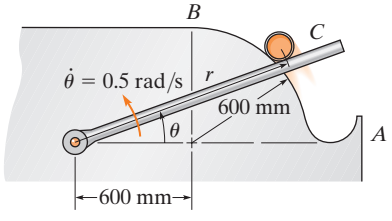
13

13-94. Determine las fuerzas normal y de fricción que ejerce la pista parcialmente en espiral sobre la motocicleta de 200 kg en el instante $\theta = \frac{5}{3}\pi$ rad, $\dot{\theta} = 0.4$ rad/s, $\ddot{\theta} = 0.8$ rad/s^2. Desprecie el tamaño de la motocicleta.



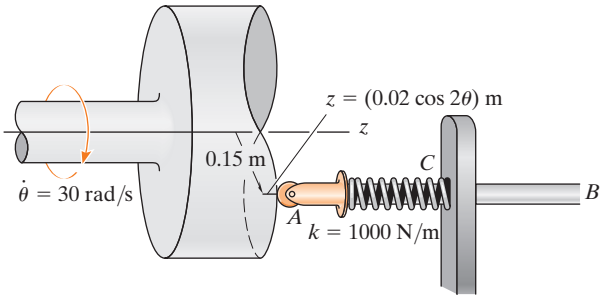
Prob. 13-94

13-95. Una lata lisa C, con una masa de 3 kg, se levanta desde un depósito en A hasta una rampa en B mediante una varilla giratoria. Si la varilla mantiene una velocidad angular constante de $\dot{\theta} = 0.5$ rad/s, determine la fuerza que ejerce la varilla sobre la lata en el instante $\theta = 30°$. Para realizar los cálculos, desprecie los efectos de la fricción y el tamaño de la lata, de modo que $r = (1.2 \cos \theta)$ m. La rampa desde A hasta B es circular, con un radio de 600 mm.



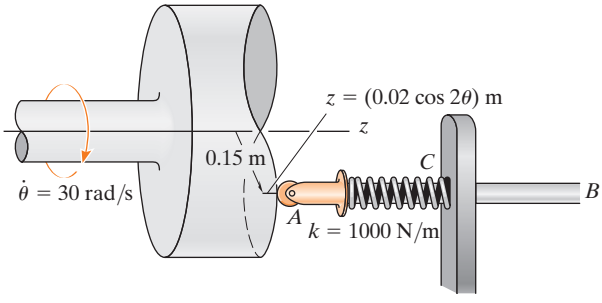
Prob. 13-95

***13-96.** El seguidor de resorte AB tiene una masa de 0.5 kg y se mueve hacia atrás y adelante, mientras su extremo rueda sobre la superficie contorneada de la leva, donde $r = 0.15$ m y $z = (0.02 \cos 2\theta)$ m. Si la leva gira a una velocidad angular constante de 30 rad/s, determine la componente de fuerza F_z en el extremo A del seguidor cuando $\theta = 30°$. El resorte no está comprimido cuando $\theta = 90°$. Desprecie la fricción en el rodamiento C.



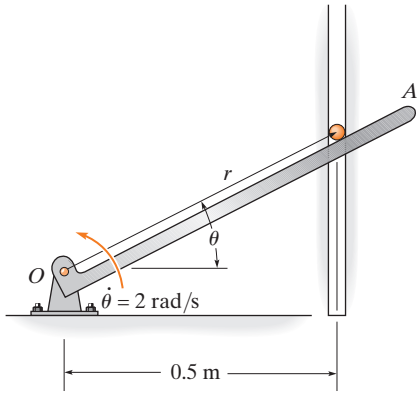
Prob. 13-96

13-97. El seguidor de resorte AB tiene una masa de 0.5 kg y se mueve hacia atrás y adelante, mientras su extremo rueda sobre la superficie contorneada de la leva, donde $r = 0.15$ m y $z = (0.02 \cos 2\theta)$ m. Si la leva gira a una velocidad angular constante de 30 rad/s, determine las componentes máxima y mínima de la fuerza F_z que el seguidor ejerce sobre la leva, si el resorte está sin comprimir cuando $\theta = 90°$.



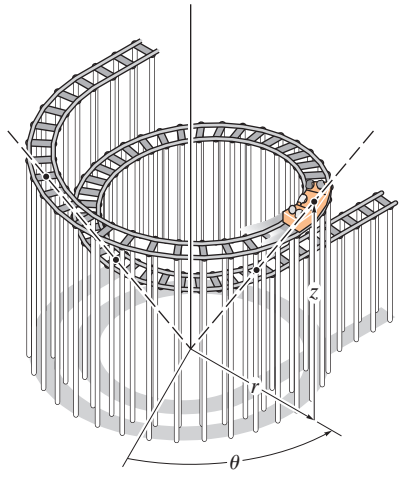
Prob. 13-97

13-98. La partícula tiene una masa de 0.5 kg y está limitada a moverse a lo largo de la ranura vertical lisa debido a la rotación del brazo OA. Determine la fuerza de la varilla sobre la partícula y la fuerza normal de la ranura sobre la partícula cuando $\theta = 30°$. La varilla gira con una velocidad angular constante $\dot{\theta} = 2$ rad/s. Suponga que la partícula sólo tiene contacto con un lado de la ranura en cualquier instante.



Prob. 13-98

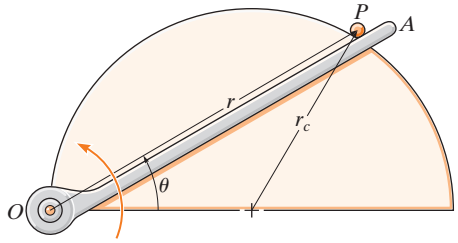
13-99. Un carro de una montaña rusa viaja a lo largo de una pista que por una corta distancia se define mediante una espiral cónica, $r = \frac{3}{4}z$, $\theta = -1.5z$, donde r y z están en metros y θ en radianes. Si el movimiento angular $\dot{\theta} = 1$ rad/s se mantiene siempre, determine las componentes r, θ, z de la reacción ejercida por la pista sobre el carro en el instante $z = 6$ m. El carro y los pasajeros tienen una masa total de 200 kg.



Prob. 13-99

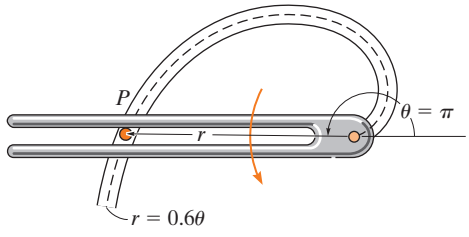
***13-100.** El brazo OA guía la bola de 0.5 lb a lo largo de la trayectoria circular que está en un plano vertical $r = 2r_c \cos\theta$. Si la velocidad angular del brazo es $\dot{\theta} = 0.4$ rad/s y la aceleración angular es $\ddot{\theta} = 0.8$ rad/s^2 en el instante $\theta = 30°$, determine la fuerza del brazo en la bola. Ignore la fricción y el tamaño de la bola. Establezca $r_c = 0.4$ ft.

13-101. El brazo OA guía la bola de masa m a lo largo de la trayectoria circular que está en un plano vertical $r = 2r_c \cos\theta$. Si la velocidad angular constante del brazo es $\dot{\theta}_0$, determine el ángulo $\theta \leq 45°$ al cual la bola comienza a dejar la superficie del semicilindro. Ignore la fricción y el tamaño de la bola.



Probs. 13-100/101

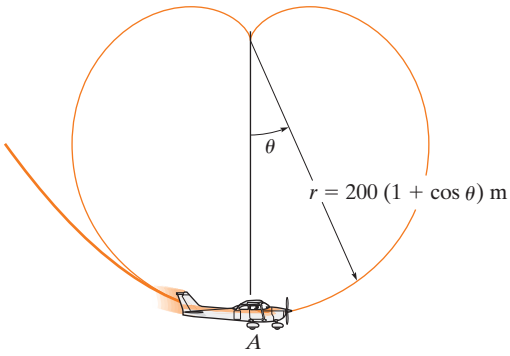
13-102. Usando una varilla en forma de horquilla, un cilindro liso P con masa de 0.4 kg es obligado a moverse a lo largo de la trayectoria *ranurada que está en un plano vertical* $r = (0.6\theta)$ m, donde θ se da en radianes. Si el cilindro tiene una rapidez constante de $v_C = 2$ m/s, determine la fuerza de la varilla y la fuerza normal de la ranura sobre el cilindro en el instante $\theta = p$ rad. Suponga que el cilindro está en contacto sólo con *un borde* de la varilla y la ranura en cualquier instante. *Sugerencia:* Para obtener las derivadas con respecto al tiempo necesarias para calcular las componentes de aceleración del cilindro a_r y a_θ, calcule la primera y la segunda derivadas con respecto al tiempo de $r = 0.6\theta$. Luego, para más información, utilice la ecuación 12-26 a fin de determinar $\dot{\theta}$. Además, obtenga la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 12-26 notando que $\dot{v} = 0$ para determinar $\ddot{\theta}$.



Prob. 13-102

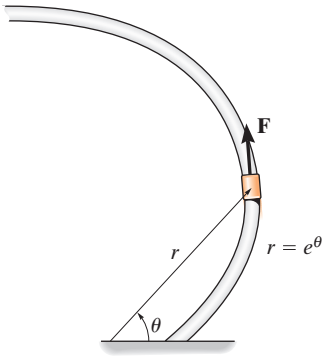
13

13-103. El piloto del avión vuela en un trayecto que está en un plano vertical que en parte sigue la trayectoria de una cardioide, $r = 200\,(1 + \cos\theta)$ m, donde θ está en radianes. Si su rapidez en A es una constante $v_p = 85$ m/s, determine la reacción vertical que ejerce el asiento del avión sobre el piloto, cuando el avión está en A. Él tiene una masa de 80 kg. *Sugerencia:* Para obtener las derivadas con respecto al tiempo necesarias para calcular las componentes de aceleración a_r y a_θ, calcule la primera y la segunda derivadas con respecto al tiempo de $r = 200(1 + \cos\theta)$. Después, para mayor información, use la ecuación 12-26 a fin de determinar $\dot{\theta}$.



Prob. 13-103

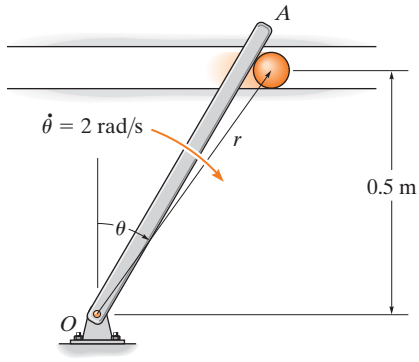
***13-104.** El collarín tiene una masa de 2 kg y se desplaza a lo largo de la varilla lisa que está en un plano horizontal definida por la espiral equiangular $r = (e^{\theta})$ m, donde θ está en radianes. Determine la fuerza tangencial F y la fuerza normal N que actúan sobre el collarín cuando $\theta = 45°$, si la fuerza F mantiene un movimiento angular constante $\dot{\theta} = 2$ rad/s.



Prob. 13-104

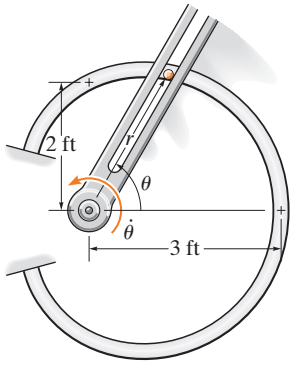
13-105. La partícula tiene una masa de 0.5 kg y está limitada a moverse a lo largo de la ranura horizontal lisa debido a la rotación del brazo OA. Determine la fuerza de la varilla sobre la partícula y la fuerza normal de la ranura sobre la partícula cuando $\theta = 30°$. La varilla gira con una velocidad angular constante $\dot{\theta} = 2$ rad/s. Suponga que la partícula sólo tiene contacto con un lado de la ranura en cualquier instante.

13-106. Resuelva el problema 13-105 si el brazo tiene una aceleración angular de $\ddot{\theta} = 3$ rad/s^2 cuando $\dot{\theta} = 2$ rad/s en $\theta = 30°$.



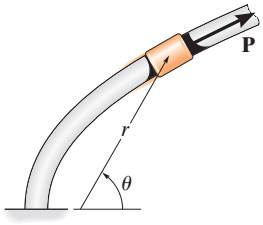
Probs. 13-105/106

13-107. La varilla en forma de horquilla se utiliza para mover la partícula lisa de 2 lb alrededor de la trayectoria que está en un plano horizontal en la forma de un limaçon de Pascal, $r = (2 + \cos\theta)$ ft. Si $\theta = (0.5t^2)$ rad, donde t se da en segundos, determine la fuerza que ejerce la varilla sobre la partícula en el instante $t = 1$ s. La horquilla y la trayectoria hacen contacto con la partícula en un solo lado.



Prob. 13-107

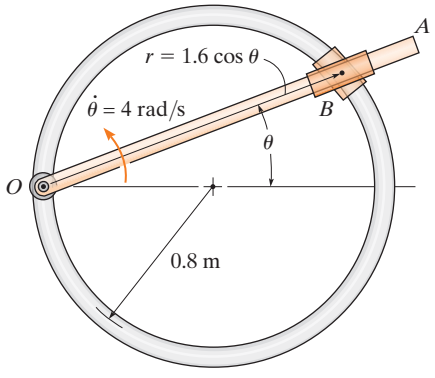
***13-108.** El collarín con peso de 3 libras se desliza a lo largo de la varilla lisa, que descansa en un *plano horizontal* y tiene la forma de una parábola $r = 4/(1 - \cos\theta)$, donde θ se da en radianes y r está en pies. Si la velocidad angular del collarín es constante y es igual $\dot{\theta} = 4$ rad/s, determine la fuerza de retardo tangencial P necesaria para causar el movimiento y la fuerza normal que el collarín ejerce sobre la varilla en el instante $\theta = 90°$.



Prob. 13-108

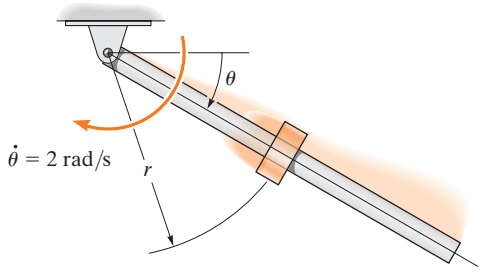
13-109. La varilla OA gira en sentido antihorario a una velocidad angular constante $\dot{\theta} = 4$ rad/s. El collarín doble B está articulado de modo que un collarín se desliza sobre la varilla giratoria y el otro se desliza sobre la varilla circular descrita por la ecuación $r = (1.6 \cos\theta)$ m. Si *ambos* collarines tienen una masa de 0.5 kg, determine la fuerza que ejerce la varilla circular sobre uno de los collarines y la fuerza que ejerce OA sobre el otro collarín en el instante $\theta = 45°$. El movimiento ocurre en el plano horizontal.

13-110. Resuelva el problema 13-109 si el movimiento ocurre en el plano vertical.



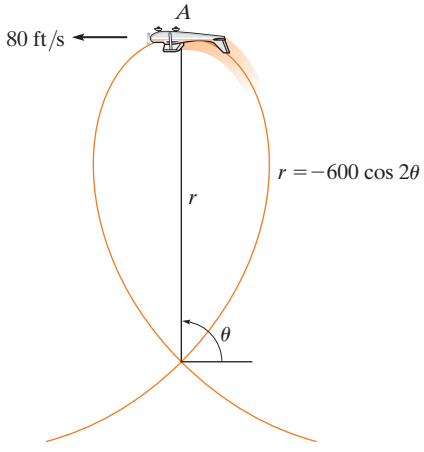
Probs. 13-109/110

13-111. Un carrete de 0.2 kg se desliza hacia abajo a lo largo de una varilla lisa. Si la varilla tiene una velocidad angular constante $\dot{\theta} =$ rad/s en el plano vertical, demuestre que las ecuaciones de movimiento para el carrete son $\ddot{r} - 4r - 9.81 \operatorname{sen}\theta = 0$ y $0.8\ddot{r} + N_s - 1.962\cos\theta = 0$, donde N_s es la magnitud de la fuerza normal de la varilla sobre el carrete. Si se usan los métodos de ecuaciones diferenciales, es posible demostrar que la solución de la primera de estas ecuaciones es $r = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} - (9.81/8)\operatorname{sen} 2t$. Si r, $\dot{r}$, y θ son cero cuando $t = 0$, evalúe las constantes C_1 y C_2 determine r en el instante $\theta = \pi/4$ rad.

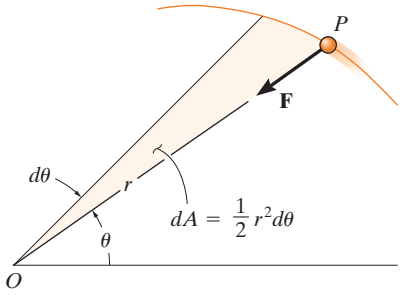


Prob. 13-111

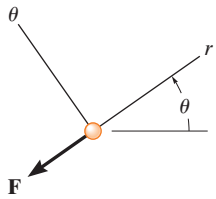
***13-112.** El piloto de un avión vuela en un trayecto que está en un plano vertical que en parte sigue la trayectoria de una "rosa de cuatro hojas", $r = (-600\cos 2\theta)$ ft, donde θ está en radianes. Si su rapidez es una constante $v_p = 80$ ft/s, determine la reacción vertical que el asiento del avión ejerce sobre el piloto cuando el avión está en A. El piloto pesa 130 lb. *Sugerencia:* Para obtener las derivadas con respecto al tiempo necesarias y calcular las componentes de aceleración a_r y a_θ, determine la primera y la segunda derivadas con respecto al tiempo de $r = (-600\cos 2\theta)$. Luego, para más información, utilice la ecuación 12-26 a fin de determinar $\dot{\theta}$. Además, obtenga la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 12-26 notando que $\dot{v}_P = 0$para determinar $\dot{\theta}$.



Prob. 13-112



(a)



(b)

Fig. 13-22

*13.7 Movimiento de fuerza central y mecánica espacial

Si una partícula se mueve sólo bajo la influencia de una fuerza cuya línea de acción siempre está dirigida hacia un punto fijo, el movimiento se llama *movimiento de fuerza central*. Por lo común, este tipo de movimiento lo provocan las fuerzas electrostática y gravitacional.

Para analizar el movimiento, consideraremos la partícula P de la figura 13-22*a*, de masa m, en la que actúa sólo la fuerza central $\mathbf{F}$. El diagrama de cuerpo libre de la partícula se muestra en la figura 13-22*b*. Con coordenadas polares (r, θ), las ecuaciones de movimiento, ecuaciones 13-9, se escriben

$$\Sigma F_r = ma_r; \qquad -F = m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] \tag{13-11}$$

$$\Sigma F_\theta = ma_\theta; \qquad 0 = m\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)$$

La segunda de estas ecuaciones se escribe como

$$\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right] = 0$$

de modo que al integrar se obtiene

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h \tag{13-12}$$

Aquí h es la constante de integración.

En la figura 13-22*a* observe que el área sombreada descrita por el radio r, a medida que r describe un ángulo $d\theta$, es $dA = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$. Si la *velocidad areolar* se define como

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{2} \tag{13-13}$$

entonces se observa que la velocidad areolar de una partícula sometida a un movimiento de fuerza central es *constante*. Expresado de otra manera, la partícula barrerá segmentos de área iguales por unidad de tiempo a medida que se desplaza a lo largo de la trayectoria. Para obtener la *trayectoria del movimiento*, $r = f(\theta)$, la variable independiente t se elimina de las ecuaciones 13-11. Con la regla de la cadena del cálculo y la ecuación 13-12, las derivadas con respecto al tiempo de las ecuaciones 13-11 se pueden reemplazar por

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)\right]\frac{h}{r^2}$$

Si sustituimos una nueva variable dependiente (xi) $\xi = 1/r$ en la segunda ecuación, entonces

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h^2\xi^2\frac{d^2\xi}{d\theta^2}$$

Además, el cuadrado de la ecuación 13-12 se escribe como

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = h^2\xi^4$$

Al sustituir estas dos ecuaciones en la primera de las ecuaciones 13-11 se tiene

$$-h^2\xi^2\frac{d^2\xi}{d\theta^2} - h^2\xi^3 = -\frac{F}{m}$$

o

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi = \frac{F}{mh^2\xi^2} \tag{13-14}$$

Esta ecuación diferencial define la trayectoria por la que la partícula viaja cuando se somete a la fuerza central **F***.

Para su aplicación, se considerará la fuerza de atracción gravitacional. Algunos ejemplos comunes de sistemas de fuerza central que dependen de la gravitación incluyen el movimiento de la Luna y los satélites artificiales alrededor de la Tierra, así como el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Como un problema típico de mecánica espacial, considere la trayectoria de un satélite o un vehículo espacial lanzado a una órbita de vuelo libre con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ (fig. 13-23). Se supondrá que esta velocidad inicialmente es *paralela* a la tangente en la superficie terrestre, como se indica en la figura†. Un poco después de que el satélite vuela libremente, la única fuerza que actúa en él es la fuerza gravitacional de la Tierra. (Las atracciones gravitacionales que implican otros cuerpos como la Luna o el Sol se omitirán, ya que el caso de órbitas cercanas a la Tierra su efecto es pequeño comparado con la gravitación terrestre.) Según la ley de Newton de la gravitación, la fuerza **F** siempre actuará entre los centros de masa de la Tierra y el satélite (fig. 13-23). De acuerdo con la ecuación 13-1, la magnitud de esta fuerza de atracción es

$$F = G\frac{M_e m}{r^2}$$

donde M_e y m representan la masa de la Tierra y el satélite, respectivamente, G es la contante gravitacional y r es la distancia entre los centros de

Este satélite está sometido a una fuerza central y su movimiento orbital se puede pronosticar de forma aproximada mediante las ecuaciones desarrolladas en esta sección. (UniversalImagesGroup/ Getty Images)

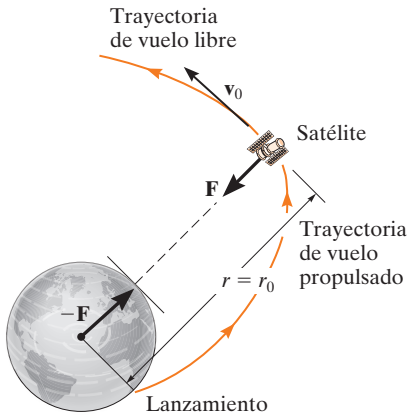


Fig. 13-23

*En la derivación, **F** se considera positiva cuando está dirigida hacia el punto *O*. Si **F** se dirige en sentido opuesto, el lado derecho de la ecuación 13-14 deberá ser negativo.

†El caso en que $\mathbf{v}_0$ actúa a cierto ángulo inicial θ con respecto a la tangente, puede describirse mejor mediante el principio de conservación de la cantidad de movimiento angular.

masa. Para obtener la trayectoria orbital, establecemos $\xi = 1/r$ en la ecuación precedente y sustituimos el resultado en la ecuación 13-14. Obtenemos

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi = \frac{GM_e}{h^2} \tag{13-15}$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden tiene coeficientes constantes y es no homogénea. La solución es la suma de las soluciones complementarias y particulares dadas por

$$\xi = \frac{1}{r} = C\cos(\theta - \phi) + \frac{GM_e}{h^2} \tag{13-16}$$

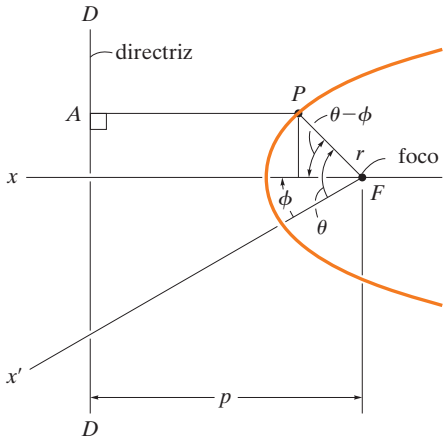


Fig. 13-24

Esta ecuación representa la *trayectoria de vuelo libre* del satélite. Es la ecuación de una sección cónica expresada en función de coordenadas polares.

Una interpretación geométrica de la ecuación 13-16 requiere conocer la ecuación de una sección cónica. Como se muestra en la figura 13-24, una sección cónica se define como el lugar geométrico de un punto P que se desplaza de modo que la relación de su distancia a un *foco*, punto fijo F, a su distancia perpendicular a una línea fija DD llamada *directriz*, es constante. Esta relación constante se denotará como e y se llama *excentricidad*. Por definición

$$e = \frac{FP}{PA}$$

Por la figura 13-24,

$$FP = r = e(PA) = e[p - r\cos(\theta - \phi)]$$

o bien,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}\cos(\theta - \phi) + \frac{1}{ep}$$

Al comparar esta ecuación con la ecuación 13-16, se observa que la distancia fija del foco a la directriz es

$$p = \frac{1}{C} \tag{13-17}$$

Y la excentricidad de la sección cónica de la trayectoria es

$$e = \frac{Ch^2}{GM_e} \tag{13-18}$$

Siempre que el ángulo polar θ se mida con respecto al eje x (un eje de simetría pues es perpendicular a la directriz), el ángulo ϕ es cero (fig. 13-24) y, por consiguiente, la ecuación 13-16 se reduce a

$$\frac{1}{r} = C\cos\theta + \frac{GM_e}{h^2} \tag{13-19}$$

Las constantes h y C se determinan con los datos obtenidos para la posición y velocidad del satélite al final de la *trayectoria de vuelo propulsado*. Por ejemplo, si la altura o distancia inicial al vehículo espacial es r_0, medida desde el centro de la Tierra, y su velocidad inicial es v_0 al inicio de su vuelo libre (fig. 13-25), entonces la constante h se obtiene con la ecuación 13-12. Cuando $\theta = \phi = 0°$, la velocidad $\mathbf{v}_0$ no tiene componente radial; por lo tanto, de acuerdo con la ecuación 12-25, $v_0 = r_0(d\theta/dt)$, de modo que

$$h = r_0^2\frac{d\theta}{dt}$$

o bien,

$$\boxed{h = r_0 v_0} \tag{13-20}$$

Para determinar C, use la ecuación 13-19 con $\theta = 0°$, $r = r_0$ y sustituya en la ecuación 13-20 para h:

$$\boxed{C = \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{GM_e}{r_0 v_0^2}\right)} \tag{13-21}$$

La ecuación de la trayectoria de vuelo libre es

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{GM_e}{r_0 v_0^2}\right)\cos\theta + \frac{GM_e}{r_0^2 v_0^2}} \tag{13-22}$$

El tipo de trayectoria recorrida por el satélite se determina con el valor de la excentricidad de la sección cónica dada por la ecuación 13-18. Si

$$\begin{array}{ll} e = 0 & \text{la trayectoria de vuelo libre es un círculo} \\ e = 1 & \text{la trayectoria de vuelo libre es una parábola} \\ e < 1 & \text{la trayectoria de vuelo libre es una elipse} \\ e > 1 & \text{la trayectoria de vuelo libre es una hipérbola} \end{array} \tag{13-23}$$

Trayectoria parabólica. Cada una de estas trayectorias se muestra en la figura 13-25. De las curvas se observa que cuando el satélite sigue una trayectoria parabólica, está "en el borde" de que nunca regrese a su punto de partida inicial. La velocidad de lanzamiento inicial, $\mathbf{v}_0$, requerida para que el satélite siga una trayectoria parabólica se llama *velocidad de escape*. La rapidez v_e se determina con la segunda de las ecuaciones 13-23, $e = 1$, con las ecuaciones 13-18, 13-20 y 13-21. Se deja como ejercicio demostrar que

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{r_0}} \tag{13-24}$$

Órbita circular. La rapidez v_c requerida para lanzar un satélite a una órbita circular se puede determinar mediante la primera de las ecuaciones 13-23, $e = 0$. Como e está relacionada con h y C, ecuación 13-18, C debe ser cero para satisfacer esta ecuación (de acuerdo con la ecuación 13-20, h no puede ser cero) y, por consiguiente, mediante la ecuación 13-21, tenemos

$$v_c = \sqrt{\frac{GM_e}{r_0}} \tag{13-25}$$

Siempre que r_0 representa la altura mínima de lanzamiento, en la cual se omite la resistencia a la fricción de la atmósfera, las velocidades de lanzamiento menores que v_c harán que el satélite reingrese a la atmósfera terrestre y se quemará o estrellará (fig. 13-25).

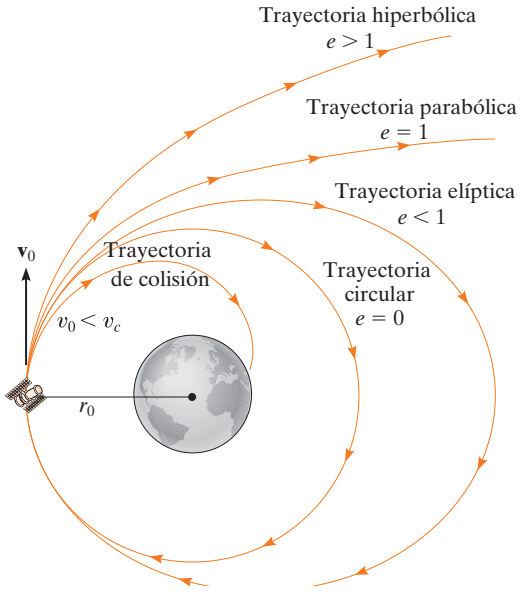


Fig. 13-25

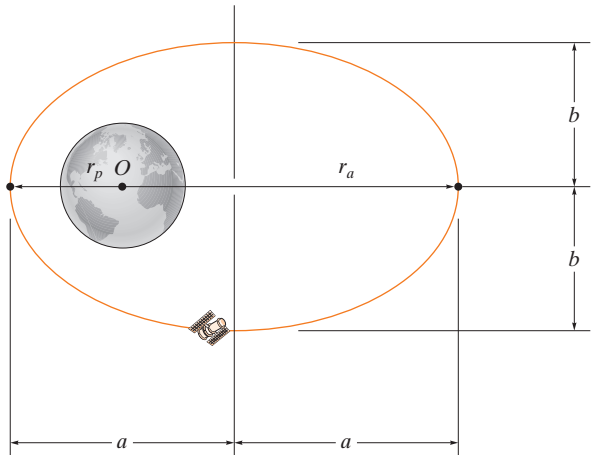


Fig. 13-26

Órbita elíptica. Todas las trayectorias alcanzadas por los planetas y la mayoría de los satélites son elípticas (fig. 13-26). Para la órbita de un satélite alrededor de la Tierra, la *distancia mínima* de la órbita al centro de la Tierra O (que se encuentra en uno de los focos de la elipse) es r_p y se determina con la ecuación 13-22 y $\theta = 0°$. Por consiguiente;

$$r_p = r_0 \tag{13-26}$$

Esta distancia mínima se llama *perigeo* de la órbita. El *apogeo* o distancia máxima r_a se determina con la ecuación 13-22 y $\theta = 180°$*. Por lo tanto,

$$r_a = \frac{r_0}{(2GM_e/r_0v_0^2) - 1} \tag{13-27}$$

Con referencia a la figura 13-26, la mitad del eje mayor de la elipse es

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} \tag{13-28}$$

Por geometría analítica se demuestra que la mitad del eje menor se determina con la ecuación

$$b = \sqrt{r_p r_a} \tag{13-29}$$

*En realidad, la terminología perigeo y apogeo tiene que ver sólo con órbitas alrededor de la *Tierra*. Si cualquier otro cuerpo celestial se localiza en el foco de una órbita elíptica, las distancias mínimas y máximas se conocen respectivamente como *periapsis* y *apoapsis* de la órbita.

Asimismo, mediante integración directa, el área de una elipse es

$$A = \pi ab = \frac{\pi}{2}(r_p + r_a)\sqrt{r_p r_a} \tag{13-30}$$

La ecuación 13-13 definió la velocidad areolar, $dA/dt = h/2$. Al integrar se obtiene $A = hT/2$, donde T es el *periodo* de tiempo requerido para realizar una revolución orbital. Según la ecuación 13-30, el periodo es

$$T = \frac{\pi}{h}(r_p + r_a)\sqrt{r_p r_a} \tag{13-31}$$

Además de predecir la trayectoria orbital de satélites terrestres, la teoría desarrollada en esta sección es válida, hasta una aproximación sorprendentemente cercana, para predecir el movimiento real de los planetas que viajan alrededor del Sol. En este caso, la masa del Sol, M_s, se debería sustituir por M_e cuando se utilicen las fórmulas apropiadas.

El hecho de que los planetas sigan órbitas elípticas alrededor del Sol fue descubierto por el astrónomo alemán Johannes Kepler a principios del siglo XVII. Realizó su descubrimiento *antes* de que Newton desarrollara las leyes del movimiento y la ley de la gravitación y, por lo tanto, en esa época constituyó una demostración importante de la validez de estas leyes. Las leyes de Kepler, desarrolladas después de 20 años de su observación planetaria, se resumen como sigue:

1. Todo planeta viaja en su órbita de tal suerte que la línea que lo une con el centro del Sol barre áreas iguales a intervalos de tiempo iguales, cualquiera que sea la longitud de la línea.

2. La órbita de todo planeta es una elipse con el Sol colocado en uno de sus focos.

3. El cuadrado del periodo de cualquier planeta es directamente proporcional al cubo del eje mayor de su órbita.

Las ecuaciones 13-13 y 13-22 representan matemáticamente la primera y la segunda leyes, respectivamente. La tercera ley puede comprobarse con la ecuación 13-31 mediante las ecuaciones 13-19, 13-28 y 13-29 (vea el problema 13-117).

PROBLEMAS

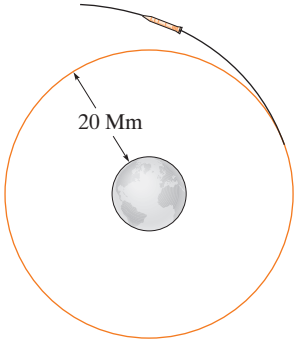
En los siguientes problemas, excepto donde se indique lo contrario, suponga que el radio de la Tierra es de 6378 km, que su masa es de 5.976 (10^{24}) kg, que la masa del Sol es de 1.99 (10^{30}) kg y que la constante gravitacional es $G = 66.73\ (10^{-12})\ \text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$.

13-113. La Tierra tiene una órbita con excentricidad de 0.0167 alrededor del Sol. Si se sabe que la distancia mínima de la Tierra al Sol es de 146(10^6) km, encuentre la rapidez a la que la Tierra viaja cuando está a esa distancia. Determine la ecuación en coordenadas polares que describe la órbita de la Tierra alrededor del Sol.

13-114. Un satélite de comunicaciones viaja en una órbita circular sobre la Tierra, de modo que siempre permanece sobre un punto fijo de la superficie terrestre. En consecuencia, su periodo debe ser igual a la rotación de la Tierra, que es aproximadamente de 24 horas. Determine la altitud del satélite h sobre la superficie terrestre y su rapidez orbital.

13-115. La ecuación 13-25 proporciona la rapidez de un satélite lanzado en una órbita circular alrededor de la Tierra. Determine la rapidez de un satélite lanzado paralelo a la superficie terrestre, de modo que viaje en una órbita circular a 800 km de la superficie terrestre.

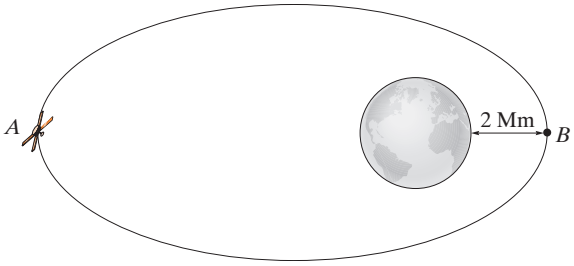
***13-116.** El cohete está en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altitud de 20 Mm. Determine el incremento mínimo en la rapidez que debe tener, a fin de escapar del campo gravitacional terrestre.



Prob. 13-116

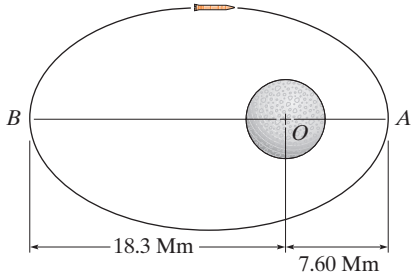
13-117. Demuestre la tercera ley de Kepler del movimiento. *Sugerencia:* Use las ecuaciones 13-19, 13-28, 13-29 y 13-31.

13-118. El satélite se mueve en una órbita elíptica con una excentricidad $e = 0.25$. Determine su rapidez cuando está en su distancia máxima A y distancia mínima B de la Tierra.



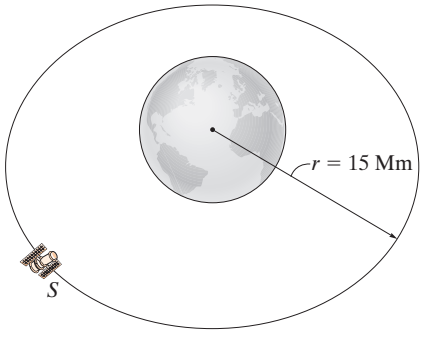
Prob. 13-118

13-119. El cohete viaja en vuelo libre a lo largo de la órbita elíptica. El planeta no tiene atmósfera y su masa es 0.60 veces la masa de la Tierra. Si el cohete tiene la órbita mostrada, determine la rapidez del cohete cuando está en A y en B.



Prob. 13-119

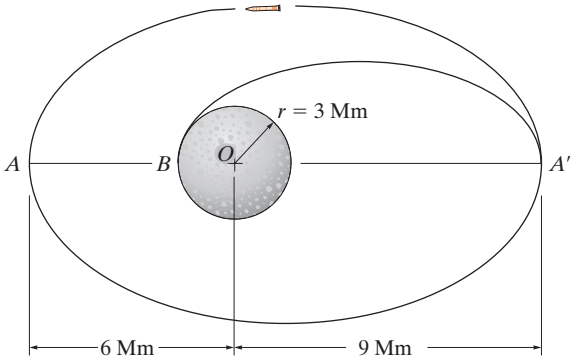
***13-120.** Determine la rapidez constante del satélite S, de modo que viaje en una trayectoria circular alrededor de la Tierra con una órbita de radio $r = 15$ Mm. *Sugerencia:* Utilice la ecuación 13-1.



Prob. 13-120

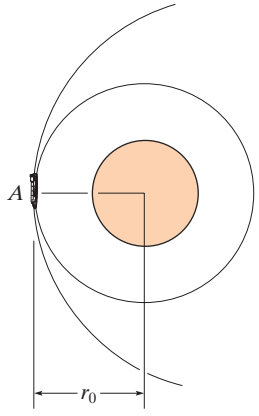
13

13-121. El cohete está en vuelo libre a lo largo de una trayectoria elíptica $A'A$. El planeta no tiene atmósfera y su masa es 0.70 veces la masa de la Tierra. Si el cohete tiene una apoapsis y una periapsis como las mostradas en la figura, determine la rapidez del cohete cuando está en el punto A.



Prob. 13-121

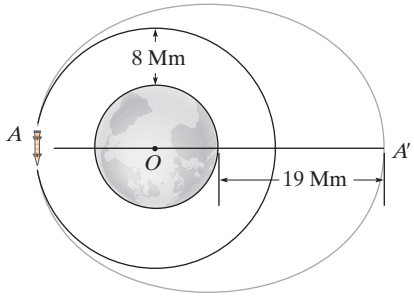
13-122. El explorador Viking se aproxima al planeta Marte en una trayectoria parabólica como se indica. Cuando llega al punto A su velocidad es de 10 Mm/h. Determine r_0 y la velocidad requerida en A de modo que pueda mantenerse entonces en una órbita circular como se muestra. La masa de Marte es 0.1074 veces la masa de la Tierra.



Prob. 13-122

13-123. El cohete está inicialmente en un vuelo libre de órbita circular alrededor de la Tierra. Determine la rapidez del cohete en A. ¿Qué cambio en la rapidez en A se requiere para que pueda moverse en una órbita elíptica hasta alcanzar el punto A'?

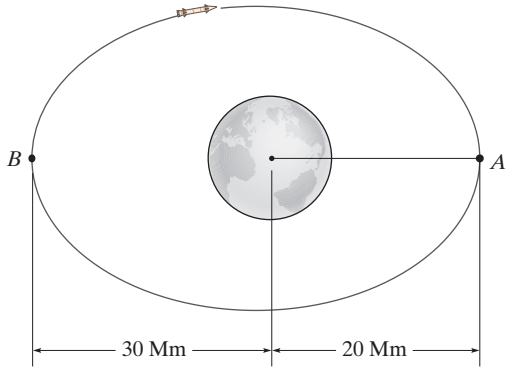
***13-124.** El cohete está en un vuelo libre de órbita circular alrededor de la Tierra. Determine el tiempo necesario para que el cohete viaje desde la órbita interna en A hasta la órbita externa en A'.



Probs. 13-123/124

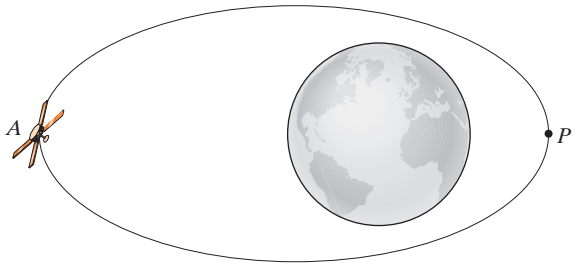
13-125. Un satélite se lanza en su apogeo con una velocidad inicial $v_0 = 2500$ mi/h paralela a la superficie de la Tierra. Determine la altitud requerida (o el intervalo de altitudes requerido) sobre la superficie terrestre para el lanzamiento, si la trayectoria de vuelo libre debe ser (a) circular, (b) parabólica, (c) elíptica, con lanzamiento en el apogeo y (d) hiperbólica. Considere que $G = 34.4(10^{-9})(\text{lb}\cdot\text{ft}^2)/\text{slug}^2$, $M_e = 409(10^{21})$ slug, el radio de la Tierra $r_e = 3960$ mi y 1 mi = 5280 ft.

13-126. El cohete se desplaza alrededor de la Tierra en vuelo libre a lo largo de una órbita elíptica. Si el cohete tiene la órbita mostrada, determine la rapidez del cohete cuando está en A y en B.



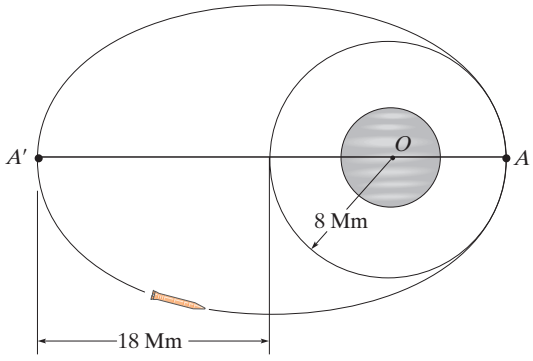
Prob. 13-126

13-127. Una trayectoria elíptica de un satélite tiene una excentricidad $e = 0.130$. Si tiene una rapidez de 15 Mm/h cuando está en el perigeo, P, determine su rapidez cuando llega al apogeo, A. Además, ¿a qué distancia se encuentra con respecto a la superficie de la Tierra cuando está en A?



Prob. 13-127

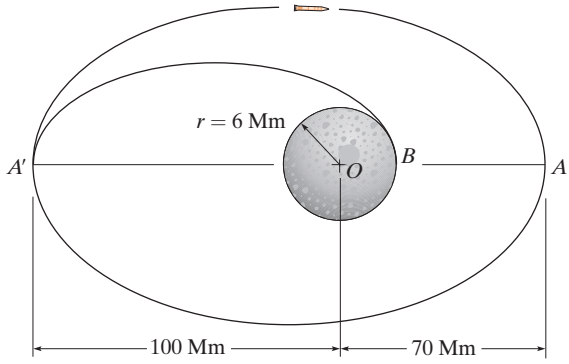
***13-128.** Un cohete está en vuelo libre de órbita elíptica alrededor del planeta Venus. Si se sabe que el perigeo y la apoapsis de la órbita son de 8 Mm y 26 Mm, respectivamente, determine (a) la rapidez del cohete en el punto A', (b) la rapidez requerida que debe alcanzar en A justo después de frenar, de modo que experimente un vuelo libre de órbita circular de 8 Mm alrededor de Venus, y (c) los periodos de las órbitas circular y elíptica. La masa de Venus es 0.816 veces la masa de la Tierra.



Prob. 13-128

13-129. El cohete viaja en vuelo libre a lo largo de una trayectoria elíptica $A'A$. El planeta no tiene atmósfera, y su masa es 0.60 veces la masa de la Tierra. Si el cohete tiene la órbita mostrada, determine la velocidad del cohete cuando está en el punto A.

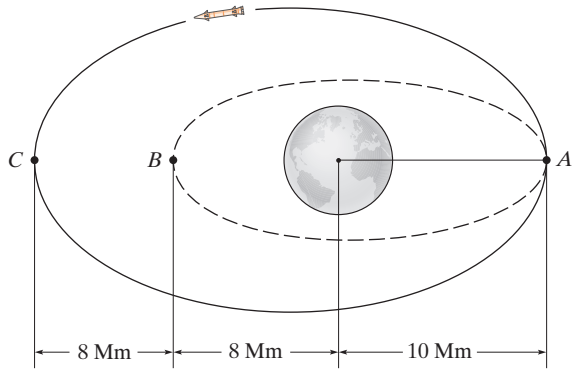
13-130. Si el cohete debe aterrizar en la superficie del planeta, determine la rapidez que debe tener el vuelo libre en A' para que el aterrizaje se produzca en B. ¿Cuánto tiempo se requiere para que el cohete aterrice, yendo desde A' hasta B? El planeta no tiene atmósfera y su masa es 0.6 veces la masa de la Tierra.



Probs. 13-129/130

13-131. El cohete se desplaza alrededor de la Tierra en vuelo libre a lo largo de una órbita elíptica AC. Si el cohete tiene la órbita mostrada, determine la velocidad del cohete cuando está en el punto A.

***13-132.** El cohete se desplaza alrededor de la Tierra en vuelo libre a lo largo de la órbita elíptica AC. Determine su cambio en la rapidez cuando llega a A de modo que viaje a lo largo de la órbita elíptica AB.

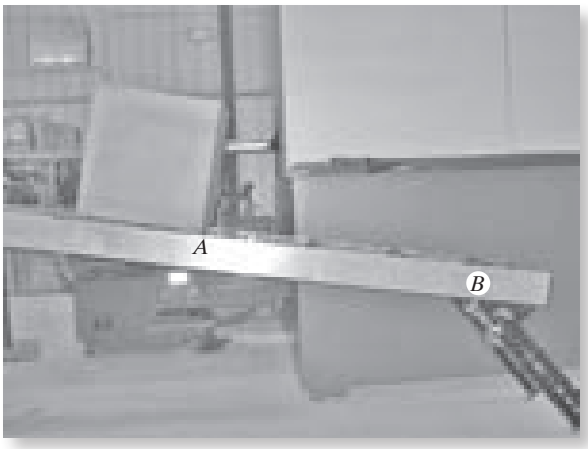


Probs. 13-131/132

13

PROBLEMAS CONCEPTUALES

C13-1. Si la caja se suelta desde el reposo en *A*, use valores numéricos para demostrar cómo estimaría el tiempo que le lleva llegar a *B*. Además, haga una lista de las suposiciones hechas en su análisis.



Prob. C13-1 (© R. C. Hibbeler)

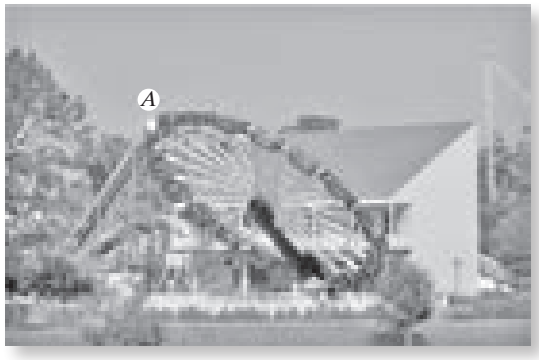
C13-2. El remolcador tiene una masa conocida y su hélice proporciona un empuje máximo conocido. Cuando el remolcador marcha a toda máquina calcule el tiempo que le lleva alcanzar una velocidad de valor conocido, si partió del reposo. Demuestre cómo podría determinar la masa de la barcaza. Ignore la resistencia del agua en el remolcador. Use valores numéricos para explicar su respuesta.

Prob. C13-2 (© R. C. Hibbeler)

C13-3. Determine la rapidez mínima de cada carro *A* y *B*, de modo que los pasajeros no pierdan el contacto con el asiento mientras los brazos giran a una velocidad angular constante. ¿Cuál es la fuerza normal máxima del asiento en cada pasajero? Use valores numéricos para explicar su respuesta.

Prob. C13-3 (© R. C. Hibbeler)

C13-4. Cada carro está conectado en sus extremos por medio de un pasador al aro de la rueda, la cual gira a una rapidez constante. Usando valores numéricos demuestre cómo se determina la fuerza resultante que el asiento ejerce en el pasajero localizado en la parte superior del carro *A*. Los pasajeros van sentados hacia el centro de la rueda. Además, haga una lista de las suposiciones hechas en su análisis.



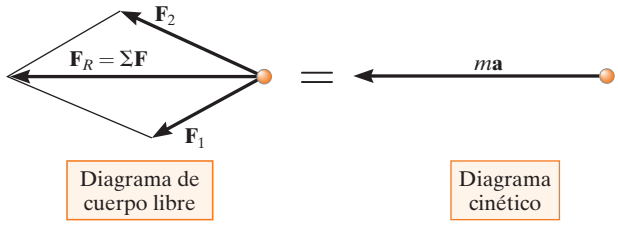
Prob. C13-4 (© R. C. Hibbeler)

REPASO DEL CAPÍTULO

Cinética

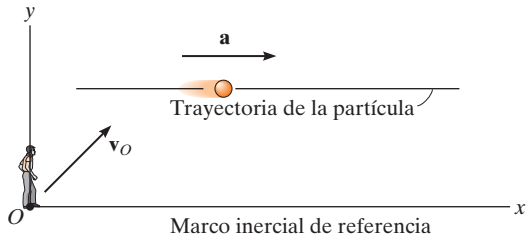
Cinética es el estudio de la relación entre las fuerzas y la aceleración que provocan. Esta relación está basada en la segunda ley de Newton del movimiento, expresada matemáticamente como $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Antes de aplicar la ecuación de movimiento, es importante trazar primero el *diagrama de cuerpo libre* de la partícula para tener en cuenta todas las fuerzas que actúan en ella. Gráficamente, este diagrama es igual al *diagrama cinético*, que muestra el resultado de las fuerzas, esto es, el vector $m\mathbf{a}$.



Sistema de coordenadas inercial

Cuando se aplica la ecuación de movimiento, es importante medir la aceleración desde un sistema de coordenadas inercial. Este sistema consta de ejes que no giran, sino que están fijos o se trasladan a una velocidad constante. Varios tipos de sistemas de coordenadas inerciales pueden utilizarse para aplicar la ecuación $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ en su forma de componentes.



Se utilizan ejes rectangulares x, y, z para describir el movimiento a lo largo de cada uno de los ejes.

$$\Sigma F_x = ma_x,\ \Sigma F_y = ma_y,\ \Sigma F_z = ma_z$$

Con frecuencia se utilizan ejes normales, tangenciales y binormales n, t, b, cuando se conoce la trayectoria de la partícula. Recuerde que $\mathbf{a}_n$ siempre está dirigida en la dirección $+n$ e indica el cambio en la dirección de la velocidad. Asimismo recuerde que $\mathbf{a}_t$ es tangente a la trayectoria e indica el cambio en la magnitud de la velocidad.

$$\Sigma F_t = ma_t,\ \Sigma F_n = ma_n,\ \Sigma F_b = 0$$
$$a_t = dv/dt \quad \text{o bien} \quad a_t = v\,dv/ds$$
$$a_n = v^2/\rho \quad \text{donde } \rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$$

Las coordenadas cilíndricas son útiles cuando se especifica el movimiento angular de la línea radial r o cuando la trayectoria se puede describir de manera conveniente con tales coordenadas.

$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$
$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$
$$\Sigma F_z = m\ddot{z}$$

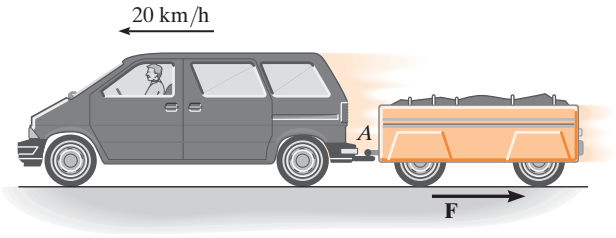
Movimiento de fuerza central

Cuando una única fuerza actúa en una partícula, como durante la trayectoria de vuelo libre de un satélite en un campo gravitacional, entonces el movimiento se conoce como movimiento de fuerza central. La órbita depende de la excentricidad e; y por consiguiente, la trayectoria puede ser circular, parabólica, elíptica o hiperbólica.

13

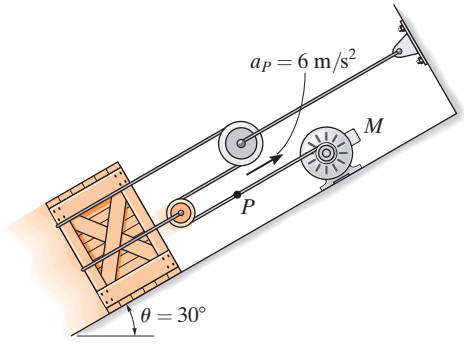
PROBLEMAS DE REPASO

R13-1. La furgoneta viaja a 20 km/h cuando falla el acoplamiento del remolque en A. Si la masa del remolque es de 250 kg y recorre 45 m antes de detenerse, determine la fuerza horizontal constante F creada por la fricción de rodamiento que hace que el remolque se detenga.



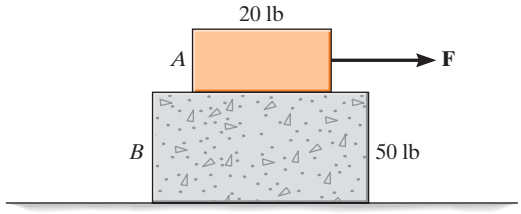
Prob. R13-1

R13-2. El motor M jala la cuerda a la que está unido con una aceleración $a_P = 6\ \text{m/s}^2$. Determine la fuerza de arrastre ejercida por M sobre la cuerda para mover hacia arriba el embalaje de 50 kg sobre el plano inclinado. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el plano es $\mu_k = 0.3$. Desprecie la masa de las poleas y la cuerda.



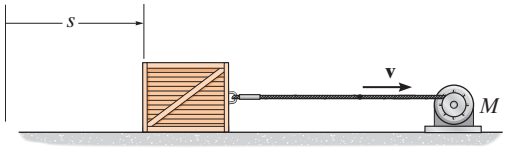
Prob. R13-2

R13-3. El bloque B descansa sobre una superficie lisa. Si los coeficientes de fricción entre A y B son $\mu_s = 0.4$ y $\mu_k = 0.3$, determine la aceleración de cada bloque si $F = 50$ lb.



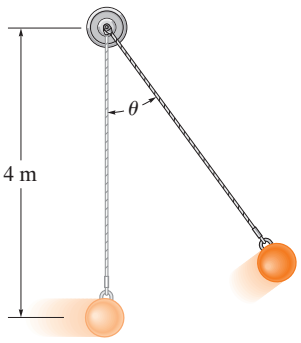
Prob. R13-3

R13-4. Si el motor enrolla el cable a razón de $v = (0.05\ s^{3/2})$ m/s, donde s se mide en metros, determine la tensión desarrollada en el cable cuando $s = 10$ m. El embalaje tiene una masa de 20 kg y el coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el suelo es $\mu_k = 0.2$.



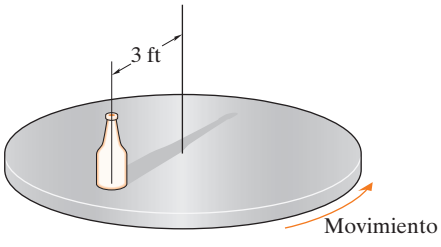
Prob. R13-4

R13-5. La bola tiene una masa de 30 kg y una rapidez $v = 4$ m/s en el instante en que se encuentra en su punto más bajo, $\theta = 0°$. Determine la tensión de la cuerda y la razón a la que disminuye la rapidez de la bola en el instante $\theta = 20°$. Desprecie el tamaño de la bola.



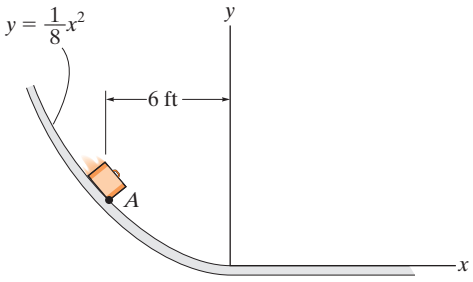
Prob. R13-5

R13-6. La botella descansa a una distancia de 3 ft desde el centro de la plataforma horizontal. Si el coeficiente de fricción estática entre la botella y la plataforma es $\mu_s = 0.3$, determine la rapidez máxima que puede alcanzar la botella antes de deslizarse. Suponga que el movimiento angular de la plataforma aumenta lentamente.



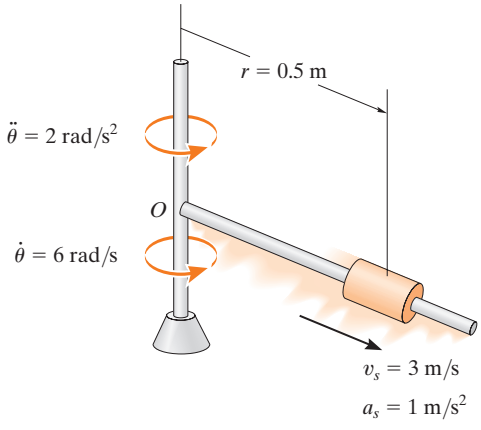
Prob. R13-6

R13-7. La maleta de 10 lb se desliza hacia abajo sobre la rampa curva cuyo coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.2$. Si en el instante que llega al punto A tiene una rapidez de 5 ft/s, determine la fuerza normal sobre la maleta y la razón a la que aumenta su rapidez.



Prob. R13-7

R13-8. El carrete con masa de 4 kg se desliza a lo largo de la varilla giratoria. En el instante mostrado, la velocidad angular de la rotación de la varilla es $\dot{\theta} = 6$ rad/s y esta rotación aumenta a $\ddot{\theta} = 2$ rad/s^2. En este mismo instante, el carrete tiene una velocidad de 3 m/s y una aceleración de 1 m/s^2, ambas medidas con respecto a la varilla y dirigidas alejándose del centro O, cuando $r = 0.5$ m. Determine la fuerza de fricción radial y la fuerza normal, ejercidas por la varilla sobre el carrete en ese instante.



Prob. R13-8

Capítulo 14

(© Oliver Furrer/Ocean/Corbis)

Conforme la mujer caiga, su energía tendrá que ser absorbida por la cuerda elástica. Los principios del trabajo y la energía pueden usarse para predecir el movimiento.

Cinética de una partícula: trabajo y energía

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Desarrollar el principio de trabajo y energía, y aplicarlo para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y desplazamiento.
- Estudiar problemas que implican potencia y eficiencia.
- Presentar el concepto de fuerza conservativa y aplicar el teorema de la conservación de la energía para resolver problemas de cinética.

14.1 Trabajo de una fuerza

En este capítulo analizaremos el movimiento de una partícula mediante los conceptos de trabajo y energía. La ecuación resultante servirá para resolver problemas que impliquen fuerza, velocidad y desplazamiento. Pero primero tenemos que definir el trabajo de una fuerza. Específicamente, una fuerza **F** realizará *trabajo* en una partícula sólo cuando ésta sufra un *desplazamiento en la dirección de la fuerza*. Por ejemplo, si la fuerza **F** en la figura 14-1 hace que la partícula se mueva a lo largo de la trayectoria s de la posición **r** a una nueva posición **r′**, el desplazamiento es entonces $d\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$. La magnitud de $d\mathbf{r}$ es ds, la longitud del segmento diferencial a lo largo de la trayectoria. Si el ángulo entre las colas de $d\mathbf{r}$ y **F** es θ (fig. 14-1), entonces el trabajo realizado por **F** es una *cantidad escalar* definida por

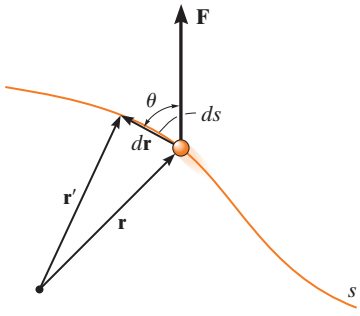


Fig. 14-1

$$dU = F\,ds\cos\theta$$

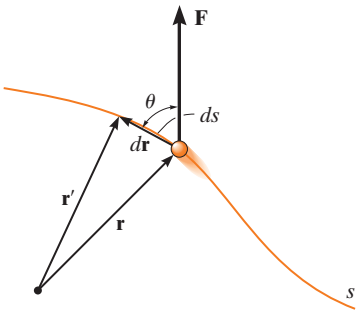


Fig. 14-1 (Reiterada)

Por definición del producto punto (vea la ecuación B-14) esta ecuación también se escribe como

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

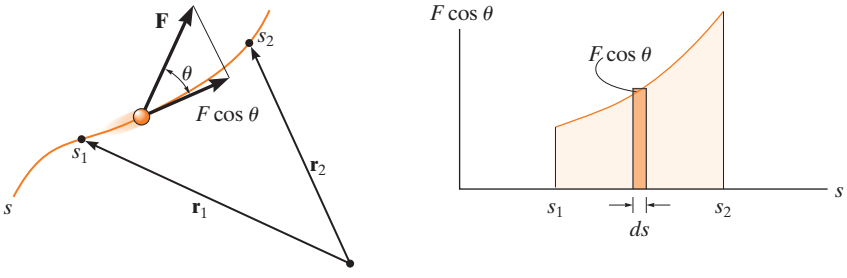
Este resultado puede interpretarse en una de dos maneras: ya sea como el producto de F y la componente del desplazamiento $ds \cos \theta$ en la dirección de la fuerza, o como el producto de ds por la componente de fuerza, $F \cos \theta$, en la dirección del desplazamiento. Observe que si $0° \leq \theta < 90°$, entonces la componente de fuerza y el desplazamiento tienen el *mismo sentido*, de modo que el trabajo es *positivo*; en tanto que si $90° < \theta \leq 180°$, estos vectores tendrán *sentido opuesto* y, por consiguiente, el trabajo es *negativo*. Asimismo, $dU = 0$ si la fuerza es *perpendicular* al desplazamiento, puesto que $\cos 90° = 0$, o si la fuerza se aplica en un *punto sin movimiento*, en cuyo caso el desplazamiento es cero.

La unidad de trabajo en unidades del SI es el joule (J), que es la cantidad de trabajo realizada por una fuerza de un newton, cuando recorre una distancia de un metro en la dirección de la fuerza ($1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$). En el sistema FPS, el trabajo se mide en unidades libra-pie, que es el trabajo realizado por una fuerza de una libra que actúa a lo largo de una distancia de un pie en la dirección de la fuerza*.

Trabajo de una fuerza variable. Si la partícula en la que actúa una fuerza **F** sufre un desplazamiento finito a lo largo de su trayectoria de $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$ o de s_1 a s_2 (fig. 14-2*a*), el trabajo de la fuerza **F** se determina mediante integración. Siempre que **F** y θ puedan expresarse en función de la posición, entonces

$$U_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos \theta \, ds \tag{14-1}$$

En ocasiones, esta relación se obtiene por medio de datos experimentales para trazar la gráfica de $F \cos \theta$ contra s. Entonces, el área bajo la gráfica limitada por s_1 y s_2 representa el trabajo total (fig. 14-2*b*).



(a) (b)

Fig. 14-2

*Por convención, las unidades del momento de una fuerza o par de torsión se escriben como lb · ft, para distinguirlas de aquellas que significan trabajo, ft · lb.

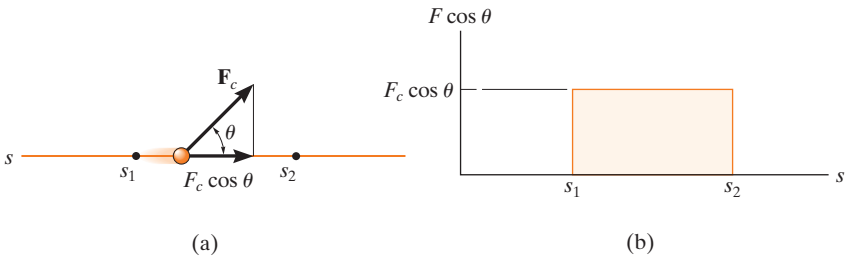


Fig. 14-3

Trabajo de una fuerza constante que actúa en una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta. Si la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}_c$ es constante y actúa a un ángulo constante θ con respecto a la trayectoria rectilínea de una partícula (fig. 14-3*a*), entonces la componente de $\mathbf{F}_c$ en la dirección del desplazamiento siempre es $F_c \cos\theta$. El trabajo realizado por $\mathbf{F}_c$ cuando la partícula se desplaza de s_1 a s_2 se determina con la ecuación 14-1, en cuyo caso

$$U_{1-2} = F_c \cos\theta \int_{s_1}^{s_2} ds$$

o bien,

$$\boxed{U_{1-2} = F_c \cos\theta (s_2 - s_1)} \qquad (14\text{-}2)$$

Aquí $\mathbf{F}_c$ representa el área del rectángulo en la figura 14-3*b*.

La grúa debe realizar trabajo para elevar el peso del tubo. (© R. C. Hibbeler)

Trabajo de un peso. Considere una partícula de peso $\mathbf{W}$, el cual se desplaza hacia arriba a lo largo de la trayectoria s mostrada en la figura 14-4, de la posición s_1 a s_2. En un punto intermedio, el desplazamiento es $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$. Como $\mathbf{W} = -W\mathbf{j}$, al aplicar la ecuación 14-1 tenemos

$$U_{1-2} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (-W\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} -W\, dy = -W(y_2 - y_1)$$

o bien,

$$\boxed{U_{1-2} = -W\,\Delta y} \qquad (14\text{-}3)$$

Por lo tanto, el trabajo es independiente de la trayectoria y es igual a la magnitud del peso de la partícula por el desplazamiento vertical. En el caso mostrado en la figura 14-4, el trabajo es *negativo*, puesto que W actúa hacia abajo y Δy es hacia arriba. Observe, sin embargo, que si la partícula se desplaza *hacia abajo* $(-\Delta y)$, el trabajo del peso es *positivo*. ¿Por qué?

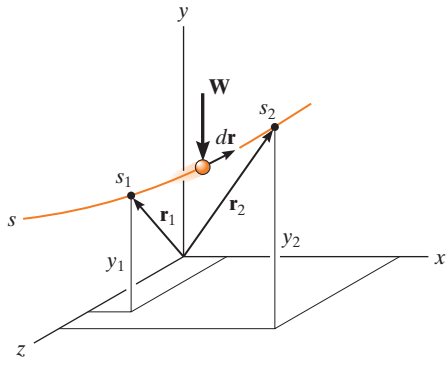


Fig. 14-4

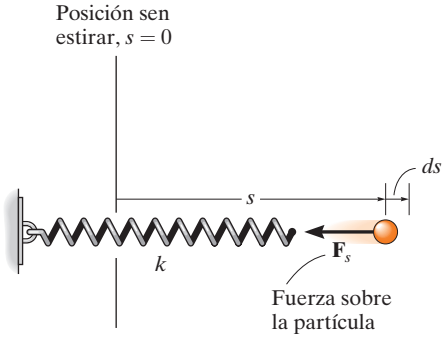
Trabajo de la fuerza de un resorte. Si un resorte elástico se alarga una distancia ds (fig. 14-5*a*), entonces el trabajo realizado por la fuerza que actúa en la partícula adjunta es $dU = -F_s ds = -ks\, ds$. El trabajo es *negativo* puesto que $\mathbf{F}_s$ actúa en el sentido opuesto a ds. Si la partícula se desplaza de s_1 a s_2, el trabajo de $\mathbf{F}_s$ es entonces

$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} F_s\, ds = \int_{s_1}^{s_2} -ks\, ds$$

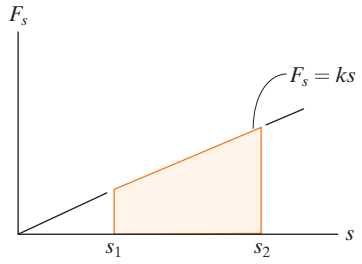
$$\boxed{U_{1-2} = -\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right)} \qquad (14\text{-}4)$$

Este trabajo representa el área trapezoidal bajo la línea $F_s = ks$ (fig. 14-5*b*).

Para no cometer errores con el signo cuando se aplica esta ecuación, basta fijarse en la dirección de la fuerza del resorte que actúa en la partícula y compararla con el sentido del desplazamiento de ésta: si ambos actúan en el *mismo sentido*, el *trabajo es positivo*; si lo hacen *en sentidos opuestos*, *el trabajo es negativo*.



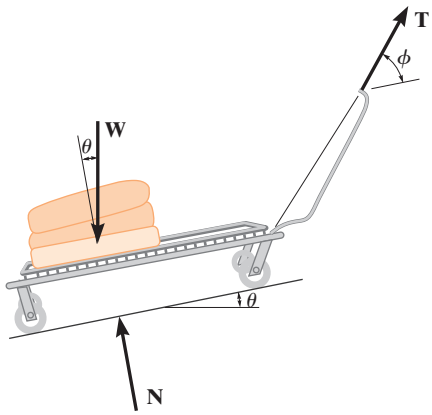
(a)



(b)

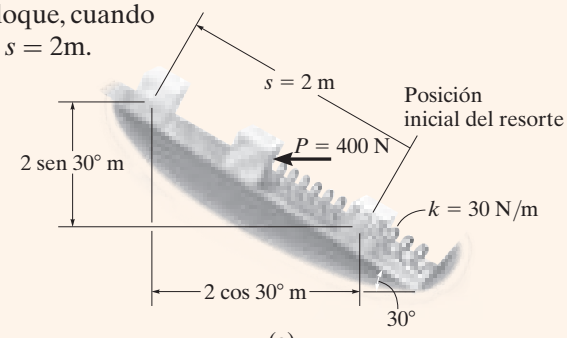
Fig. 14-5

Las fuerzas que actúan en la carretilla, al jalarla cuesta arriba una distancia s, se muestran en su diagrama de cuerpo libre. La fuerza de remolque constante $\mathbf{T}$ realiza un trabajo positivo $U_T = (T\cos\phi)s$, el peso realiza trabajo negativo $U_W = -(W \operatorname{sen}\theta)s$ y la fuerza normal $\mathbf{N}$ no realiza trabajo, pues no se desplaza a lo largo de su línea de acción. (© R. C. Hibbeler)



EJEMPLO 14.1

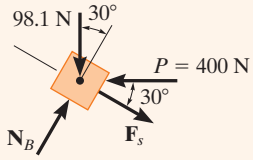
El bloque de 10 kg de la figura 14-6*a* descansa sobre el plano inclinado liso. Si el resorte originalmente está alargado 0.5 m, determine el trabajo total realizado por todas las fuerzas que actúan en el bloque, cuando una fuerza horizontal $P = 400$ N lo empuja cuesta arriba $s = 2$m.



(a)

SOLUCIÓN

Primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre del bloque con todas las fuerzas que actúan en el bloque (fig. 14-6*b*).



(b)

Fig. 14-6

Fuerza horizontal *P*. Como esta fuerza es *constante*, el trabajo se determina con la ecuación 14-2. El resultado puede calcularse como la fuerza por la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza, es decir,

$$U_P = 400 \text{ N } (2 \text{ m} \cos 30°) = 692.8 \text{ J}$$

o el desplazamiento por la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento, es decir,

$$U_P = 400 \text{ N} \cos 30°)(2 \text{ m}) = 692.8 \text{ J}$$

Fuerza del resorte F_s. En la posición inicial el resorte está alargado $s_1 = 0.5$ m y en la posición final está alargado $s_2 = 0.5 \text{ m} + 2 \text{ m} = 2.5$ m. Requerimos que el trabajo sea negativo, ya que la fuerza y el desplazamiento se oponen entre sí. El trabajo de $\mathbf{F}_s$ es, por lo tanto,

$$U_s = -\left[\tfrac{1}{2}(30 \text{ N/m})(2.5 \text{ m})^2 - \tfrac{1}{2}(30 \text{ N/m})(0.5 \text{ m})^2\right] = -90 \text{ J}$$

Peso *W*. Como el peso actúa en el sentido opuesto a su desplazamiento vertical, el trabajo es negativo; es decir,

$$U_W = -(98.1 \text{ N}) \, 2 \text{ m sen } 30°) = -98.1 \text{ J}$$

Observe que también es posible considerar la componente del peso en la dirección del desplazamiento, es decir,

$$U_W = -(98.1 \text{ sen } 30° \text{ N})(2 \text{ m}) = -98.1 \text{ J}$$

Fuerza normal N_B. Esta fuerza *no realiza trabajo*, ya que *siempre* es perpendicular al desplazamiento.

Trabajo total. El trabajo de todas las fuerzas cuando el bloque se desplaza 2 m es, por consiguiente,

$$U_T = 692.8 \text{ J} - 90 \text{ J} - 98.1 \text{ J} = 505 \text{ J} \qquad \textit{Resp.}$$

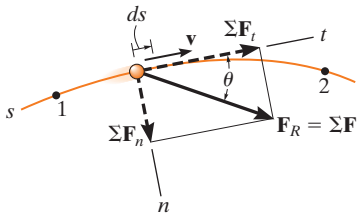


Fig. 14-7

14.2 Principio de trabajo y energía

Considere la partícula de la figura 14-7, localizada en la trayectoria definida con respecto a un sistema de coordenadas inercial. Si la partícula tiene una masa m y se somete a un sistema de fuerzas externas, representado por la fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}$, entonces la ecuación de movimiento de la partícula en la dirección tangencial es $\Sigma F_t = ma_t$. Si aplicamos la ecuación cinemática $a_t = v\,dv/ds$ e integramos ambos lados, y suponemos que inicialmente la partícula tiene una posición $s = s_1$ y una rapidez $v = v_1$ y, después, $s = s_2$ y $v = v_2$, tenemos

$$\Sigma \int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = \int_{v_1}^{v_2} mv\,dv$$

$$\Sigma \int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \qquad (14\text{-}5)$$

En la figura 14-7, observe que $\Sigma F_t = \Sigma F \cos\theta$ y puesto que la ecuación 14-1 define el trabajo, el resultado final se escribe como

$$\Sigma U_{1-2} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \qquad (14\text{-}6)$$

Esta ecuación representa el *principio de trabajo y energía* para la partícula. El término del lado izquierdo es la suma del trabajo realizado por *todas* las fuerzas que actúan en la partícula, cuando ésta se mueve del punto 1 al punto 2. Los dos términos del lado derecho, cuya forma es $T = \frac{1}{2}mv^2$, definen la *energía cinética* final e inicial, respectivamente. Como el trabajo, la energía cinética es un *escalar* y sus unidades son joules (J) y lb · ft. Sin embargo, a diferencia del trabajo, que puede ser o positivo o negativo, la energía cinética *siempre es positiva*, sin importar la dirección del movimiento de la partícula.

Cuando se aplica la ecuación 14-6, a menudo se expresa como

$$\boxed{T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2} \qquad (14\text{-}7)$$

la cual establece que la energía cinética inicial de la partícula, más el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan en ella, cuando se mueve de su posición inicial a su posición final, es igual a la energía cinética final de la partícula.

Como se señaló para la derivación, el principio de trabajo y energía representa una forma integrada de $\Sigma F_t = ma_t$, que se obtuvo con la ecuación cinemática $a_t = v\,dv/ds$. Por consiguiente, este principio constituye una *sustitución conveniente* de $\Sigma F_t = ma_t$ cuando se resuelven problemas cinéticos que implican *fuerza*, *velocidad* y *desplazamiento*, puesto que estas cantidades intervienen en la ecuación 14-7. Para su aplicación, se sugiere el siguiente procedimiento.

Procedimiento para el análisis

Trabajo (diagrama de cuerpo libre)

- Establezca el sistema de coordenadas inercial y dibuje un diagrama de cuerpo libre de la partícula, donde aparezcan todas las fuerzas que realizan trabajo en la partícula cuando se mueve a lo largo de su trayectoria.

Principio de trabajo y energía

- Aplique el principio de trabajo y energía, $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$.
- La energía cinética en los puntos inicial y final *siempre es positiva*, ya que involucra la rapidez al cuadrado $\left(T = \frac{1}{2}mv^2\right)$.
- Una fuerza realiza trabajo sobre una partícula cuando se desplaza en la dirección de la fuerza.
- El trabajo es *positivo* cuando la componente de la fuerza actúa en el *mismo sentido* que su desplazamiento, de lo contrario es negativo.
- Las fuerzas que son funciones del desplazamiento deben integrarse para obtener el trabajo. Gráficamente, el trabajo es igual al área bajo la curva de fuerza-desplazamiento.
- El trabajo de un peso es el producto de su magnitud por el desplazamiento vertical, $U_W = \pm Wy$. Es positivo cuando el peso se mueve hacia abajo.
- El trabajo de un resorte tiene la forma $U_s = \frac{1}{2}ks^2$, donde k es la rigidez del resorte y s es su alargamiento o compresión.

La aplicación numérica de este procedimiento se ilustra en los ejemplos dados después de la sección 14-3.

Si un automóvil chocara contra estos contenedores de protección, su energía cinética se transformaría en trabajo, lo cual origina que se deformen los contenedores y, hasta cierto grado, el automóvil. Si conocemos la cantidad de energía que puede absorber cada barril, es posible que diseñemos un atenuador de impactos como éste. (© R. C. Hibbeler)

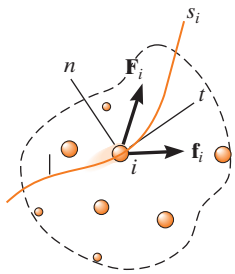
14.3 Principio de trabajo y energía para un sistema de partículas

El principio de trabajo y energía puede ampliarse para incluir un sistema de partículas aislado adentro de un espacio cerrado, como se indica en la figura 14-8. Aquí la partícula i-ésima arbitraria, de masa m_i, está sometida a una fuerza externa resultante $\mathbf{F}_i$ y a una fuerza interna resultante $\mathbf{f}_i$ que todas las demás partículas ejercen en la partícula i-ésima. Si aplicamos el principio de trabajo y energía a ésta, y a cada una de las demás partículas que componen el sistema, entonces, puesto que el trabajo y la energía son cantidades escalares, las ecuaciones se suman algebraicamente, lo cual da

$$\Sigma T_1 + \Sigma U_{1-2} = \Sigma T_2 \tag{14-8}$$

En este caso, la energía cinética inicial del sistema, además del trabajo realizado por todas las fuerzas externas e internas que actúan en el sistema, es igual a la energía cinética final del sistema.

Si el sistema representa un *cuerpo rígido en traslación*, o una serie de cuerpos en traslación conectados, entonces todas las partículas de cada cuerpo experimentarán el mismo *desplazamiento*. Por consiguiente, el trabajo de todas las fuerzas internas tendrá lugar en pares colineales iguales pero opuestos y, por ende, se cancelan. Por otro lado, si se supone que el cuerpo *no es rígido*, sus partículas pueden desplazarse a lo largo de *trayectorias diferentes*, y una parte de la energía producida por las interacciones de las fuerzas se disipará y se perderá como calor, o bien, se almacenará en el cuerpo si ocurren deformaciones permanentes. Analizaremos estos efectos brevemente al final de esta sección y en la sección 15.4. A lo largo de este texto, sin embargo, se aplicará el principio de trabajo y energía a problemas donde no se tienen que considerar tales pérdidas de energía.



Sistema de coordenadas inercial

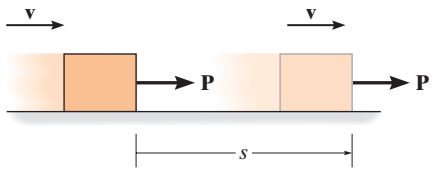
Fig. 14-8

Trabajo de fricción originado por deslizamiento. A continuación investigaremos una clase especial de problemas que requiere una aplicación cuidadosa de la ecuación 14-8. Estos problemas implican casos en los que un cuerpo se desliza sobre la superficie de otro, cuando hay fricción. Considere, por ejemplo, un bloque que se traslada una distancia s sobre una superficie áspera, como se muestra en la figura 14-9*a*. Si la fuerza aplicada **P** apenas balancea la fuerza de fricción *resultante* $\mu_k N$ (fig. 14-9*b*), entonces, debido al equilibrio, se mantiene una velocidad constante **v** y esperaríamos que se aplicara la ecuación 14-8 como sigue:

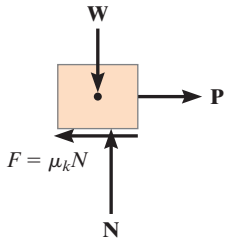
$$\tfrac{1}{2}mv^2 + Ps - \mu_k Ns = \tfrac{1}{2}mv^2$$

De hecho, esta ecuación se satisface si $P = \mu_k N$; sin embargo, como se sabe por experiencia, el deslizamiento *generará calor*, una forma de energía que parece no considerarse en la ecuación de trabajo-energía. Para explicar esta paradoja y, de esa manera, representar con más precisión la naturaleza de la fricción, en realidad tendríamos que modelar el bloque de modo que las superficies en contacto sean *deformables* (no rígidas)*. Recuerde que las zonas ásperas en la parte inferior del bloque actúan como "dientes" y, cuando el bloque se desliza, estos dientes *se deforman un poco* y se rompen o vibran al ser jalados por los "dientes" de la superficie de contacto (fig. 14-9*c*). Por consiguiente, las fuerzas de fricción que actúan en el bloque en estos puntos se desplazan ligeramente a causa de las deformaciones localizadas y, más adelante, las reemplazan otras fuerzas de fricción cuando se forman otros puntos de contacto. En todo momento, la **F** *resultante* de todas estas fuerzas de fricción, en esencia, permanece constante, es decir, $\mu_k N$; sin embargo, debido a las múltiples *deformaciones localizadas*, el desplazamiento real s' de $\mu_k N$ *no* es el mismo que el desplazamiento s de la fuerza **P** aplicada. En lugar de eso, s' será *menor* que s ($s' < s$) y, por consiguiente, el *trabajo externo realizado* por la fuerza de fricción resultante será $\mu_k Ns'$ y no $\mu_k Ns$. La cantidad de trabajo restante, $\mu_k N(s - s')$, se manifiesta como un incremento de la *energía interna*, la cual hace en realidad que aumente la temperatura del bloque.

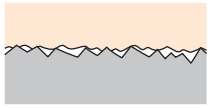
En resumen, entonces, la ecuación 14-8 se aplica a problemas que implican fricción producida por deslizamiento; sin embargo, hay que entender que el trabajo de la fuerza de fricción resultante no está representada por $\mu_k Ns$; en vez de eso, este término representa *tanto* el trabajo externo producido por fricción ($\mu_k Ns'$) *como* el trabajo interno [$\mu_k N(s - s')$], el cual se convierte en varias formas de energía interna, como calor†.



(a)



(b)



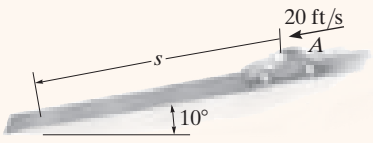
(c)

Fig. 14-9

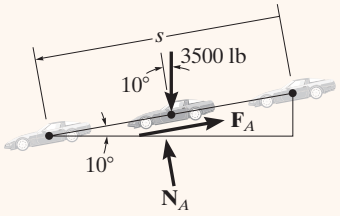
*Vea el capítulo 8 de *Ingeniería mecánica: Estática.*

†Vea B. A. Sherwood y W. H. Bernard, "Work and Heat Transfer in the Presence of Sliding Friction", *Am. J. Phys. 52,* 1001, (1984).

EJEMPLO 14.2



(a)



(b)

Fig. 14-10

El automóvil de 3500 lb de la figura 14-10*a* viaja cuesta abajo a una rapidez de 20 ft/s por la carretera inclinada 10°. Si el conductor aplica los frenos y hace que las ruedas se bloqueen, determine qué distancia *s* patinan los neumáticos en la carretera. El coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos y la carretera es $\mu_k = 0.5$.

SOLUCIÓN

Este problema se resuelve por medio del principio de trabajo y energía, pues involucra fuerza, velocidad y desplazamiento.

Trabajo (diagrama de cuerpo libre). Como se muestra en la figura 14-10*b*, la fuerza normal $\mathbf{N}_A$ no realiza trabajo, ya que nunca se desplaza a lo largo de su línea de acción. El peso, 3500 lb, se desplaza *s* sen 10° y realiza trabajo positivo. ¿Por qué? La fuerza de fricción $\mathbf{F}_A$ realiza trabajo tanto externo como interno cuando experimenta un desplazamiento *s*. Este trabajo es negativo ya que tiene un sentido opuesto al desplazamiento. Aplicamos la ecuación de equilibrio normal a la carretera y tenemos

$$+\nwarrow \Sigma F_n = 0; \qquad N_A - 3500 \cos 10°\ \text{lb} = 0 \qquad N_A = 3446.8\ \text{lb}$$

Por lo tanto,

$$F_A = \mu_k N_A = 0.5\ (3446.8\ \text{lb}) = 1723.4\ \text{lb}$$

Principio de trabajo y energía

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{–}2} = T_2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3500\ \text{lb}}{32.2\ \text{ft/s}^2}\right)(20\ \text{ft/s})^2 + 3500\ \text{lb}(s\ \text{sen}\ 10°) - (1723.4\ \text{lb})s = 0$$

Al despejar *s* resulta

$$s = 19.5\ \text{ft} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Si este problema se resuelve usando la ecuación de movimiento, se requieren *dos pasos*. Primero, según el diagrama de cuerpo libre (fig. 14-10*b*), la ecuación de movimiento se aplica a lo largo del plano inclinado. De esto resulta

$$+\swarrow \Sigma F_s = ma_s; \qquad 3500\ \text{sen}\ 10°\ \text{lb} - 1723.4\ \text{lb} = \frac{3500\ \text{lb}}{32.2\ \text{ft/s}^2}a$$

$$a = -10.3\ \text{ft/s}^2$$

Segundo, como *a* es constante,

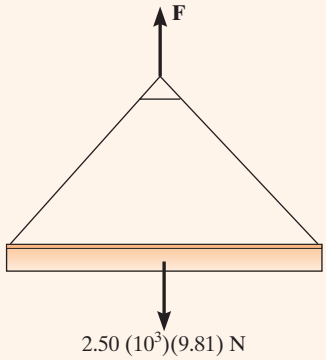
$$(+\swarrow) \qquad v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0);$$
$$(0)^2 = (20\ \text{ft/s})^2 + 2(-10.3\ \text{ft/s}^2)(s - 0)$$
$$s = 19.5\ \text{ft} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 14.3

Durante un breve tiempo, la grúa de la figura 14-11*a* levanta la viga de 2.50 Mg con una fuerza $F = (28 + 3s^2)$ kN. Determine la rapidez de la viga cuando alcanza $s = 3$ m. Además, ¿cuánto tiempo se requiere para que alcance esta altura a partir del reposo?

(© R. C. Hibbeler)

(a)



(b)

Fig. 14-11

SOLUCIÓN

Podemos resolver una parte del problema con el principio de trabajo y energía, ya que involucra fuerza, velocidad y desplazamiento. Debe utilizarse la cinemática para determinar el tiempo. Observe que cuando $s = 0$, $F = 28(10^3)\text{N} > W = 2.50(10^3)(9.81)\text{N}$, por lo que habrá movimiento.

Trabajo (diagrama de cuerpo libre). Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre (fig. 14-11*b*), la fuerza **F** realiza trabajo positivo, que se determina mediante integración, ya que esta fuerza es variable. Asimismo, el peso es constante y realizará trabajo negativo, ya que el desplazamiento es hacia arriba.

Principio de trabajo y energía

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{–}2} = T_2$$

$$0 + \int_0^s (28 + 3s^2)(10^3)\, ds - (2.50)(10^3)(9.81)s = \tfrac{1}{2}(2.50)(10^3)v^2$$

$$28(10^3)s + (10^3)s^3 - 24.525(10^3)s = 1.25(10^3)v^2$$

$$v = (2.78s + 0.8s^3)^{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

Cuando $s = 3$ m,

$$v = 5.47 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Cinemática. Como podemos expresar la velocidad en función del desplazamiento, el tiempo se determina con $v = ds/dt$. En este caso,

$$(2.78s + 0.8s^3)^{\frac{1}{2}} = \frac{ds}{dt}$$

$$t = \int_0^3 \frac{ds}{(2.78s + 0.8s^3)^{\frac{1}{2}}}$$

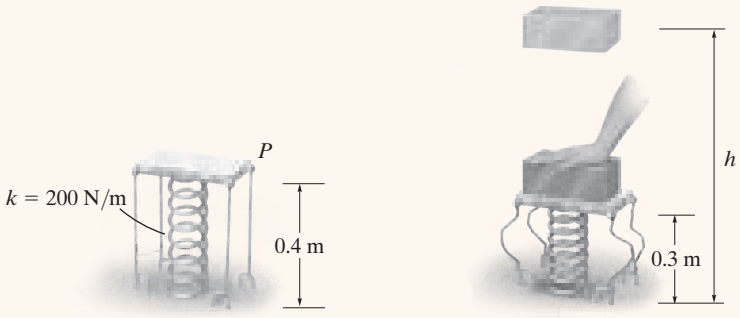
La integración se realiza numéricamente con una calculadora de bolsillo. El resultado es

$$t = 1.79 \text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: La aceleración de la viga se determina al integrar la ecuación (1) por medio de $v\, dv = a\, ds$, o bien, más directamente al aplicar la ecuación de movimiento $\Sigma F = ma$.

EJEMPLO 14.4

La masa de la plataforma P de la figura 14-12*a* es despreciable y está atada por abajo, de modo que las cuerdas de 0.4 m de largo mantienen 0.6 m comprimido un resorte de 1 m de largo, cuando *no hay nada* sobre la plataforma. Si se coloca un bloque de 2 kg sobre la plataforma y se libera del reposo, después de que la plataforma se empuja hacia abajo 0.1 m (fig. 14-12*b*), determine la altura máxima h que el bloque se eleva en el aire, medida desde el suelo.

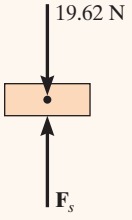


(a) (b)

Fig. 14-12

SOLUCIÓN

Trabajo (Diagrama de cuerpo libre). Como el bloque se suelta del reposo y, después, alcanza su altura máxima, las velocidades inicial y final son cero. El diagrama de cuerpo libre del bloque cuando aún está en contacto con la plataforma se muestra en la figura 14-12*c*. Observe que el peso realiza trabajo negativo y la fuerza del resorte trabajo positivo. ¿Por qué? En particular, la *compresión inicial* en el resorte es $s_1 = 0.6\text{ m} + 0.1\text{ m} = 0.7\text{ m}$. Debido a las cuerdas, la *compresión final* del resorte es $s_2 = 0.6\text{ m}$ (después de que el bloque sale de la plataforma). La cara inferior del bloque se eleva desde una altura de $(0.4\text{ m} - 0.1\text{ m}) = 0.3\text{ m}$ hasta una altura final h.



(c)

Principio de trabajo y energía

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{–}2} = T_2$$

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + \left\{ -\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right) - W\Delta y \right\} = \tfrac{1}{2}mv_2^2$$

Observe que aquí $s_1 = 0.7\text{ m} > s_2 = 0.6\text{ m}$ y, por lo tanto, el trabajo del resorte determinado con la ecuación 14-4 será positivo, una vez que se realizan los cálculos. Por lo tanto,

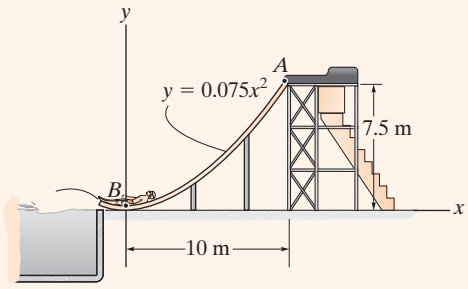
$$0 + \left\{ -\left[\tfrac{1}{2}(200\text{ N/m})(0.6\text{ m})^2 - \tfrac{1}{2}(200\text{ N/m})(0.7\text{ m})^2\right] - (19.62\text{ N})[h - (0.3\text{ m})] \right\} = 0$$

Al resolver se obtiene

$$h = 0.963\text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 14.5

El niño de 40 kg en la figura 14-13*a* se desliza cuesta abajo del tobogán acuático. Si parte del reposo en A, determine su rapidez cuando llega a B y la reacción normal que el tobogán ejerce sobre él en esta posición.



(a)

SOLUCIÓN

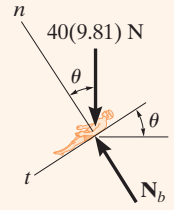
Trabajo (diagrama de cuerpo libre). Como se indica en el diagrama de cuerpo libre (fig. 14-13*b*), dos fuerzas actúan en el niño al descender por el tobogán. Observe que la fuerza normal no realiza trabajo.

Principio de trabajo y energía

$$T_A + \Sigma U_{A-B} = T_B$$

$$0 + (40(9.81)\text{N})\,(7.5\text{ m}) = \tfrac{1}{2}(40\text{ kg})v_B^2$$

$$v_B = 12.13\text{ m/s} = 12.1\text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

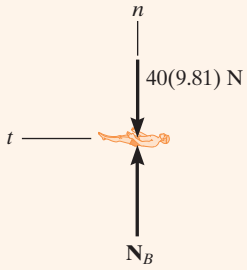
Ecuación de movimiento. Al referirnos al diagrama de cuerpo libre cuando el niño está en B (fig. 14-13*c*), la reacción normal $\mathbf{N}_B$ se obtiene ahora al aplicar la ecuación de movimiento a lo largo del eje n. Aquí, el radio de curvatura de la trayectoria es

$$\rho_B = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|} = \left.\frac{\left[1 + (0.15x)^2\right]^{3/2}}{|0.15|}\right|_{x=0} = 6.667\text{ m}$$

Por lo tanto,

$$+\uparrow \Sigma F_n = ma_n; \qquad N_B - 40(9.81)\text{ N} = 40\text{ kg}\left(\frac{(12.13\text{ m/s})^2}{6.667\text{ m}}\right)$$

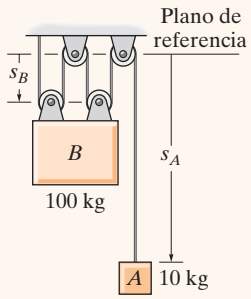
$$N_B = 1275.3\text{ N} = 1.28\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$



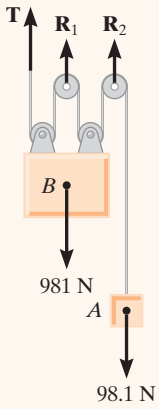
(c)

Fig. 14-13

EJEMPLO 14.6



(a)



(b)

Fig. 14-14

La masa de los bloques A y B que se muestran en la figura 14-14*a* es de 10 kg y 100 kg, respectivamente. Determine la distancia que B se desplaza cuando se suelta desde el reposo, hasta el punto donde su rapidez es de 2 m/s.

SOLUCIÓN

Este problema se resuelve si se consideran los bloques por separado y se aplica el principio de trabajo y energía a cada bloque. Sin embargo, el trabajo de la tensión (desconocida) del cable se elimina si los bloques A y B se consideran como un *solo sistema*.

Trabajo (diagrama de cuerpo libre). Como se ilustra en el diagrama de cuerpo libre del sistema (fig. 14-14*b*), la fuerza del cable $\mathbf{T}$ y las reacciones $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ *no realizan trabajo*, ya que estas fuerzas representan las reacciones en los soportes y, por consiguiente, no se mueven mientras se desplazan los bloques. Los dos pesos realizan trabajo positivo, si *suponemos* que ambos se mueven hacia abajo en el sentido positivo de s_A y s_B.

Principio de trabajo y energía. Si tenemos en cuenta que los bloques se sueltan del reposo, entonces

$$\Sigma T_1 + \Sigma U_{1-2} = \Sigma T_2$$

$$\left\{\tfrac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 + \tfrac{1}{2}m_B(v_B)_1^2\right\} + \left\{W_A\,\Delta s_A + W_B\,\Delta s_B\right\} = \left\{\tfrac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 + \tfrac{1}{2}m_B(v_B)_2^2\right\}$$

$$\{0 + 0\} + \{98.1\text{ N}\,(\Delta s_A) + 981\text{ N}\,(\Delta s_B)\} = \left\{\tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(v_A)_2^2 + \tfrac{1}{2}(100\text{ kg})(2\text{ m/s})^2\right\} \quad (1)$$

Cinemática. Al usar los métodos de la cinemática analizados en la sección 12.9, en la figura 14-14*a* se observa que la longitud total l de todos los segmentos verticales del cable pueden expresarse en función de las coordenadas de posición s_A y s_B como

$$s_A + 4s_B = l$$

Por consiguiente, un cambio de posición resulta en la ecuación de desplazamiento

$$\Delta s_A + 4\,\Delta s_B = 0$$
$$\Delta s_A = -4\,\Delta s_B$$

Aquí vemos que un desplazamiento hacia abajo de un bloque produce un desplazamiento hacia arriba del otro bloque. Observe que Δs_A y Δs_B deben tener la *misma* convención de signos en las ecuaciones 1 y 2. Al considerar las derivadas con respecto al tiempo, se obtiene

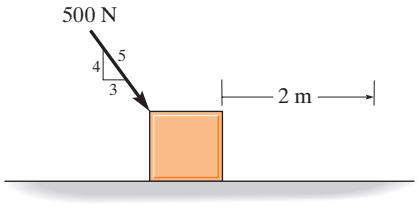
$$v_A = -4v_B = -4(2\text{ m/s}) = -8\text{ m/s} \quad (2)$$

Al conservar el signo negativo en la ecuación 2 y sustituirlo en la ecuación 1 resulta

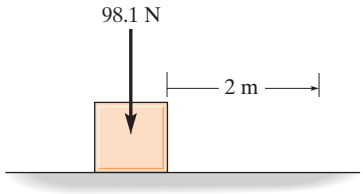
$$\Delta s_B = 0.883\text{ m} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS PRELIMINARES

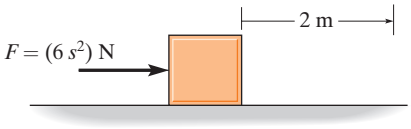
P14-1. Determine el trabajo de la fuerza cuando ésta se desplaza 2 m.



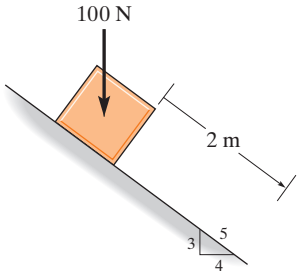
(a)



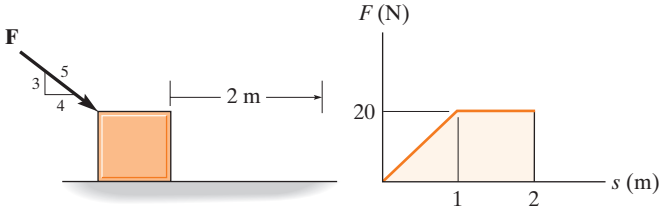
(b)



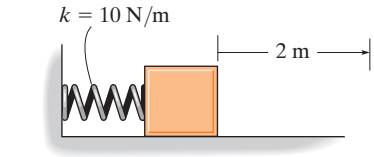
(c)



(d)

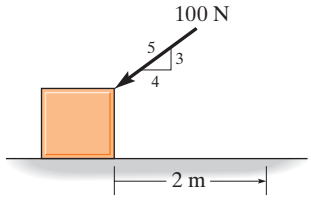


(e)



En un inicio, el resorte está comprimido 3 m.

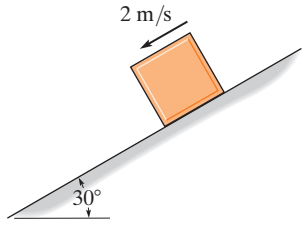
(f)



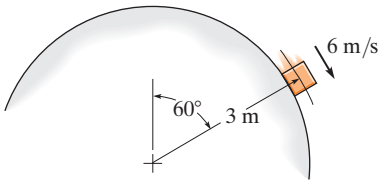
(g)

Prob. P14-1

P14-2. Determine la energía cinética del bloque de 10 kg.



(a)

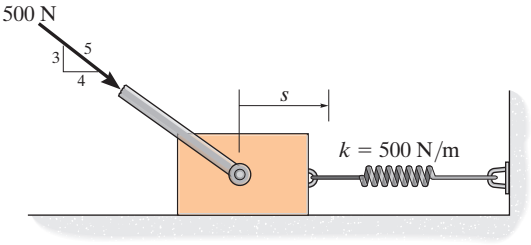


(b)

Prob. P14-2

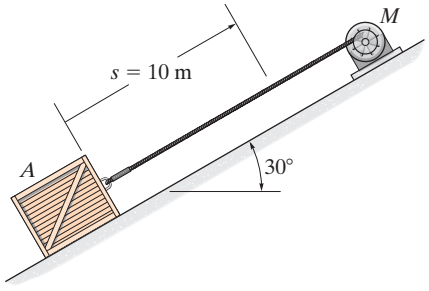
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F14-1. El resorte se coloca entre la pared y el bloque de 10 kg. Si éste se somete a una fuerza $F = 500$ N, determine su velocidad cuando $s = 0.5$ m. Cuando $s = 0$, el bloque está en reposo y el resorte no está comprimido. La superficie de contacto es lisa.



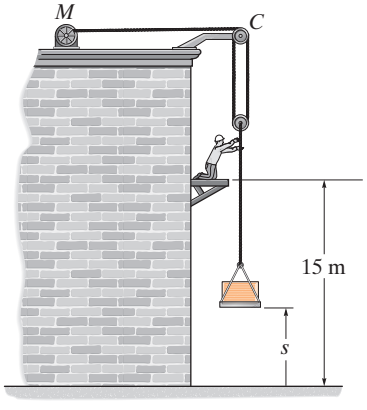
Prob. F14-1

F14-2. Si el motor ejerce una fuerza constante de 300 N en el cable, determine la rapidez del embalaje de 20 kg cuando recorre $s = 10$ m hacia arriba del plano, a partir del reposo. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el plano es $\mu_k = 0.3$.



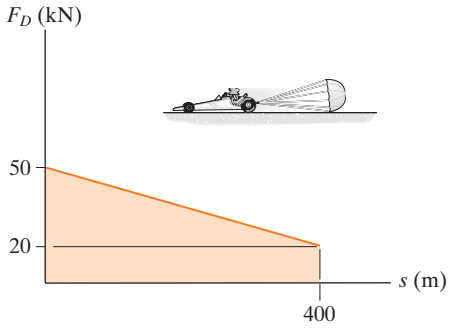
Prob. F14-2

F14-3. Si el motor ejerce una fuerza $F = (600 + 2s^2)$ N en el cable, determine la rapidez del embalaje de 100 kg cuando se eleva a $s = 15$ m. Inicialmente el embalaje está en reposo en el suelo.



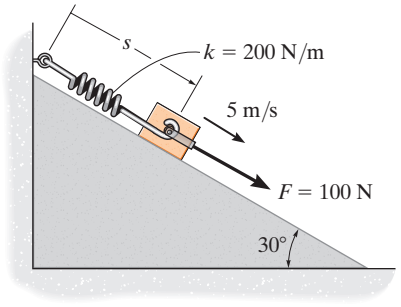
Prob. F14-3

F14-4. El *dragster* de 1.8 Mg se desplaza a 125 m/s cuando el motor se apaga y el paracaídas se abre. Si la fuerza de frenado del paracaídas puede representarse de forma aproximada con la gráfica, determine la rapidez del *dragster* cuando haya recorrido 400 m.



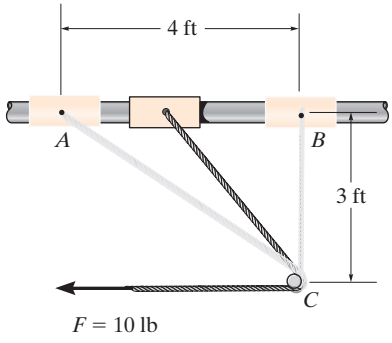
Prob. F14-4

F14-5. Cuando $s = 0.6$ m, el resorte no está comprimido y la rapidez del bloque de 10 kg es de 5 m/s hacia abajo del plano liso. Determine la distancia s cuando el bloque se detiene.



Prob. F14-5

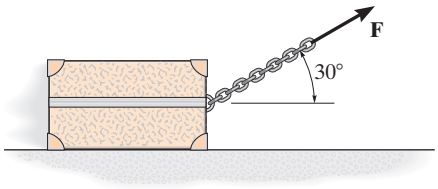
F14-6. Al collarín de 5 lb lo jala una cuerda que pasa alrededor de un pequeño perno ubicado en C. Si la cuerda se somete a una fuerza constante $F = 10$ lb y el collarín está en reposo cuando está en A, determine su rapidez cuando llega a B. Ignore la fricción.



Prob. F14-6

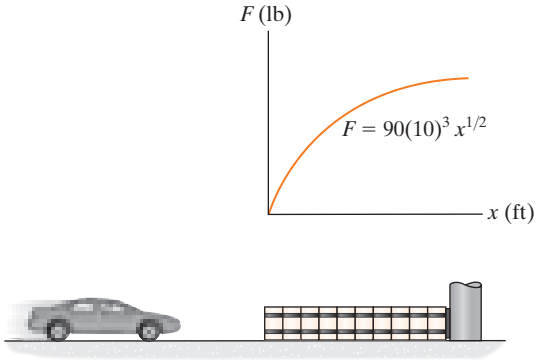
PROBLEMAS

14-1. El embalaje de 20 kg se somete a una fuerza que tiene una dirección constante y una magnitud $F = 100$ N. Cuando $s = 15$ m, el embalaje se mueve hacia la derecha con una rapidez de 8 m/s. Determine su rapidez cuando $s = 25$ m. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el suelo es $\mu_k = 0.25$.



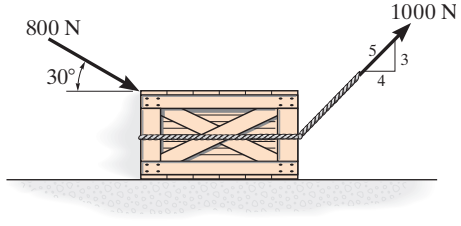
Prob. 14-1

14-2. Como protección, se coloca la barrera de barriles enfrente de la columna de un puente. Si la relación entre la fuerza y la deflexión de la barrera es $F = (90(10^3)x^{1/2})$ lb, donde x está en ft, determine la penetración máxima del automóvil en la barrera. El auto tiene un peso de 4000 libras y se desplaza con una rapidez de 75 ft/s justo antes de llegar a la barrera.



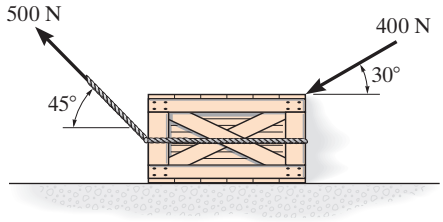
Prob. 14-2

14-3. El embalaje, que tiene una masa de 100 kg, se somete a la acción de las dos fuerzas. Si está originalmente en reposo, determine la distancia que se desliza con el propósito de alcanzar una rapidez de 6 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y la superficie es $\mu_k = 0.2$.



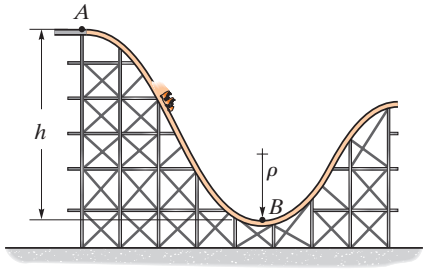
Prob. 14-3

***14-4.** El embalaje de 100 kg se somete a las fuerzas mostradas. Si está originalmente en reposo, determine la distancia que se desliza para alcanzar una rapidez de $v = 8$ m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y la superficie es $\mu_k = 0.2$.



Prob. 14-4

14-5. Determine la altura h requerida para la montaña rusa, de modo que cuando el carro está esencialmente en reposo en la cresta de la colina A alcance una rapidez de 100 km/h cuando llegue a la parte inferior B. Además, ¿cuál debe ser el radio mínimo de curvatura ρ para la pista en B, de modo que los pasajeros no experimenten una fuerza normal mayor que $4mg = (39.24m)$ N? Desprecie el tamaño del carro y del pasajero.

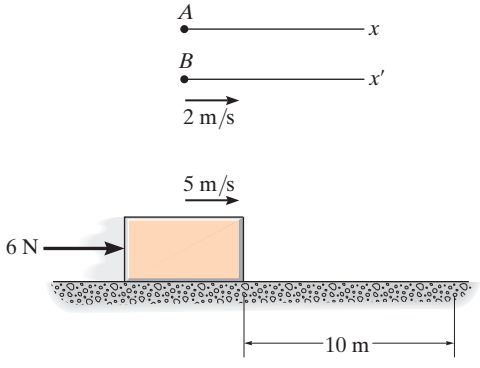


Prob. 14-5

14-6. Cuando el conductor aplica los frenos de un camión ligero que viaja a 40 km/h, patina 3 m antes de detenerse. ¿Hasta dónde llegará el deslizamiento del camión, si viaja a 80 km/h cuando se aplican los frenos?

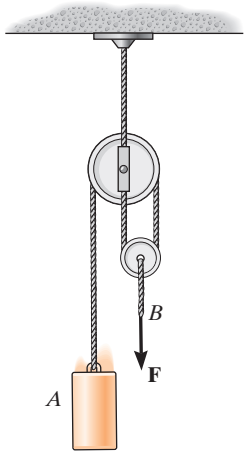
Prob. 14-6

14-7. Según lo indicado en la deducción del principio del trabajo y la energía, el principio es válido para los observadores en *cualquier* sistema de referencia inercial. Demuestre que esto es así, considerando el bloque de 10 kg que descansa sobre la superficie lisa y se somete a una fuerza horizontal de 6 N. Si el observador A está en un marco *fijo* x, determine la rapidez final del bloque si tiene una rapidez inicial de 5 m/s y viaja 10 m, ambos dirigidos hacia la derecha y medidos desde el marco fijo. Compare el resultado con el obtenido por un observador B, que está unido al eje x' y se mueve a una velocidad constante de 2 m/s en relación con A. *Sugerencia:* La distancia que recorre el bloque tendrá que ser calculada primero para el observador B, antes de aplicar el principio de trabajo y energía.



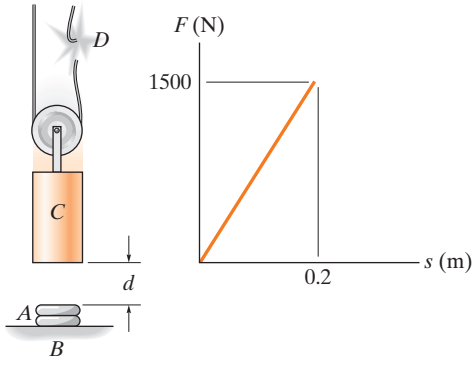
Prob. 14-7

***14-8.** Una fuerza de $F = 250$ N se aplica al extremo en B. Determine la rapidez del bloque de 10 kg cuando se haya movido 1.5 m, partiendo del reposo.



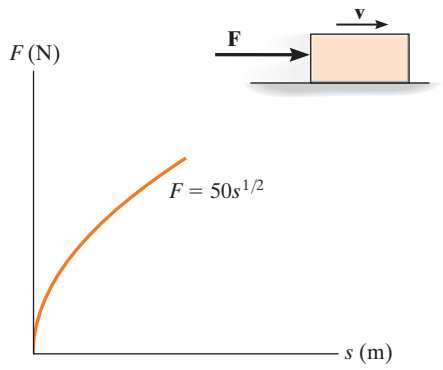
Prob. 14-8

14-9. La "cámara de aire" A se utiliza para proteger el soporte B y para, en el caso de una falla de la banda en D, prevenir el daño al peso C sostenido por la banda transportadora en tensión. La fuerza desarrollada por la cámara de aire en función de su deflexión se muestra en la gráfica. Si el bloque tiene una masa de 20 kg y se suspende a una altura $d = 0.4$ m por encima de la parte superior de la cámara, determine la deformación máxima de la cámara, en caso de que la banda transportadora falle. Desprecie la masa de la polea y la banda.



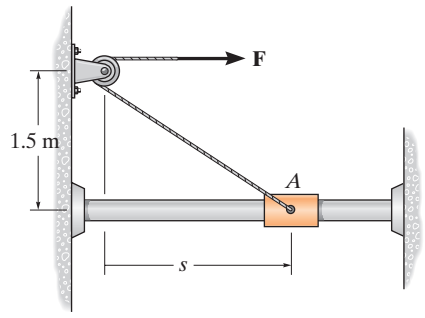
Prob. 14-9

14-10. La magnitud de la fuerza **F** que actúa en una dirección constante sobre el bloque de 20 kg varía con la posición s de éste. Determine qué tanto se desliza el bloque antes de que su velocidad sea de 15 m/s. Cuando $s = 0$ el bloque se está moviendo a la derecha a $v = 6$ m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es $\mu_k = 0.3$.



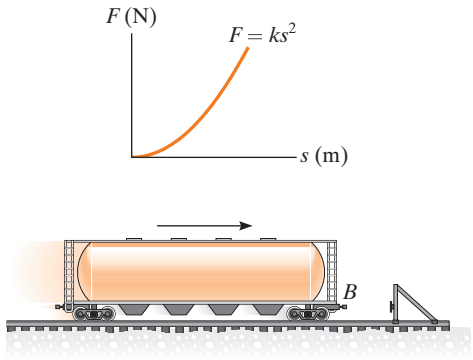
Prob. 14-10

14-11. Se aplica la fuerza de $F = 50$ N a la cuerda cuando $s = 2$ m. Si el collarín de 6 kg está originalmente en reposo, determine su velocidad en $s = 0$. Desprecie la fricción.



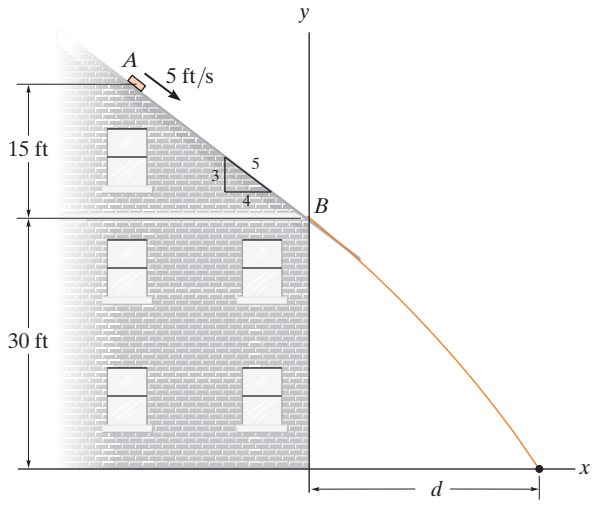
Prob. 14-11

***14-12.** Las consideraciones de diseño para el atenuador de impactos B del vagón de tren de 5 Mg requieren el uso de un resorte no lineal, cuyas características de carga-deflexión se muestran en la gráfica. Seleccione el valor adecuado de k tal que la deflexión máxima del resorte esté limitada a 0.2 m cuando el vagón, que viaja a 4 m/s, golpea el tope rígido. Desprecie la masa de las ruedas del vagón.



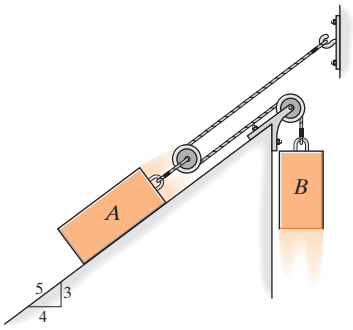
Prob. 14-12

14-13. El ladrillo de 2 lb se desliza hacia abajo sobre un techo liso, de modo que cuando está en A tiene una velocidad de 5 ft/s. Determine la rapidez del ladrillo justo antes de que abandone la superficie en B, la distancia d desde la pared hasta el punto donde golpea el suelo y la rapidez con la que lo hace.



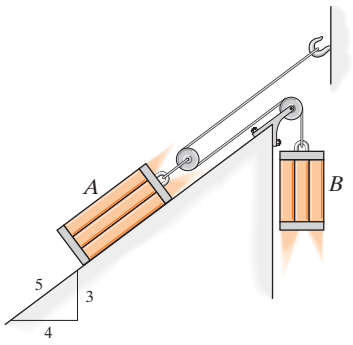
Prob. 14-13

14-14. El bloque A tiene un peso de 60 lb y el bloque B de 10 lb. Determine la rapidez del bloque A después de que recorre 5 ft hacia abajo sobre el plano, si parte del reposo. Desprecie la fricción y la masa de la cuerda y las poleas.



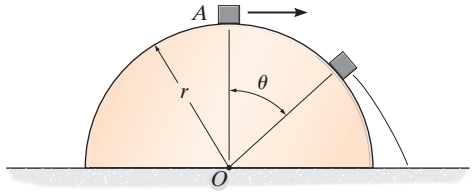
Prob. 14-14

14-15. Los dos bloques A y B tienen pesos $W_A = 60$ lb y $W_B = 10$ lb, respectivamente. El coeficiente de fricción cinética entre el plano inclinado y el bloque A es $\mu_k = 0.2$. Determine la rapidez de A después de que recorre 3 ft hacia abajo sobre el plano, partiendo del reposo. No tome en cuenta la masa de la cuerda y las poleas.



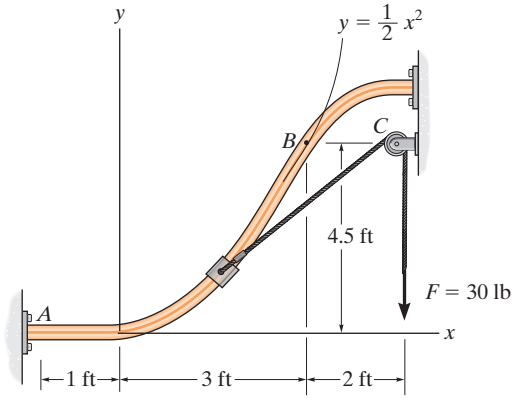
Prob. 14-15

***14-16.** A una pequeña caja de masa m se le da una rapidez de $v = \sqrt{\frac{1}{4}gr}$ en la parte superior del semicilindro liso. Determine el ángulo θ al que la caja sale del semicilindro.



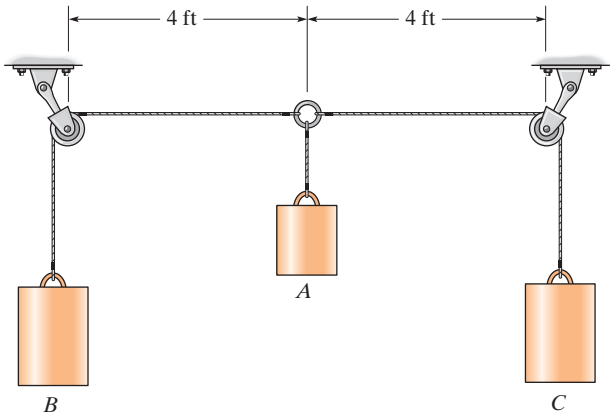
Prob. 14-16

14-17. Si la cuerda se somete a una fuerza constante de $F = 30$ lb y el collarín liso de 10 lb parte del reposo en A, determine su rapidez cuando pasa por el punto B. Desprecie el tamaño de la polea C.



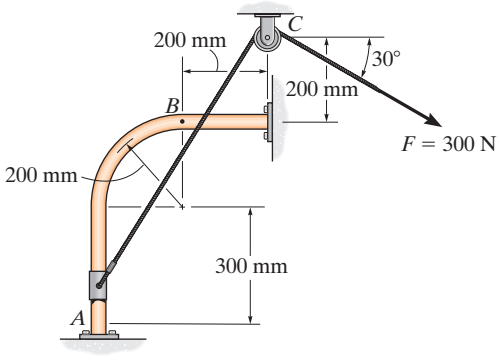
Prob. 14-17

14-18. Cuando el bloque A de 12-lb se libera desde el reposo, levanta las dos pesas B y C de 15 lb. Determine la distancia máxima que caerá A antes de que su movimiento se detenga momentáneamente. Desprecie el peso de la cuerda y el tamaño de las poleas.



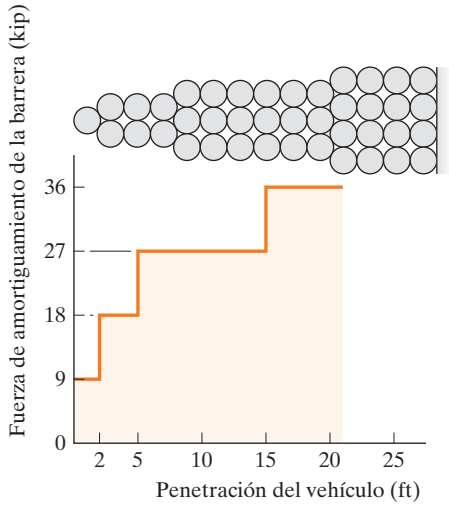
Prob. 14-18

14-19. Si la cuerda está sometida a una fuerza constante de $F = 300$ N y el collarín liso de 15 kg parte del reposo en A, determine la velocidad del collarín cuando llega al punto B. Desprecie el tamaño de la polea.



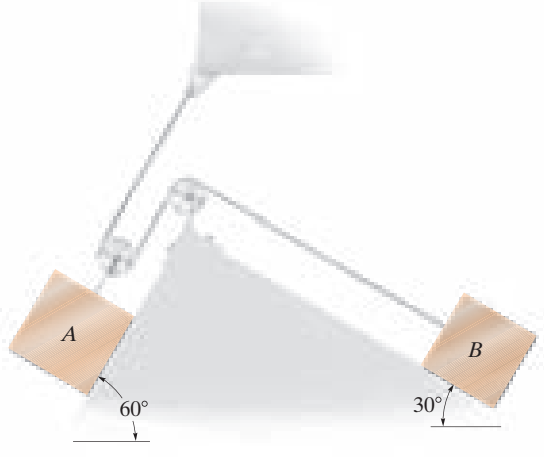
Prob. 14-19

***14-20.** El amortiguador de choques para la barrera de una carretera consta de una serie de barriles llenos con un material que absorbe los impactos. La fuerza de amortiguación se mide en términos de la penetración de los vehículos en la barrera. Determine la distancia que penetrará un auto con un peso de 4000 lb en la barrera, si está viajando inicialmente a 55 ft/s cuando golpea el primer barril.



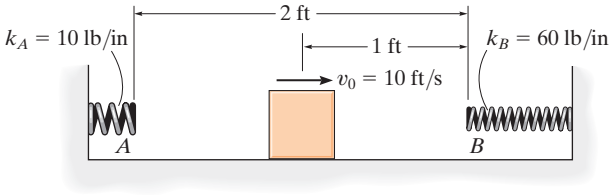
Prob. 14-20

14-21. Determine la velocidad del bloque A de 60 lb, si los dos bloques se liberan desde el reposo y el bloque B de 40 lb se mueve 2 ft hacia arriba sobre el plano. El coeficiente de fricción cinética entre ambos bloques y los planos inclinados es $\mu_k = 0.10$.



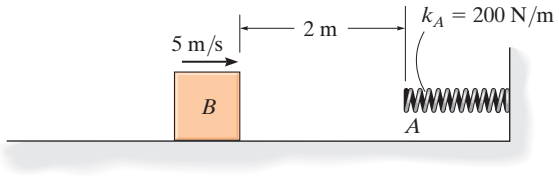
Prob. 14-21

14-22. El bloque de 25 lb tiene una rapidez inicial de $v_0 = 10$ ft/s cuando está a medio camino entre los resortes A y B. Después de golpear el resorte B, rebota y se desliza a través del plano horizontal hacia el resorte A, y así sucesivamente. Si el coeficiente de fricción cinética entre el plano y el bloque es $\mu_k = 0.4$, determine la distancia total recorrida por el bloque antes de llegar al reposo.



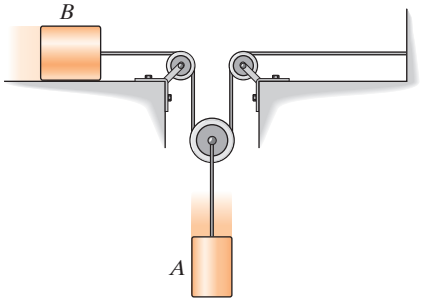
Prob. 14-22

14-23. El bloque de 8 kg se mueve con una rapidez inicial de 5 m/s. Si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es $\mu_k = 0.25$, determine la compresión en el resorte, cuando el bloque se detiene momentáneamente.



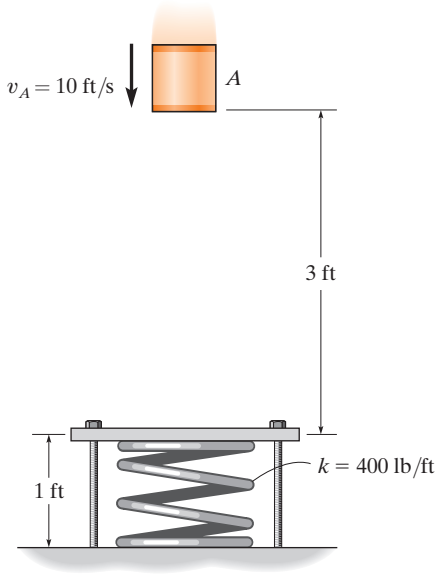
Prob. 14-23

***14-24.** En un instante dado, el bloque A de 10 lb se mueve hacia abajo con una rapidez de 6 ft/s. Determine su rapidez 2 s después. El bloque B tiene un peso de 4 lb y el coeficiente de fricción cinética entre éste y el plano horizontal es $\mu_k = 0.2$. Desprecie la masa de la cuerda y las poleas.



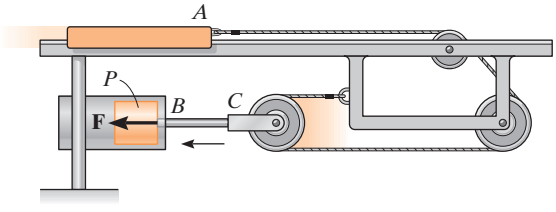
Prob. 14-24

14-25. El cilindro de 5 lb cae desde A con una rapidez $v_A = 10$ ft/s sobre la plataforma. Determine el desplazamiento máximo de la plataforma, causado por la colisión. El resorte tiene una longitud sin estirar de 1.75 ft y se mantiene inicialmente en compresión, mediante los cables de 1 ft de longitud unidos a la plataforma. Desprecie la masa de la plataforma y del resorte, y cualquier pérdida de energía durante la colisión.



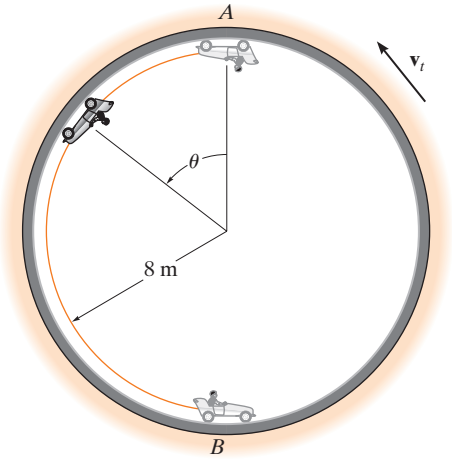
Prob. 14-25

14-26. El mecanismo de catapulta se utiliza para propulsar el deslizador A de 10 kg hacia la derecha a lo largo del riel liso. La acción propulsora se obtiene al jalar rápidamente la polea unida a la varilla BC hacia la izquierda por medio de un pistón P. Si el pistón aplica una fuerza constante $F = 20$ kN a la varilla BC, de modo que la mueve 0.2 m, determine la rapidez alcanzada por el deslizador si éste se encuentra originalmente en reposo. Desprecie la masa de las poleas, el cable, el pistón y la varilla BC.



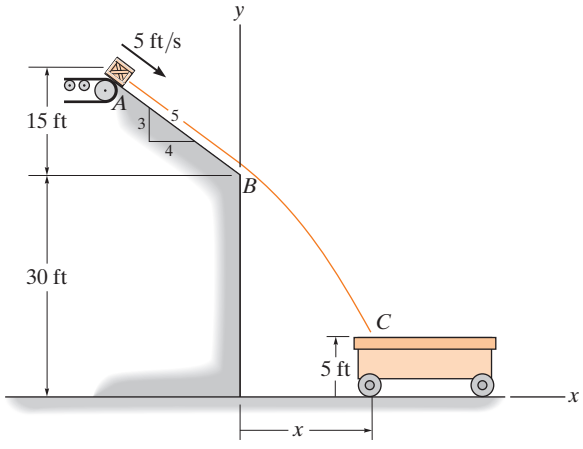
Prob. 14-26

14-27. El "auto volador" es una atracción en un parque de diversiones, que consiste en un automóvil con neumáticos que ruedan a lo largo de una pista montada en el interior de un tambor giratorio. Por diseño, el automóvil no puede caerse de la pista; sin embargo, el movimiento del auto se desarrolla al aplicar los frenos, con lo que el auto se adhiere a la pista y permite que se mueva con una rapidez constante, $v_t = 3$ m/s. Si el conductor aplica el freno cuando va de B a A y, luego, lo libera en la parte superior del tambor, A, de manera que el auto se desplaza libremente hacia abajo a lo largo de la pista hasta B ($\theta = \pi$ rad), determine la rapidez del automóvil en B y la reacción normal que ejerce el tambor sobre el auto en B. Desprecie la fricción durante el movimiento de A a B. El conductor y el automóvil tienen una masa total de 250 kg, y el centro de masa del auto y el conductor se mueve a lo largo de una trayectoria circular que tiene un radio de 8 m.



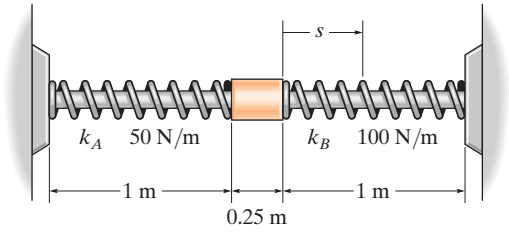
Prob. 14-27

***14-28.** La caja de 10 lb cae por la banda transportadora a 5 ft/s. Si el coeficiente de fricción cinética a lo largo de AB es $\mu_k = 0.2$, determine la distancia x a la que cae la caja en el carro.



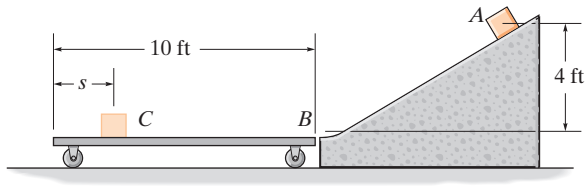
Prob. 14-28

14-29. El collarín tiene una masa de 20 kg y se desliza a lo largo de la varilla lisa. Hay dos resortes que están unidos al collarín y a los extremos de la varilla, como se indica en la figura. Si cada resorte tiene una longitud no comprimida de 1 m y el collarín tiene una rapidez de 2 m/s cuando $s = 0$, determine la compresión máxima de cada resorte debido al movimiento oscilante (de vaivén) del collarín.



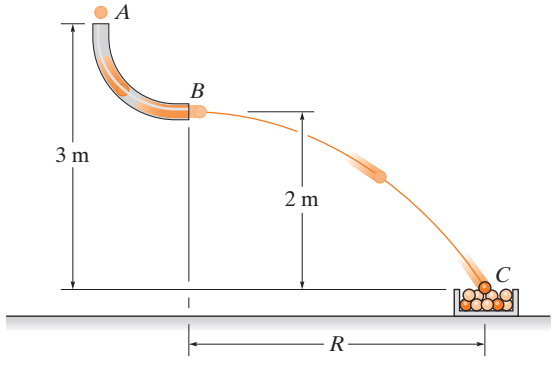
Prob. 14-29

14-30. La caja A de 30 lb se libera desde el reposo y se desliza hacia abajo a lo largo de la rampa lisa y sobre la superficie de un carro. Si el carro *no puede moverse*, determine la distancia s, medida desde el extremo del carro, a donde se detiene la caja. El coeficiente de fricción cinética entre el carro y la caja es $\mu_k = 0.6$.



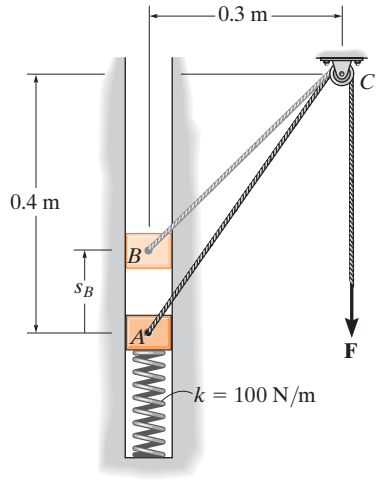
Prob. 14-30

14-31. Las canicas, que tienen una masa de 5 g cada una, se dejan caer desde el reposo en A, a través del tubo de vidrio liso, y se acumulan en la lata en C. Determine la colocación R de la lata medida desde el extremo del tubo y la rapidez a la que las canicas caen en la lata. Desprecie el tamaño de la lata.



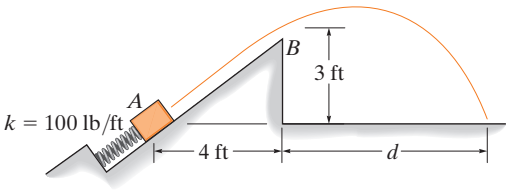
Prob. 14-31

***14-32.** El bloque tiene una masa de 0.8 kg y se mueve dentro de la ranura vertical lisa. Si parte del reposo cuando el resorte al que está *unido* se encuentra en la posición sin estirar en A, determine la fuerza vertical F *constante* que debe aplicarse a la cuerda, de modo que el bloque alcance una rapidez $v_B = 2.5$ m/s cuando llega a B; $s_B = 0.15$ m. Desprecie el tamaño y la masa de la polea. *Sugerencia:* El trabajo de **F** se puede determinar calculando la diferencia Δl en las longitudes de cuerda AC y BC y utilizando $U_F = F\,\Delta l$.



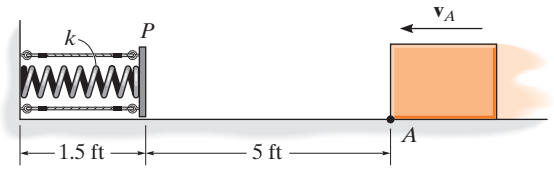
Prob. 14-32

14-33. El bloque de 10 1b presiona el resorte de manera que lo comprime 2 ft cuando está en A. Si el plano es liso, determine la distancia d, medida desde la pared, a la que el bloque golpea el suelo. Desprecie el tamaño del bloque.



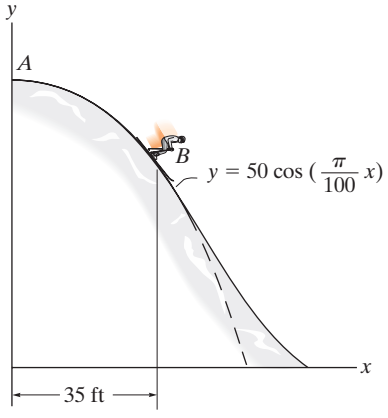
Prob. 14-33

14-34. El parachoques de resorte se utiliza para detener el movimiento del bloque de 4 lb, el cual se desliza hacia el parachoques a $v = 9$ ft/s. Como se muestra, el resorte está confinado entre la placa P y la pared mediante cables, de manera que su longitud es de 1.5 ft. Si la rigidez del resorte es $k = 50$ lb/ft, determine su longitud sin estirar requerida para que la placa no se desplace más de 0.2 ft, después de que el bloque choca contra ella. Desprecie la fricción, la masa de la placa y el resorte, así como la pérdida de energía entre la placa y el bloque durante la colisión.



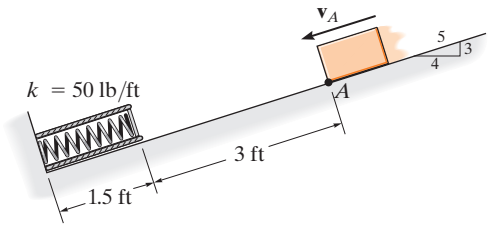
Prob. 14-34

14-35. Cuando el esquiador de 150 lb está en el punto A, tiene una rapidez de 5 ft/s. Determine su rapidez cuando alcanza el punto B sobre la pendiente lisa. En esta distancia, la pendiente sigue la curva coseno que se ilustra en la figura. Además, ¿cuál es la fuerza normal sobre los esquís en B y la razón a la que aumenta la rapidez del esquiador? Desprecie la fricción y la resistencia del aire.



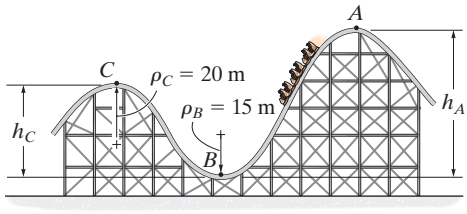
Prob. 14-35

***14-36.** El resorte tiene una rigidez $k = 50$ lb/ft y una *longitud sin estirar* de 2 ft. Como se muestra, está confinado entre la placa y la pared mediante cables, de modo que su longitud es de 1.5 ft. Al bloque de 4 lb se le da una rapidez v_A cuando está en A, y se desliza hacia abajo sobre la pendiente, cuyo coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.2$. Si golpea la placa y la empuja 0.25 ft hacia adelante antes de parar, determine su rapidez en A. Desprecie la masa de la placa y el resorte.



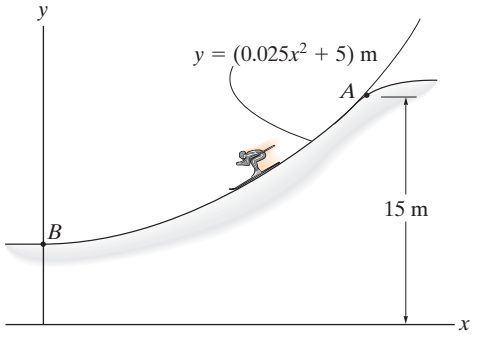
Prob. 14-36

14-37. Si la pista debe diseñarse para que los pasajeros de la montaña rusa no experimenten una fuerza normal igual a cero o más de 4 veces su peso, determine las alturas límite h_A y h_C para que esto no suceda. La montaña rusa parte desde el reposo en la posición A. Desprecie la fricción.



Prob. 14-37

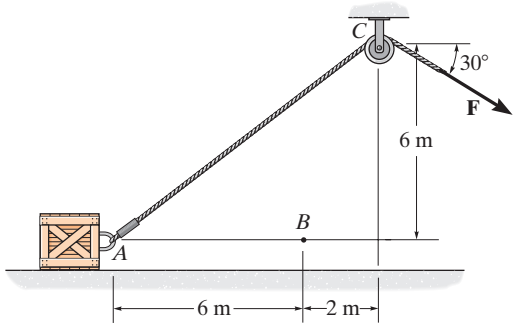
14-38. Si el esquiador de 60 kg pasa por el punto A con una rapidez de 5 m/s, determine su rapidez cuando alcanza el punto B. Además, encuentre la fuerza normal ejercida sobre él por la pendiente en este punto. Desprecie la fricción.



Prob. 14-38

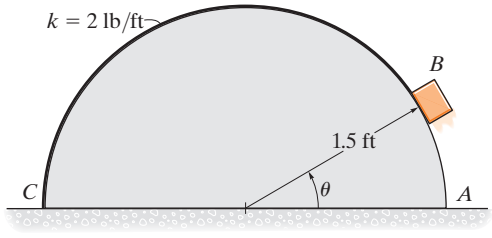
14-39. Si el embalaje de 75 kg parte desde el reposo en A, determine su rapidez cuando alcanza el punto B. El cable está sometido a una fuerza constante de $F = 300$ N. Desprecie la fricción y el tamaño de la polea.

***14-40.** Si el embalaje de 75 kg parte desde el reposo en A, y su rapidez es de 6 m/s cuando pasa por el punto B, determine la fuerza **F** constante ejercida sobre el cable. Desprecie la fricción y el tamaño de la polea.



Probs. 14-39/40

14-41. Un bloque de 2 lb descansa sobre la superficie semicilíndrica lisa. Una cuerda elástica que tiene una rigidez $k = 2$ lb/ft está unida al bloque en B y a la base del semicilindro en el punto C. Si el bloque se libera desde el reposo en A ($\theta = 0°$), determine la longitud sin estirar de la cuerda, de modo que el bloque comience a despegarse del semicilindro en el instante $\theta = 45°$. Desprecie el tamaño del bloque.



Prob. 14-41

14.4 Potencia y eficiencia

Potencia. El término "potencia" constituye una base útil para seleccionar el tipo de motor o máquina requerido para realizar cierta cantidad de trabajo en un tiempo dado. Se pueden tener dos bombas, por ejemplo, y cada una de éstas es capaz de vaciar un depósito, si se le da tiempo suficiente; sin embargo, si se elige la bomba de mayor potencia completará la tarea más rápido.

Por consiguiente, la *potencia* generada por una máquina o un motor que realiza cierta cantidad de trabajo dU dentro del intervalo de tiempo dt es

$$P = \frac{dU}{dt} \tag{14-9}$$

Si el trabajo dU se expresa como $dU = \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, entonces

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

o bien,

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{14-10}$$

La potencia de salida de esta locomotora se deriva de la fuerza de fricción propulsora desarrollada en sus ruedas. Ésta es la fuerza que vence la resistencia a la fricción de los vagones remolcados y es capaz de llevar el peso del tren cuesta arriba. (© R. C. Hibbeler)

De ahí que la potencia sea un *escalar*, donde en esta fórmula $\mathbf{v}$ representa la velocidad de la partícula en la cual actúa la fuerza $\mathbf{F}$.

Las unidades básicas de potencia utilizadas en el SI y el sistema FPS son el watt (W) y el caballo de fuerza (hp), respectivamente. Estas unidades se definen como

$$1\ \text{W} = 1\ \text{J/s} = 1\ \text{N} \cdot \text{m/s}$$

$$1\ \text{hp} = 550\ \text{ft} \cdot \text{lb/s}$$

Para la conversión entre los dos sistemas de unidades, 1 hp = 746 W.

Eficiencia. La *eficiencia mecánica* de una máquina se define como la razón entre la salida de potencia útil producida por la máquina y la entrada de potencia suministrada a la máquina. Por lo tanto,

$$\varepsilon = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} \tag{14-11}$$

Si la energía suministrada a la máquina ocurre durante el *mismo intervalo de tiempo* en el cual es extraída, entonces la eficiencia también se expresa en función de la relación

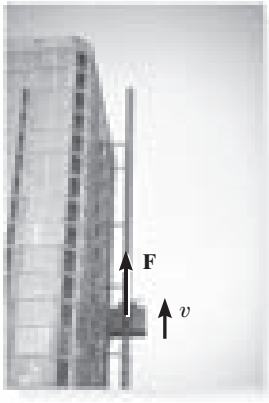
$$\varepsilon = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} \tag{14-12}$$

Como las máquinas se componen de una serie de piezas móviles, siempre se desarrollarán fuerzas de fricción dentro de ellas y, por consiguiente, se requiere energía extra o potencia adicional para vencer tales fuerzas. Por lo tanto, la potencia de salida será menor que la potencia de entrada, de ahí que la *eficiencia de una máquina siempre es menor que 1*.

La potencia suministrada a un cuerpo se determina mediante el siguiente procedimiento.

Procedimiento para el análisis

- Primero determine la fuerza externa **F** que actúa en el cuerpo y que origina el movimiento. Esta fuerza casi siempre la genera una máquina o un motor que se coloca dentro o fuera del cuerpo.
- Si el cuerpo está acelerado, podría requerirse dibujar su diagrama de cuerpo libre y aplicar la ecuación de movimiento ($\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$) para determinar **F**.
- Una vez que se determina **F** y la velocidad **v** de la partícula donde se aplica **F**, la potencia se determina al multiplicar la magnitud de la fuerza por la componente de velocidad que actúa en la dirección de **F** (es decir, $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Fv \cos \theta$).
- En algunos problemas, la potencia se determina calculando el trabajo realizado por **F** por unidad de tiempo ($P_{\text{prom}} = \Delta U / \Delta t$).



Los requerimientos de potencia de este ascensor dependen de la fuerza vertical **F** que actúa en él y que hace que se desplace hacia arriba. Si la velocidad del elevador es **v**, entonces la potencia de salida es $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. (© R. C. Hibbeler)

EJEMPLO 14.7

El hombre que aparece en la figura 14-15*a* empuja el embalaje de 50 kg con una fuerza $F = 150$ N. Determine la potencia suministrada por el hombre cuando $t = 4$ s. El coeficiente de fricción cinética entre el piso y el embalaje es $\mu_k = 0.2$. En un principio, el embalaje está en reposo.

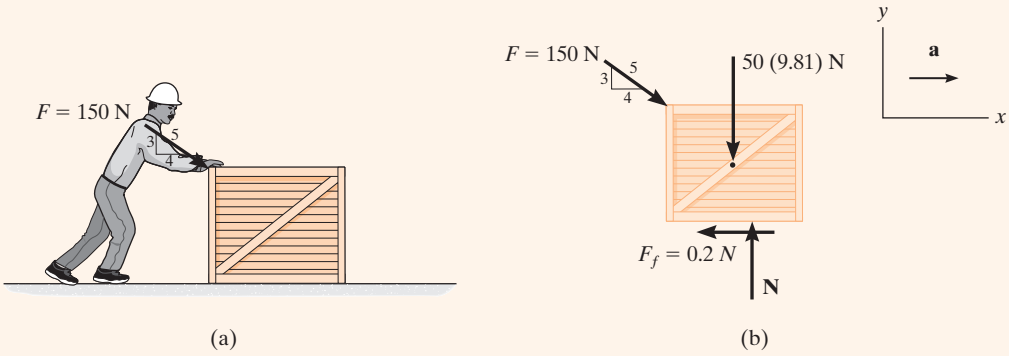


Fig. 14-15

SOLUCIÓN

Para determinar la potencia desarrollada por el hombre, primero debe calcularse la velocidad del embalaje producida por la fuerza de 150 N. El diagrama de cuerpo libre del embalaje se muestra en la figura 14-15*b*. Al aplicar la ecuación de movimiento,

$$+\uparrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad N - \left(\tfrac{3}{5}\right)150\text{ N} - 50(9.81)\text{ N} = 0$$

$$N = 580.5\text{ N}$$

$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = ma_x; \qquad \left(\tfrac{4}{5}\right)150\text{ N} - 0.2(580.5\text{ N}) = (50\text{ kg})a$$

$$a = 0.078\text{ m/s}^2$$

Por consiguiente, la velocidad del embalaje cuando $t = 4\ s$ es

$$(\pm\rightarrow) \qquad v = v_0 + a_c t$$

$$v = 0 + (0.078\text{ m/s}^2)(4\text{ s}) = 0.312\text{ m/s}$$

La potencia suministrada al embalaje por el hombre, cuando $t = 4\ s$ es, por consiguiente,

$$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = F_x v = \left(\tfrac{4}{5}\right)(150\text{ N})(0.312\text{ m/s})$$

$$= 37.4\text{ W} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 14.8

El motor M del malacate en la figura 14-16*a* levanta el embalaje C de 75 lb, de modo que la aceleración del punto P es de 4 ft/s^2. Determine la potencia que debe suministrarse al motor en el instante en que la velocidad de P es de 2 ft/s. Ignore la masa de la polea y el cable y considere $\varepsilon = 0.85$.

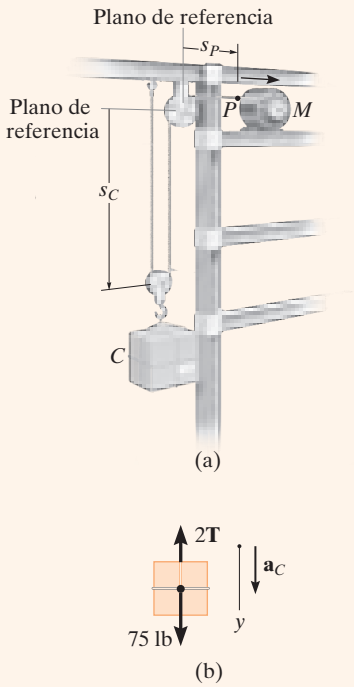


Fig. 14-16

SOLUCIÓN

Para determinar la potencia de salida del motor, primero es necesario determinar la tensión en el cable, ya que el motor genera esta fuerza. A partir del diagrama de cuerpo libre (fig. 14-16*b*), tenemos

$$+\downarrow \quad \Sigma F_y = ma_y; \qquad -2T + 75\text{ lb} = \frac{75\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}a_c \qquad (1)$$

La aceleración del embalaje puede calcularse por medio de la cinemática para relacionarla con la aceleración conocida del punto P (fig. 14-16*a*). Con los métodos del movimiento dependiente absoluto, las coordenadas s_C y s_P pueden relacionarse con una parte constante de la longitud del cable l, la cual cambia en las direcciones vertical y horizontal. Tenemos $2s_C + s_P = l$. Al tomar la segunda derivada con respecto al tiempo de esta ecuación, resulta

$$2a_C = -a_P \qquad (2)$$

Como $a_P = +4\text{ ft/s}^2$, entonces $a_C = -(4\text{ ft/s}^2)/2 = -2\text{ ft/s}^2$. ¿Qué indica el signo negativo? Al sustituir este resultado en la ecuación 1, y *conservando* el signo negativo, ya que la aceleración *tanto* en la ecuación 1 *como* en la ecuación 2 se consideró positiva hacia abajo, tenemos

$$-2T + 75\text{ lb} = \left(\frac{75\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(-2\text{ ft/s}^2)$$

$$T = 39.83\text{ lb}$$

La potencia de salida, medida en caballos de fuerza, requerida para jalar el cable a razón de 2 ft/s es, por consiguiente,

$$P = \mathbf{T}\cdot\mathbf{v} = (39.83\text{ lb})(2\text{ ft/s})[1\text{ hp}/(550\text{ ft}\cdot\text{lb/s})]$$

$$= 0.1448\text{ hp}$$

Esta *potencia de salida* requiere que el motor proporcione una *potencia de entrada* de

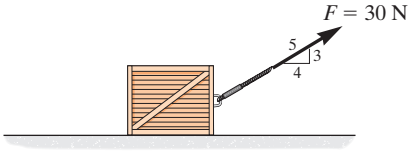
$$\text{potencia de entrada} = \frac{1}{\varepsilon}(\text{potencia de salida})$$

$$= \frac{1}{0.85}(0.1448\text{ hp}) = 0.170\text{ hp} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Como la velocidad del embalaje cambia constantemente, el requerimiento de potencia es *instantáneo*.

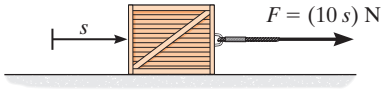
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F14-7. Si la superficie de contacto entre el bloque de 20 kg y el suelo es lisa, determine la potencia de la fuerza **F** cuando $t = 4$ s. En un principio, el bloque está en reposo.



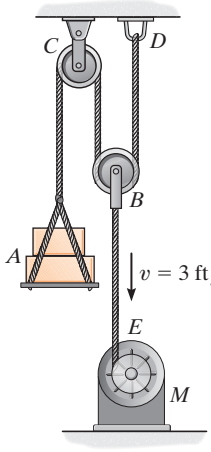
Prob. F14-7

F14-8. Si $F = (10\,s)$ N, donde s está en metros y la superficie de contacto entre el bloque y el suelo es lisa, determine la potencia de la fuerza **F**, cuando $s = 5$ m. Cuando $s = 0$, el bloque de 20 kg se mueve a $v = 1$ m/s.



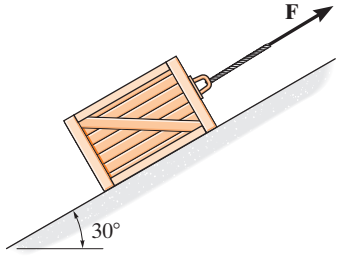
Prob. F14-8

F14-9. Si el motor enrolla el cable a una rapidez constante de $v = 3$ ft/s, determine la potencia suministrada al motor. La carga pesa 100 lb y la eficiencia del motor es $\varepsilon = 0.8$. Ignore la masa de las poleas.



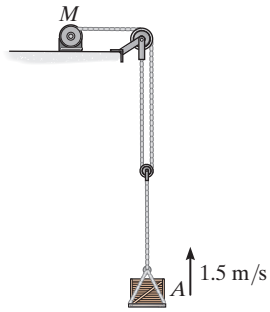
Prob. F14-9

F14-10. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque de 20 kg y el plano inclinado es $\mu_k = 0.2$. Si el bloque se mueve hacia arriba del plano inclinado a velocidad constante $v = 5$ m/s, determine la potencia de la fuerza **F**.



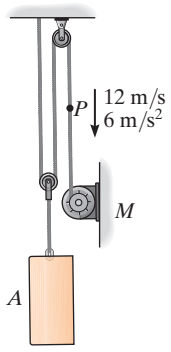
Prob. F14-10

F14-11. Si el motor M eleva la carga A de 50 kg a una velocidad constante de 1.5 m/s, determine la potencia de entrada del motor, el cual opera con una eficiencia $\varepsilon = 0.8$.



Prob. F14-11

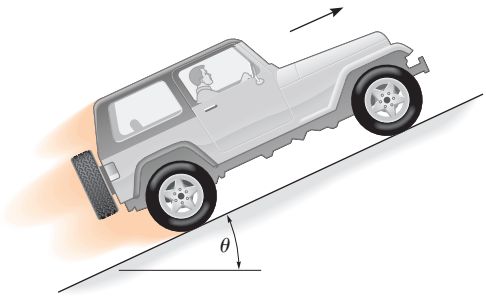
F14-12. En el instante mostrado, el punto P en el cable tiene una velocidad $v_P = 12$ m/s, la cual se incrementa a razón de $a_P = 6$ m/s^2. Determine la potencia de entrada del motor M en este instante, si opera con una eficiencia $\varepsilon = 0.8$. La masa del bloque A es de 50 kg.



Prob. F14-12

PROBLEMAS

14-42. El jeep tiene un peso de 2500 lb y un motor que le transmite una potencia de 100 hp a *todas* las ruedas. Si se supone que las ruedas no se deslizan sobre el terreno, determine el ángulo θ de la mayor inclinación que el jeep puede escalar a una rapidez constante $v = 30$ ft/s.



Prob. 14-42

14-43. Determine la potencia de entrada necesaria para que un motor eleve 300 libras a una rapidez constante de 5 ft/s. La eficiencia del motor es $\varepsilon = 0.65$.

***14-44.** Un automóvil que tiene una masa de 2 Mg se desplaza hacia arriba sobre una pendiente de 7° a una rapidez constante de $v = 100$ km/h. Si la fricción mecánica y la resistencia del viento se pueden despreciar, determine la potencia desarrollada por el motor, si el automóvil tiene una eficiencia $\varepsilon = 0.65$.

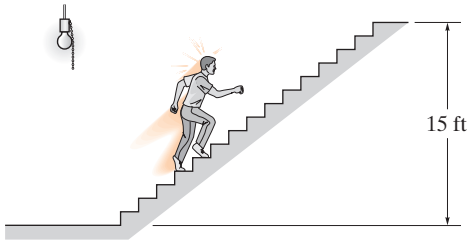
Prob. 14-44

14-45. La Milkin Aircraft Co. fabrica un motor turborreactor que se instala en un avión que pesa 13000 lb. Si el motor desarrolla un empuje constante de 5200 lb, determine la potencia de salida del avión cuando está a punto de despegar con una rapidez de 600 mi/h.

14-46. Para ejemplificar la pérdida de energía en un automóvil, considere un auto que tiene un peso de 5000 lb y se desplaza a 35 mi/h. Si el automóvil se detiene, determine cuánto tiempo debe estar encendida una bombilla de luz de 100 W para gastar la misma cantidad de energía. (1 mi = 5280 ft.)

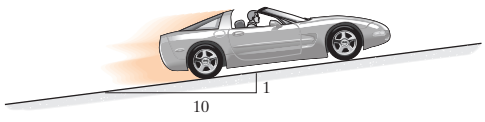
14-47. Los escalones de una escalera eléctrica se mueven con una rapidez constante de 0.6 m/s. Si los escalones tienen 125 mm de altura y 250 mm de longitud, determine la potencia del motor necesaria para levantar una masa promedio de 150 kg por escalón. Hay 32 escalones.

***14-48.** El hombre que tiene un peso de 150 lb es capaz de correr y alcanzar 15 pies de altura subiendo por las escaleras en 4 s. Determine la potencia generada. ¿Cuánto tiempo debe estar encendida una bombilla de luz de 100 W para gastar la misma cantidad de energía? *Conclusión:* ¡Por favor, apague las luces cuando no las utilice!



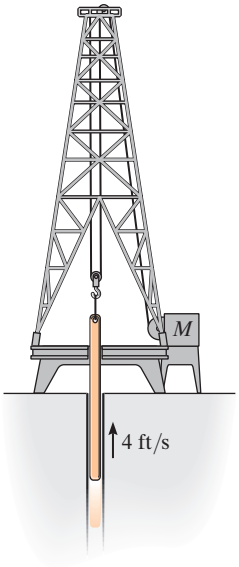
Prob. 14-48

14-49. El automóvil de 2 Mg aumenta su rapidez uniformemente desde el reposo hasta 25 m/s en 30 s por la carretera inclinada. Determine la potencia máxima que debe suministrar el motor, el cual funciona con una eficiencia de $\varepsilon = 0.8$. Además, encuentre la potencia promedio suministrada por el motor.



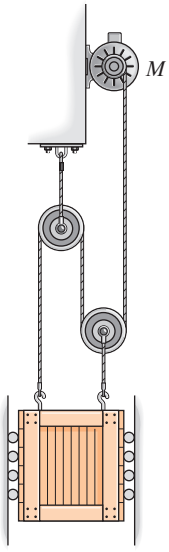
Prob. 14-49

14-50. Determine la potencia de salida del motor de extracción M que se requiere para levantar la tubería de perforación de 600 lb con una rapidez constante de 4 ft/s. El cable está sujeto a la parte superior de la plataforma petrolera, se enrolla alrededor de la polea inferior, luego alrededor de la polea superior y, en seguida, en el motor.



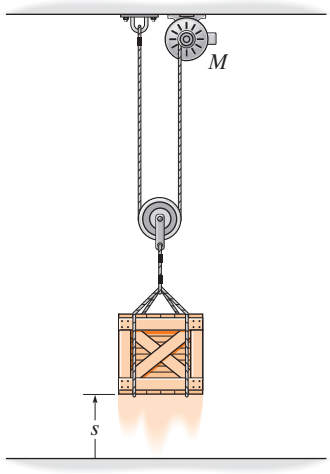
Prob. 14-50

14-51. El elevador de 1000 lb es izado mediante el sistema de poleas y el motor M. Si el motor ejerce una fuerza constante de 500 lb sobre el cable, determine la potencia que se debe suministrar al motor en el instante en que la carga ha sido elevada hasta $s = 15$ ft partiendo del reposo. El motor tiene una eficiencia de $\varepsilon = 0.65$.



Prob. 14-51

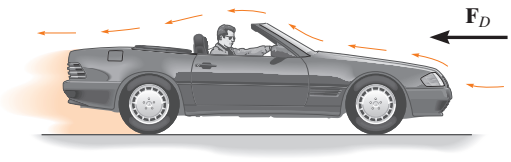
***14-52.** Al embalaje de 50 lb se le da una rapidez de 10 ft/s en $t = 4$ s partiendo del reposo. Si la aceleración es constante, determine la potencia que debe suministrarse al motor cuando $t = 2$ s. El motor tiene una eficiencia $\varepsilon = 0.65$. Desprecie la masa de la polea y el cable.



Prob. 14-52

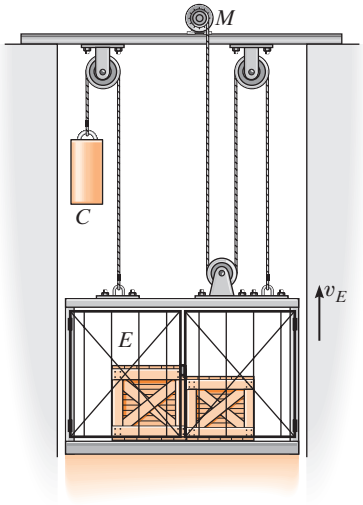
14-53. El auto deportivo tiene una masa de 2.3 Mg y, cuando viaja a 28 m/s, el conductor lo acelera a 5 m/s^2. Si la resistencia de arrastre sobre el auto debida al viento es $F_D = (0.3v^2)$ N, donde v es la velocidad en m/s, determine la potencia suministrada al motor en este instante. El motor tiene una eficiencia de funcionamiento de $\varepsilon = 0.68$.

14-54. El auto deportivo tiene una masa de 2.3 Mg y acelera a 6 m/s^2, partiendo desde el reposo. Si la resistencia de arrastre sobre el auto debida al viento es $F_D = (10v)$ N, donde v es la velocidad en m/s, determine la potencia suministrada al motor cuando $t = 5$ s. El motor tiene una eficiencia de funcionamiento de $\varepsilon = 0.68$.



Probs. 14-53/54

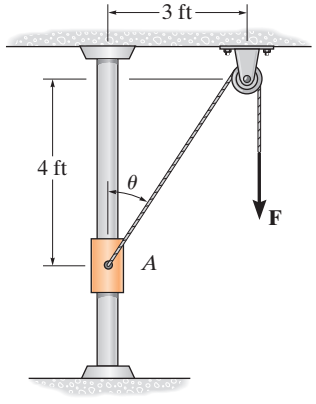
14-55. El elevador E y su carga tienen una masa total de 400 kg. El izamiento se realiza con el motor M y el bloque C de 60 kg. Si el motor tiene una eficiencia de $\varepsilon = 0.6$, determine la potencia que se debe suministrar al motor cuando el ascensor es izado con una rapidez constante de $v_E = 4$ m/s.



Prob. 14-55

***14-56.** El collarín de 10 lb parte del reposo en A y se eleva al aplicar sobre la cuerda una fuerza vertical constante de $F = 25$ lb. Si la varilla es lisa, determine la potencia desarrollada por la fuerza en el instante $\theta = 60°$.

14-57. El collarín de 10 lb parte del reposo en A y se eleva con una rapidez constante de 2 ft/s a lo largo de la varilla lisa. Determine la potencia desarrollada por la fuerza **F** en el instante mostrado.



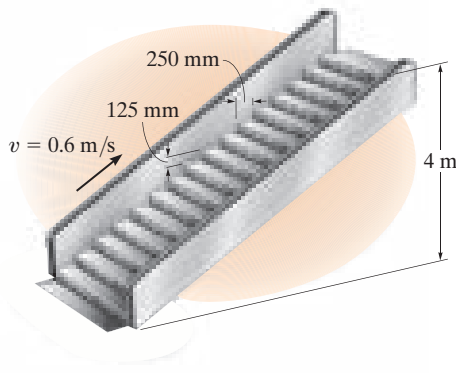
Prob. 14-57

14-58. El bloque de 50 lb descansa sobre la superficie áspera cuyo coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.2$. Una fuerza $F = (40 + s^2)$ lb, donde s está en ft, actúa sobre el bloque en la dirección indicada. Si el resorte está originalmente sin estirar ($s = 0$) y el bloque está en reposo, determine la potencia desarrollada por la fuerza en el instante en que el bloque se ha movido $s = 1.5$ ft.

Prob. 14-58

14-59. Los escalones de la escalera eléctrica se mueven con una rapidez constante de 0.6 m/s. Si los escalones tienen 125 mm de altura y 250 mm de longitud, determine la potencia necesaria de un motor para levantar una masa promedio de 150 kg por escalón. Hay 32 escalones.

***14-60.** Si la escalera eléctrica del problema 14-46 no se mueve, determine la rapidez constante a la que un hombre, que tiene una masa de 80 kg, debe subir por los escalones para generar 100 W de potencia—la misma cantidad que se requiere para alimentar una bombilla de luz estándar.



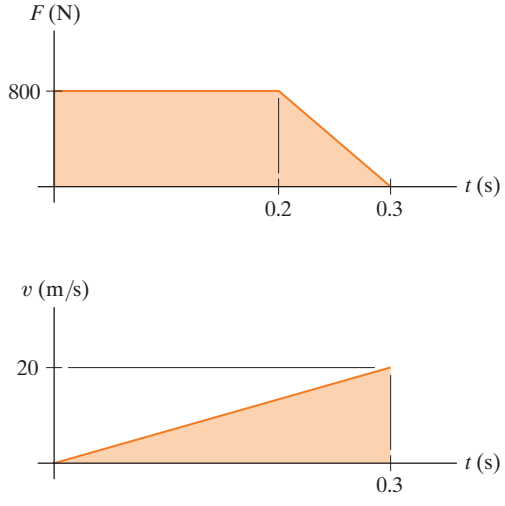
Probs. 14-59/60

14-61. Si el chorro de propulsión del *dragster* suministra un empuje constante de $T = 20$ kN, determine la potencia generada por el chorro como una función del tiempo. Desprecie la resistencia de arrastre y la resistencia al rodamiento, así como la pérdida de combustible. El *dragster* tiene una masa de 1 Mg y parte del reposo.

Prob. 14-61

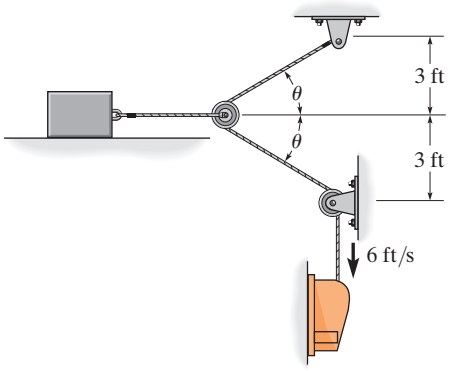
14-62. Un atleta empuja contra una máquina de ejercicios con una fuerza que varía con el tiempo, como se muestra en la primera gráfica. Asimismo, la velocidad del brazo del atleta que actúa en la misma dirección que la fuerza varía con el tiempo, de la manera ilustrada en la segunda gráfica. Determine la potencia aplicada en función del tiempo y el trabajo realizado en $t = 0.3$ s.

14-63. Un atleta empuja contra una máquina de ejercicios con una fuerza que varía con el tiempo, como se muestra en la primera gráfica. Además, la velocidad del brazo del atleta que actúa en la misma dirección que la fuerza varía con el tiempo, de la manera indicada en la segunda gráfica. Determine la potencia máxima desarrollada durante el periodo de tiempo de 0.3 segundos.



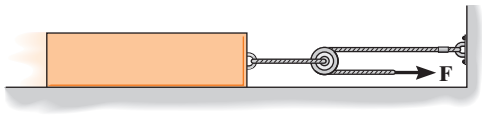
Probs. 14-62/63

***14-64.** El bloque tiene un peso de 80 lb y descansa sobre el piso cuyo $\mu_k = 0.4$. Si el motor enrolla el cable a razón constante de 6 ft/s, determine la potencia de salida del motor en el instante $\theta = 30°$. Desprecie la masa del cable y las poleas.



Prob. 14-64

14-65. El bloque tiene una masa de 150 kg y descansa sobre una superficie cuyos coeficientes de fricción estática y cinética son $\mu_s = 0.5$ y $\mu_k = 0.4$, respectivamente. Si una fuerza $F = (60\ t^2)$ N, donde t se da en segundos, se aplica sobre el cable, determine la potencia desarrollada por la fuerza cuando $t = 5$ s. *Sugerencia:* Primero determine el tiempo necesario para que la fuerza cause movimiento.

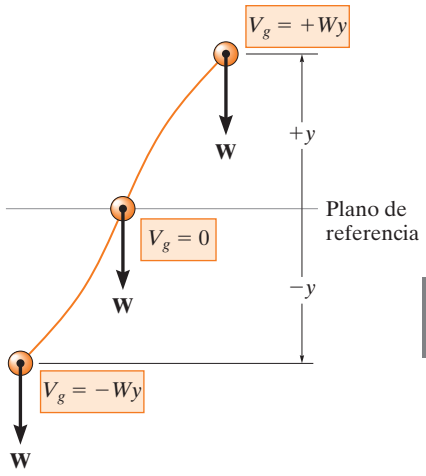


Prob. 14-65

14.5 Fuerzas conservativas y energía potencial

Fuerza conservativa. Si el trabajo de una fuerza es *independiente de la trayectoria* y depende sólo de las posiciones inicial y final de la trayectoria, entonces podemos clasificarla como una *fuerza conservativa*. Ejemplos de fuerzas conservativas son el peso de una partícula y la fuerza desarrollada por un resorte. El trabajo realizado por el peso depende *sólo* del *desplazamiento vertical* del peso y el trabajo realizado por la fuerza de un resorte depende *sólo* del *alargamiento* o la *compresión* del resorte.

En contraste con una fuerza conservativa, considere la fuerza de fricción ejercida *en un objeto que se desliza* por una superficie fija. El trabajo realizado por la fuerza de fricción *depende de la trayectoria* —cuanto más larga sea la trayectoria, mayor será el trabajo. Por consiguiente, las *fuerzas de fricción no son conservativas*. El trabajo se disipa del cuerpo en forma de calor.



Energía potencial gravitatoria

Fig. 14-17

Energía. La energía se define como la capacidad de realizar trabajo. Por ejemplo, si una partícula originalmente está en reposo, entonces el principio de trabajo y energía establece que $\sum U_{1\rightarrow 2} = T_2$. Expresado de otra manera, la energía cinética es igual al trabajo que debe realizarse en la partícula para llevarla del estado de reposo al estado de rapidez v. Por lo tanto, la *energía cinética* es una medida de la *capacidad de la partícula de realizar trabajo*, la cual está asociada con el *movimiento* de la partícula. Cuando la energía proviene de la *posición* de la partícula, medida con respecto a un plano de referencia fijo, se llama energía potencial. Entonces, la *energía potencial* es una medida de la cantidad de trabajo que una fuerza conservativa realizará cuando se mueve de una posición dada al plano de referencia. En mecánica, es importante la energía potencial creada por la gravedad (peso) o un resorte elástico.

Energía potencial gravitacional. Si una partícula se encuentra a una distancia y *por encima* de un plano de referencia arbitrariamente seleccionado, como se muestra en la figura 14-17, el peso de la partícula **W** tiene una *energía potencial gravitacional* positiva, V_g, ya que **W** tiene la capacidad de realizar trabajo positivo cuando la partícula regresa al plano de referencia. Asimismo, si la partícula se encuentra a una distancia y *por debajo* del plano de referencia V_g es negativa, puesto que el peso realiza trabajo negativo cuando la partícula regresa al plano de referencia. En el plano de referencia $V_g = 0$.

En general, si y es *positiva hacia arriba*, la energía potencial gravitacional de la partícula de peso W es*

$$V_g = Wy \tag{14-13}$$

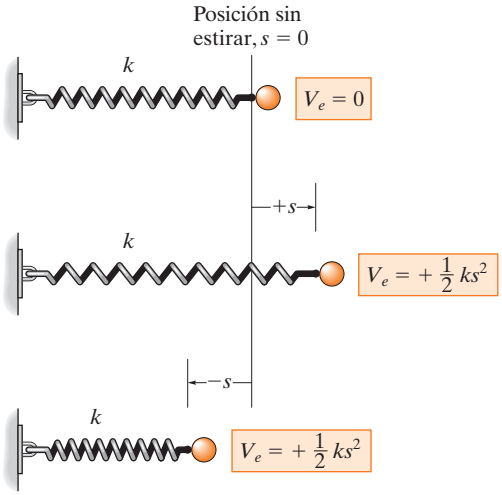
La energía potencial gravitatoria de este peso se incrementa a medida que se va elevando. (© R. C. Hibbeler)

*Aquí se supone que el peso es *constante*. Esta suposición es adecuada para diferencias pequeñas de elevación Δy. Sin embargo, si el cambio de elevación es significativo, debe tomarse en cuenta la variación del peso con la elevación (vea el prob. 14-82).

Energía potencial elástica. Cuando un resorte elástico se alarga o comprime una distancia s, a partir de su posición sin estirar, en el resorte puede almacenarse energía potencial elástica V_e. Esta energía es

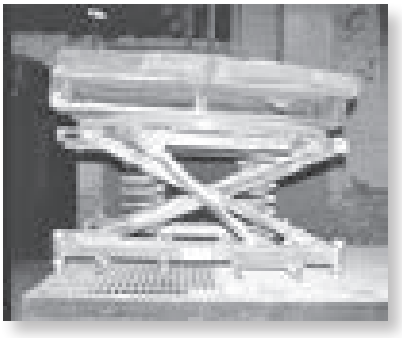
$$V_e = +\tfrac{1}{2}ks^2 \tag{14-14}$$

Aquí V_e *siempre es positiva* ya que, en la posición deformada, la fuerza del resorte tiene la *capacidad* o el "potencial" de realizar siempre trabajo en la partícula, cuando el resorte regresa a su posición sin estirar (fig. 14-18).



Energía potencial elástica

Fig. 14-18



El peso de los sacos colocados sobre esta plataforma produce energía potencial que se almacena en los resortes del soporte. A medida que se quita cada saco, la plataforma *se eleva* un poco, ya que una parte de la energía potencial en los resortes se transformará en un incremento de la energía potencial gravitacional de los sacos restantes. Este dispositivo es útil para quitar los sacos sin inclinarse para descargarlos. (© R. C. Hibbeler)

Función potencial. En el caso general, si una partícula se somete tanto a fuerzas gravitacionales como elásticas, la energía potencial de la partícula se expresa como una *función potencial*, la cual es la suma algebraica

$$V = V_g + V_e \tag{14-15}$$

La medición de V depende de la ubicación de la partícula con respecto a un plano de referencia, seleccionado de acuerdo con las ecuaciones 14-13 y 14-14.

La *diferencia* de esta función mide el trabajo realizado por una fuerza conservativa al mover una partícula de un punto a otro, es decir,

$$U_{1-2} = V_1 - V_2 \tag{14-16}$$

Por ejemplo, la función potencial de una partícula de peso W suspendida de un resorte puede expresarse en función de su posición, s, medida con respecto a un plano de referencia situado en la longitud sin estirar del resorte (fig. 14-19). Tenemos

$$\begin{aligned} V &= V_g + V_e \\ &= -Ws + \tfrac{1}{2}ks^2 \end{aligned}$$

Si la partícula se mueve de s_1 a una posición más baja s_2, entonces al aplicar la ecuación 14-16 se observa que el trabajo de $\mathbf{W}$ y $\mathbf{F}_s$ es

$$\begin{aligned} U_{1-2} = V_1 - V_2 &= \left(-Ws_1 + \tfrac{1}{2}ks_1^2\right) - \left(-Ws_2 + \tfrac{1}{2}ks_2^2\right) \\ &= W(s_2 - s_1) - \left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right) \end{aligned}$$

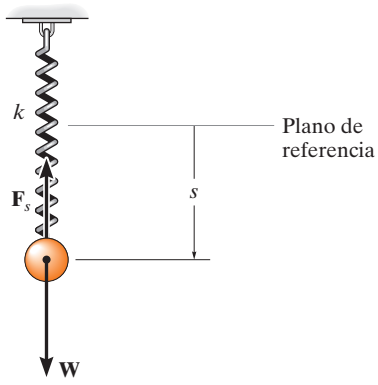


Fig. 14-19

Cuando el desplazamiento a lo largo de la trayectoria es infinitesimal, es decir, del punto (x, y, z) al punto $(x + dx, y + dy, z + dz)$, la ecuación 14-16 se escribe como

$$\begin{aligned} dU &= V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz) \\ &= -dV(x, y, z) \end{aligned} \tag{14-17}$$

Si representamos tanto la fuerza como su desplazamiento como vectores cartesianos, entonces el trabajo también puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} dU &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \end{aligned}$$

Al sustituir este resultado en la ecuación 14-17 y expresar la diferencial $dV(x, y, z)$ en función de sus derivadas parciales se tiene

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)$$

Como los cambios de x, y y z son independientes entre sí, esta ecuación se satisface siempre que

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{14-18}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)V \end{aligned}$$

o bien,

$$\mathbf{F} = -\nabla V \tag{14-19}$$

donde ∇ (nabla) representa el operador vectorial
$\nabla = (\partial/\partial x)\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\mathbf{k}$.

La ecuación 14-19 relaciona una fuerza $\mathbf{F}$ con su función potencial V por lo que constituye un criterio matemático para comprobar que $\mathbf{F}$ es conservativa. Por ejemplo, la función potencial gravitacional de un peso situado a una distancia y por encima de un plano de referencia es $V_g = Wy$. Para comprobar que $\mathbf{W}$ es conservativo, es necesario demostrar que satisface la ecuación 14-18 (o la 14-19), en cuyo caso

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \qquad F_y = -\frac{\partial}{\partial y}(Wy) = -W$$

El signo negativo indica que $\mathbf{W}$ actúa hacia abajo, opuesto a la distancia y positiva, la cual se mide hacia arriba.

14.6 Conservación de la energía

Cuando en una partícula actúa un sistema *tanto* de fuerzas conservativas *como* no conservativas, la parte del trabajo realizado por las *fuerzas conservativas* puede escribirse en función de la diferencia de sus energías potenciales mediante la ecuación 14-16, es decir, $(\sum U_{1\text{-}2})_{\text{cons.}} = V_1 - V_2$. Por consiguiente, el principio de trabajo y energía se escribe como

$$T_1 + V_1 + (\sum U_{1\text{-}2})_{\text{no cons.}} = T_2 + V_2 \tag{14-20}$$

Aquí $(\sum U_{1\text{-}2})_{\text{no cons.}}$ representa el trabajo de las fuerzas no conservativas que actúan en la partícula. Si *sólo las fuerzas conservativas* realizan trabajo, entonces tenemos

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2} \tag{14-21}$$

Esta ecuación se conoce como la *conservación de la energía mecánica*, o simplemente como la *conservación de la energía*, y expresa que durante el movimiento la suma de las energías potencial y cinética de la partícula permanece *constante*. Para que esto ocurra, la energía cinética debe transformarse en energía potencial, y viceversa. Por ejemplo, si se deja caer una bola de peso **W** desde una altura h sobre el suelo (plano de referencia) (fig. 14-20), su energía potencial es máxima antes de dejarla caer, momento en el cual su energía cinética es cero. La energía mecánica total de la bola en su posición inicial es, por lo tanto,

$$E = T_1 + V_1 = 0 + Wh = Wh$$

Cuando la bola ha caído una distancia $h/2$, su rapidez se determina con $v^2 = v_0^2 + 2a_c(y - y_0)$, de la cual resulta $v = \sqrt{2g(h/2)} = \sqrt{gh}$. La energía de la bola a la mitad de la altura, por consiguiente, es

$$E = T_2 + V_2 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}\left(\sqrt{gh}\right)^2 + W\left(\frac{h}{2}\right) = Wh$$

Exactamente antes de que la bola choque contra el suelo, su energía potencial es cero y su rapidez es $v = \sqrt{2gh}$. Aquí, de nuevo, la energía total de la bola es

$$E = T_3 + V_3 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}\left(\sqrt{2gh}\right)^2 + 0 = Wh$$

Observe que cuando la bola entra en contacto con el suelo, se deforma ligeramente y, siempre que el suelo sea suficientemente duro, la bola rebotará en la superficie y alcanzará una nueva altura h', la cual será *menor* que la altura h desde la cual se soltó por primera vez. Si ignoramos la fricción del aire, la diferencia de altura explica la pérdida de energía, $E_1 = W(h - h')$, la cual ocurre durante la colisión. Porciones de esta pérdida ocasiona ruido, una deformación localizada en la bola y en el suelo, y calor.

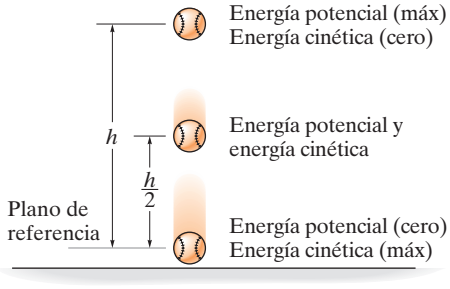


Fig. 14-20

Sistema de partículas. Si un sistema de partículas se *somete sólo a fuerzas conservativas*, entonces puede escribirse una ecuación similar a la ecuación 14-21 para las partículas. Al aplicar las ideas del planteamiento anterior, la ecuación 14-8 ($\sum T_1 + \sum U_{1\text{-}2} = \sum T_2$) se escribe como

$$\Sigma T_1 + \Sigma V_1 = \Sigma T_2 + \Sigma V_2 \tag{14-22}$$

Aquí, la suma de las energías cinética y potencial iniciales del sistema es igual a la suma de las energías cinética y potencial finales del sistema. En otras palabras, $\sum T + \sum V = \text{const}$.

14

Procedimiento para el análisis

La ecuación de la conservación de la energía puede utilizarse para resolver problemas que implican *velocidad*, *desplazamiento* y *sistemas de fuerzas conservativas*. En general, es *más fácil de aplicar* que el principio de trabajo y energía, ya que esta ecuación requiere especificar las energía cinética y potencial de la partícula en tan sólo *dos puntos* a lo largo de la trayectoria, en vez de determinar el trabajo cuando la partícula experimenta un *desplazamiento*. Para su aplicación se sugiere el siguiente procedimiento.

Energía potencial

- Dibuje dos diagramas que muestren la partícula localizada en sus puntos inicial y final a lo largo de la trayectoria.
- Si la partícula se somete a un desplazamiento vertical, establezca el plano de referencia horizontal fijo, con respecto al cual se va a medir la energía potencial gravitacional V_g de la partícula.
- Los datos relacionados con la elevación y de la partícula con respecto al plano de referencia, y con el alargamiento o compresión s de cualesquiera resortes conectado a ésta, pueden determinarse por la geometría asociada con los dos diagramas.
- Recuerde que $V_g = Wy$, donde y es positiva hacia arriba del plano de referencia y negativa hacia abajo del plano de referencia; asimismo para un resorte, $V_e = \frac{1}{2}ks^2$, la cual es *positiva siempre*.

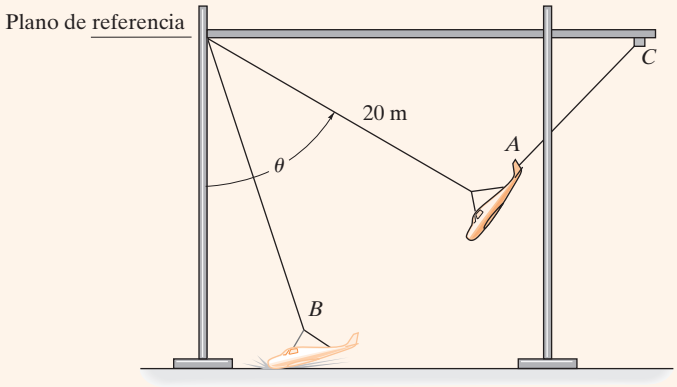
Conservación de la energía

- Aplique la ecuación $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$.
- Cuando determine la energía cinética, $T = \frac{1}{2}mv^2$, recuerde que la rapidez v de la partícula debe medirse con respecto a un marco de referencia inercial.

EJEMPLO 14.9

La estructura de armadura mostrada en la fotografía se utiliza para probar la respuesta de un avión al impactarse. Como se muestra en la figura 14-21*a*, el avión, cuya masa es de 8 Mg, es izado hacia atrás hasta que $\theta = 60°$ y, luego, se suelta el cable AC cuando el avión está en reposo. Determine la rapidez del avión justo antes de impactarse en el suelo, $\theta = 15°$. Además, ¿cuál es la tensión máxima desarrollada en el cable de soporte durante el movimiento? Ignore el tamaño del avión y el efecto de sustentación originado por las alas durante el movimiento.

(© R. C. Hibbeler)



(a)

SOLUCIÓN

Como la fuerza del cable *no realiza* trabajo en el avión, éste debe obtenerse con la ecuación de movimiento. En primer lugar, sin embargo, hay que determinar la rapidez del avión en B.

Energía potencial. Por conveniencia, el plano de referencia se estableció en el parte superior de la estructura de armadura (fig. 14-21*a*).

Conservación de la energía

$$T_A + V_A = T_B + V_B$$

$$0 - 8000\text{ kg}\,(9.81\text{ m/s}^2)(20\cos 60°\text{ m}) =$$

$$\tfrac{1}{2}(8000\text{ kg})v_B^2 - 8000\text{ kg}\,(9.81\text{ m/s}^2)(20\cos 15°\text{ m})$$

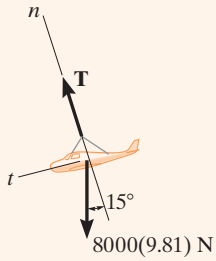
$$v_B = 13.52\text{ m/s} = 13.5\text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Ecuación de movimiento. De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre, cuando el avión está en B (fig. 14-21*b*), tenemos

$$+\nwarrow \quad \Sigma F_n = ma_n;$$

$$T - (8000(9.81)\text{ N})\cos 15° = (8000\text{ kg})\frac{(13.52\text{ m/s})^2}{20\text{ m}}$$

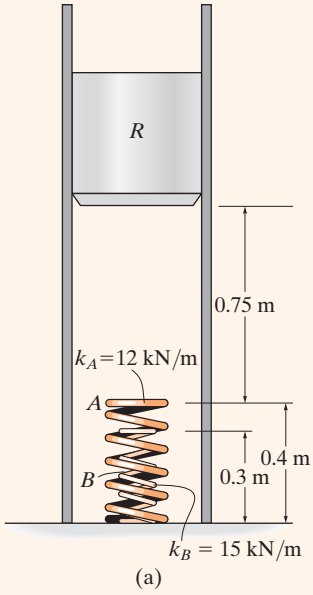
$$T = 149\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Fig. 14-21

EJEMPLO 14.10



(a)

El martinete R mostrado en la figura 14-22*a* tiene una masa de 100 kg y se suelta del reposo a 0.75 m de la parte superior de un resorte A, que tiene una rigidez de $k_A = 12$ kN/m. Si un segundo resorte B, cuya rigidez es de $k_B = 15$ kN/m, se "coloca dentro del otro" en A, determine el desplazamiento máximo de A necesario para detener el movimiento descendente del martinete. La longitud sin estirar de cada resorte se indica en la figura. Ignore la masa de los resortes.

SOLUCIÓN

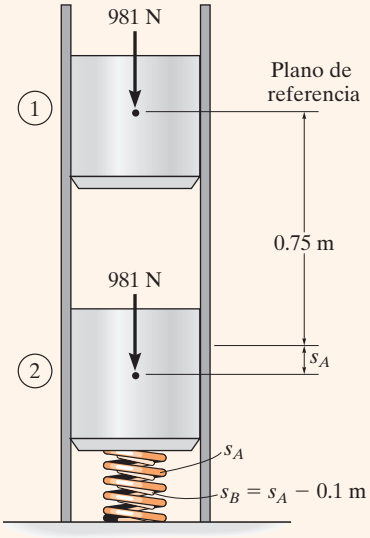
Energía potencial. *Supondremos* que el martinete comprime *ambos* resortes en el instante en que se detiene. El plano de referencia está localizado a través del centro de gravedad del martinete en su posición inicial (fig. 14-22*b*). Cuando la energía cinética se reduce a cero ($v_2 = 0$), A se comprime una distancia s_A y B se comprime $s_B = s_A - 0.1$ m.

Conservación de la energía

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 0 = 0 + \left\{\tfrac{1}{2}k_A s_A^2 + \tfrac{1}{2}k_B(s_A - 0.1)^2 - Wh\right\}$$

$$0 + 0 = 0 + \left\{\tfrac{1}{2}(12\,000\ \text{N/m})s_A^2 + \tfrac{1}{2}(15\,000\ \text{N/m})(s_A - 0.1\ \text{m})^2 - 981\ \text{N}\,(0.75\ \text{m} + s_A)\right\}$$



(b)

Fig. 14-22

Al reordenar los términos,

$$13\,500 s_A^2 - 2481 s_A - 660.75 = 0$$

Si utilizamos la fórmula cuadrática y despejamos la raíz positiva, tenemos

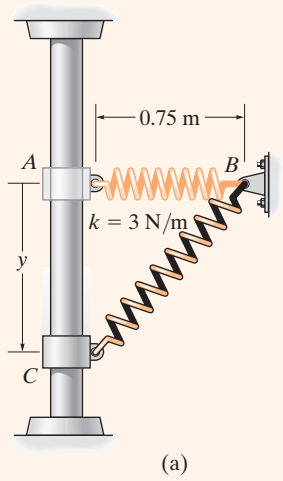
$$s_A = 0.331\ \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

Como $s_B = 0.331\ \text{m} - 0.1\ \text{m} = 0.231$ m, la cual es positiva, es correcta la suposición de que *ambos* resortes están comprimidos por el martinete.

NOTA: La segunda raíz, $s_A = -0.148$ m, no representa la situación física. Como s positiva se mide hacia abajo, el signo negativo indica que el resorte A tendría que "extenderse" en una cantidad de 0.148 m para detener el martinete.

EJEMPLO 14.11

En el poste vertical se inserta un collarín liso de 2 kg, como se muestra en la figura 14-23a. Si el resorte no está alargado cuando el collarín está en la posición A, determine la rapidez a la cual se mueve cuando $y = 1$ m, si (a) se suelta del reposo en A y (b) se suelta en A con una velocidad *hacia arriba* $v_A = 2$ m/s.



(a)

SOLUCIÓN

Parte (a) Energía potencial. Por conveniencia, el plano de referencia se sitúa a lo largo de una línea horizontal que pasa por A y B (fig. 14-23*b*). Cuando el collarín está en C, la energía potencial gravitacional es $-(mg)y$, puesto que el collarín está *debajo* del plano de referencia y la energía potencial elástica es $\frac{1}{2}ks_{CB}^2$. En este caso, $s_{CB} = 0.5$ m, la cual representa el *estiramiento* del resorte como se indica en la figura.

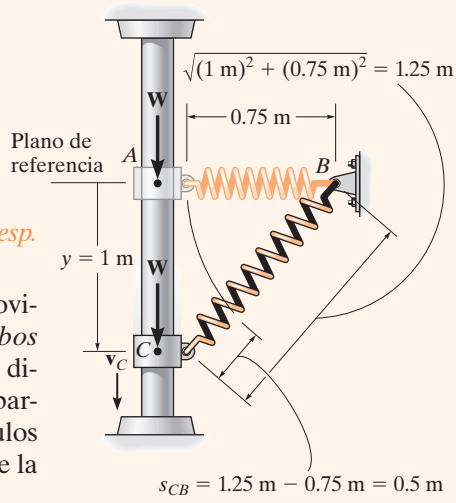
Conservación de la energía

$$T_A + V_A = T_C + V_C$$

$$0 + 0 = \tfrac{1}{2}mv_C^2 + \left\{\tfrac{1}{2}ks_{CB}^2 - mgy\right\}$$

$$0 + 0 = \left\{\tfrac{1}{2}(2\text{ kg})v_C^2\right\} + \left\{\tfrac{1}{2}(3\text{ N/m})(0.5\text{ m})^2 - 2(9.81)\text{ N}(1\text{ m})\right\}$$

$$v_C = 4.39\text{ m/s} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Fig. 14-23

Este problema también puede resolverse con la ecuación de movimiento o el principio de trabajo y energía. Observe que para *ambos* métodos deben tomarse en cuenta la variación de la magnitud y la dirección de la fuerza del resorte (vea el ejemplo 13.4). Aquí, sin embargo, la solución anterior es claramente ventajosa, ya que los cálculos dependen *sólo* de los datos calculados en los puntos inicial y final de la trayectoria.

Parte (b) Conservación de la energía. Si $v_A = 2$ m/s, al utilizar los datos de la figura 14-23*b*, tenemos

$$T_A + V_A = T_C + V_C$$

$$\tfrac{1}{2}mv_A^2 + 0 = \tfrac{1}{2}mv_C^2 + \left\{\tfrac{1}{2}ks_{CB}^2 - mgy\right\}$$

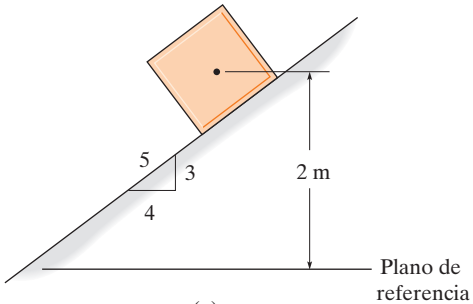
$$\tfrac{1}{2}(2\text{ kg})(2\text{ m/s})^2 + 0 = \tfrac{1}{2}(2\text{ kg})v_C^2 + \left\{\tfrac{1}{2}(3\text{ N/m})(0.5\text{ m})^2 - 2(9.81)\text{ N}(1\text{ m})\right\}$$

$$v_C = 4.82\text{ m/s} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

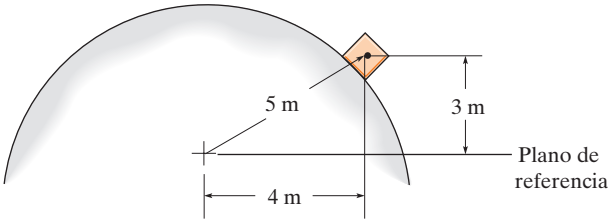
NOTA: La energía cinética del collarín depende sólo de la *magnitud* de la velocidad y, por consiguiente, no importa si el collarín sube o baja a 2 m/s cuando se suelta en A.

PROBLEMAS PRELIMINARES

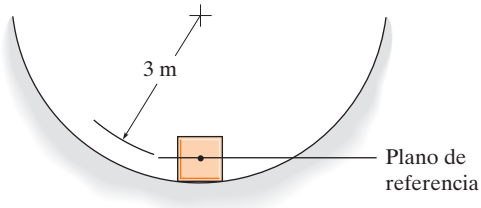
P14-3. Determine la energía potencial del bloque que tiene un peso de 100 N.



(a)



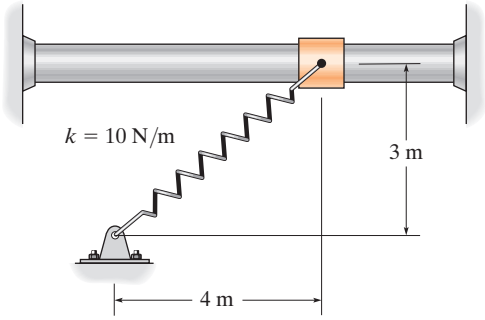
(b)



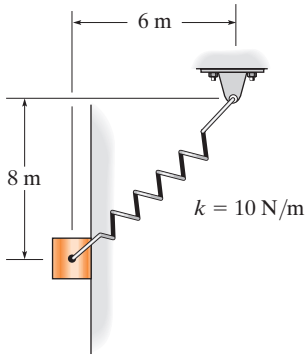
(c)

Prob. P14-3

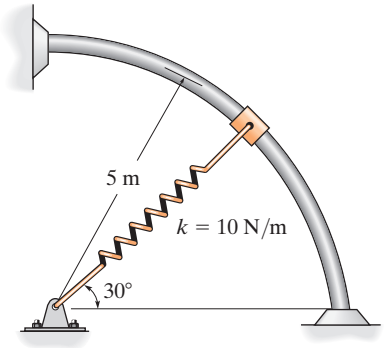
P14-4. Determine la energía potencial en el resorte que tiene una longitud sin estirar de 4 m.



(a)



(b)

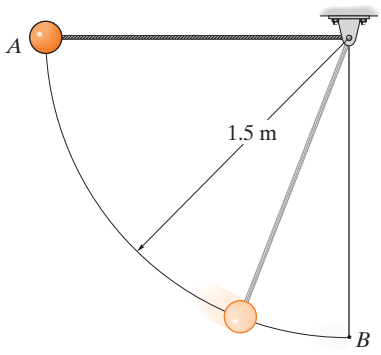


(c)

Prob. P14-4

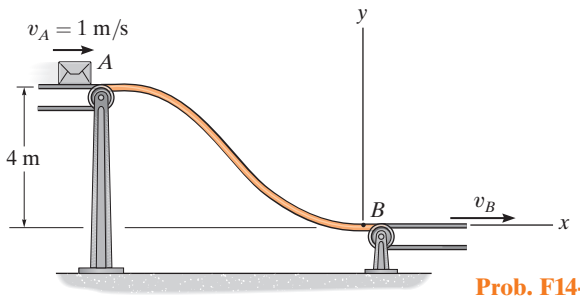
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F14-13. La bola del péndulo de 2 kg se suelta del reposo cuando está en A. Determine la rapidez de la bola y la tensión en la cuerda cuando pasa por su posición más baja B.



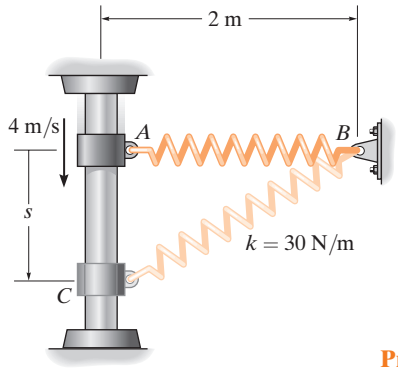
Prob. F14-13

F14-14. El paquete de 2 kg deja la banda transportadora en A con una rapidez de $v_A = 1$ m/s y se desliza hacia abajo de la rampa lisa. Determine la rapidez requerida de la banda transportadora en B, de modo que el paquete sea entregado sin que resbale en la banda. Además, determine la reacción normal que la rampa en la parte curva ejerce en el paquete en B, si $\rho_B = 2$ m.



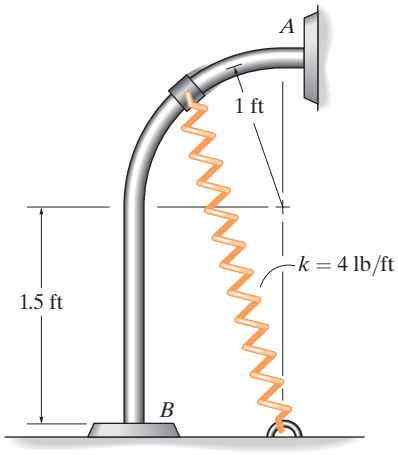
Prob. F14-14

F14-15. Al collarín de 2 kg se le imprime una velocidad de 4 m/s hacia abajo, cuando está en A. Si la longitud sin estirar del resorte es de 1 m y su rigidez es $k = 30$ N/m, determine la rapidez del collarín en $s = 1$ m.



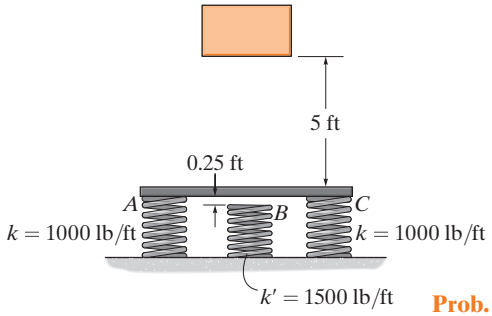
Prob. F14-15

F14-16. El collarín de 5 lb se suelta del reposo en A y se desliza a lo largo de la guía libre de fricción. Determine la rapidez del collarín cuando choca contra el tope B. La longitud sin estirar del resorte es de 0.5 ft.



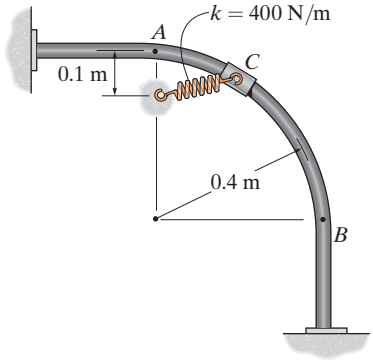
Prob. F14-16

F14-17. El bloque de 75 lb se suelta del reposo a 5 ft arriba de la placa. Determine la compresión de cada resorte, cuando el bloque se detiene momentáneamente después de golpear la placa. Ignore la masa de la placa. En un principio los resortes no están estirados.



Prob. F14-17

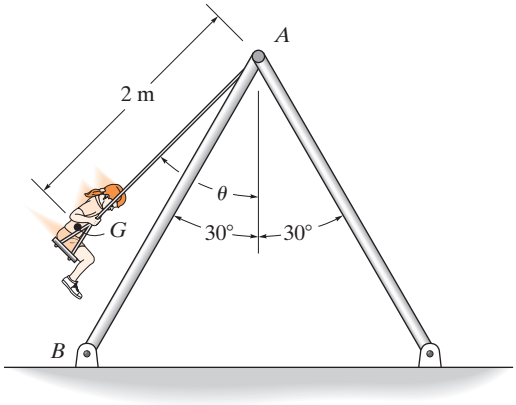
F14-18. El collarín C de 4 kg tiene una velocidad de $v_A = 2$ m/s cuando está en A. Si la varilla guía es lisa, determine la rapidez del collarín cuando está en B. La longitud sin estirar del resorte es $l_0 = 0.2$ m.



Prob. F14-18

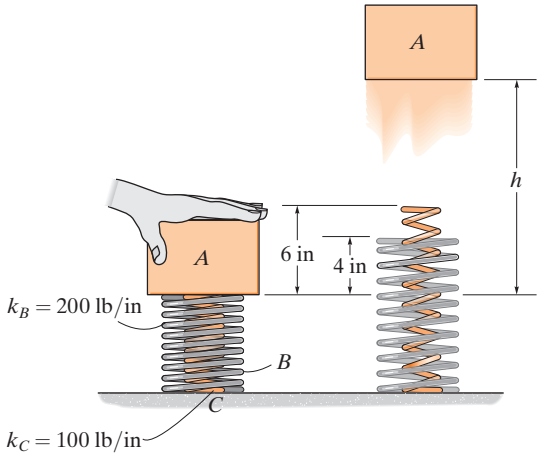
PROBLEMAS

14-66. La niña tiene una masa de 40 kg y su centro de masa en G. Si se columpia hasta una altura máxima definida por $\theta = 60°$, determine la fuerza desarrollada a lo largo de cada uno de los cuatro postes de soporte que sean iguales a AB, en el instante $\theta = 0°$. El movimiento del columpio está centrado entre los postes.



Prob. 14-66

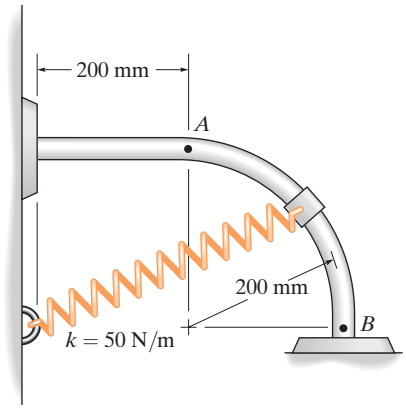
14-67. El bloque A de 30 lb se coloca en la parte superior de dos resortes concéntricos B y C, y después se empuja hacia abajo hasta la posición indicada. Si el bloque se libera en ese instante, determine la altura máxima h a la que se elevará.



Prob. 14-67

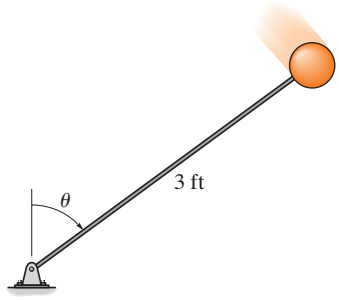
***14-68.** El collarín de 5 kg tiene una velocidad de 5 m/s hacia la derecha cuando está en A. En seguida, se desplaza hacia abajo a lo largo de la guía lisa. Determine la rapidez del collarín cuando llega al punto B, que se localiza justo antes del final de la porción curva de la varilla. El resorte tiene una longitud sin estirar de 100 mm y B se ubica justo antes del extremo de la porción curva de la varilla.

14-69. El collarín de 5 kg tiene una velocidad de 5 m/s hacia la derecha cuando está en A. En seguida, se desplaza a lo largo de la guía lisa. Determine su rapidez cuando su centro llega al punto B y la fuerza normal que ejerce sobre la varilla en este punto. El resorte tiene una longitud sin estirar de 100 mm y B está situado justo antes del final de la porción curva de la varilla.



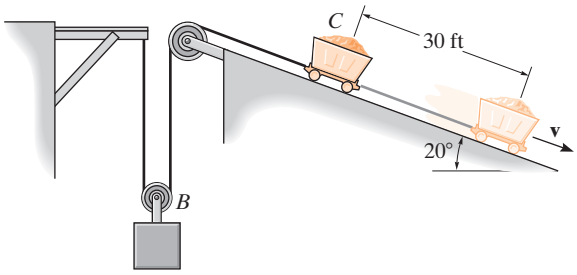
Probs. 14-68/69

14-70. La bola tiene un peso de 15 lb y se fija a una varilla con masa despreciable. Si se libera desde el reposo cuando $\theta = 0°$, determine el ángulo θ en el que la fuerza de compresión sobre la varilla se convierte en cero.



Prob. 14-70

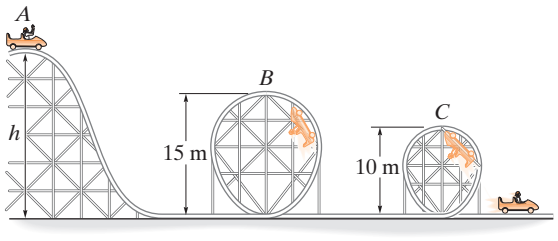
14-71. El carro C y su contenido tienen un peso de 600 lb, mientras que el bloque B tiene un peso de 200 lb. Si el carro se libera del reposo, determine su rapidez después de desplazarse 30 ft hacia abajo sobre el plano inclinado a 20°. *Sugerencia:* Para medir la energía potencial gravitacional, establezca diferentes planos de referencia en las elevaciones iniciales de B y C.



Prob. 14-71

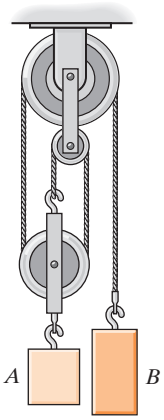
***14-72.** La masa del carro de la montaña rusa, incluido su pasajero, es de 700 kg. Si comienza a moverse desde la cima de la cuesta A con una rapidez $v_A = 3$ m/s, determine la altura mínima h de la cima, de modo que el carro complete los dos rizos sin que pierda el contacto con la vía. Ignore la fricción, la masa de las ruedas y el tamaño del carro. ¿Cuál es la reacción normal sobre el carro cuando éste se encuentra en B y cuando está en C? Considere que $\rho_B = 7.5$ m y $\rho_C = 5$ m.

14-73. La masa del carro de la montaña rusa, incluido su pasajero, es de 700 kg. Si arranca del reposo en la cima de la cuesta A, determine la altura mínima h de la cima, de modo que el carro complete los dos rizos sin que pierda el contacto con la vía. Ignore la fricción, la masa de las ruedas y el tamaño del carro. ¿Cuál es la reacción normal en el carro cuando éste se encuentra en B y cuando está en C? Considere que $\rho_B = 7.5$ m y $\rho_C = 5$ m.



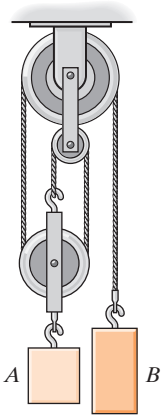
Probs. 14-72/73

14-74. El ensamble consta de dos bloques A y B que tienen masas de 20 kg y 30 kg, respectivamente. Determine la rapidez de cada bloque cuando B desciende 1.5 m. Los bloques se liberan del reposo. Desprecie la masa de las poleas y las cuerdas.



Prob. 14-74

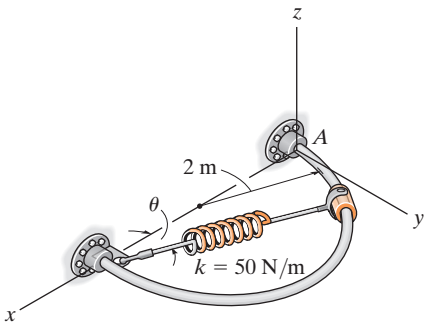
14-75. El ensamble consta de dos bloques A y B que tienen masas de 20 kg y 30 kg, respectivamente. Determine la distancia que debe descender B para que A alcance una rapidez de 3 m/s a partir del reposo.



Prob. 14-75

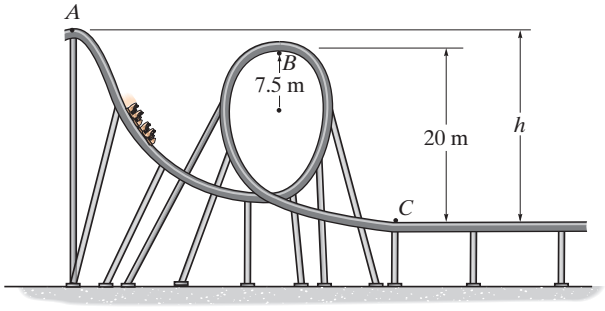
14

***14-76.** El resorte tiene una rigidez $k = 50$ N/m y una longitud sin estirar de 0.3 m. Si está unido al collarín liso de 2 kg y éste se libera del reposo en A ($\theta = 0°$), determine la rapidez del collarín cuando $\theta = 60°$. El movimiento ocurre en el plano horizontal. Desprecie el tamaño del collarín.



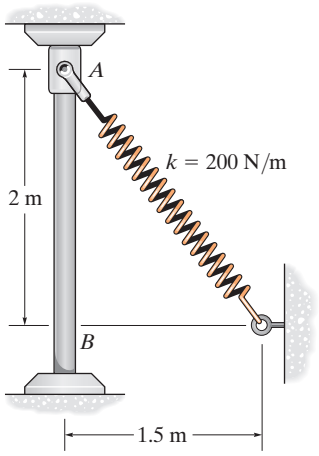
Prob. 14-76

14-77. El carro de la montaña rusa tiene una masa m y se libera del reposo en el punto A. Si la pista debe diseñarse para que el carro no se despegue de la vía en B, determine la altura h requerida. Además, encuentre la rapidez del carro cuando llega al punto C. Desprecie la fricción.



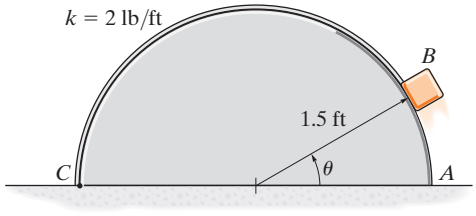
Prob. 14-77

14-78. El resorte tiene una rigidez $k = 200$ N/m y una longitud sin estirar de 0.5 m. Si está unido al collarín liso de 3 kg y éste se libera del reposo en A, determine la rapidez del collarín cuando llega a B. Desprecie el tamaño del collarín.



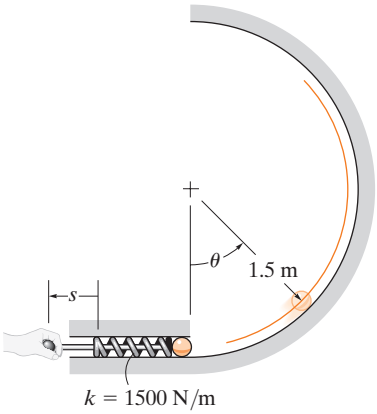
Prob. 14-78

14-79. Un bloque de 2 lb descansa sobre la superficie semicilíndrica lisa en A. Una cuerda elástica con rigidez $k = 2$ lb/ft está unida al bloque en B y a la base del semicilindro en C. Si el bloque se libera del reposo en $\theta = 0°$, A, determine la mayor longitud sin estirar de la cuerda, tal que el bloque comience a despegarse del semicilindro en el instante $\theta = 45°$. Desprecie el tamaño del bloque.



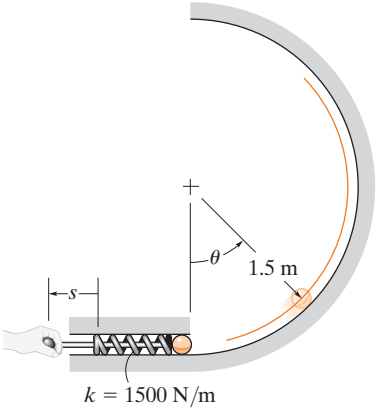
Prob. 14-79

***14-80.** Cuando $s = 0$, el resorte del mecanismo de disparo no está estirado. Si el brazo se jala de modo que $s = 100$ mm y luego se suelta, determine la rapidez de la bola de 0.3 kg y la reacción normal de la pista circular sobre la bola cuando $\theta = 60°$. Suponga que todas las superficies de contacto son lisas. Desprecie la masa del resorte y el tamaño de la bola.



Prob. 14-80

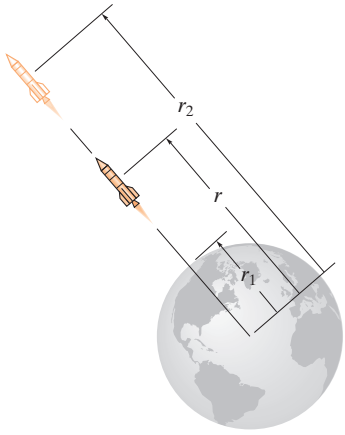
14-81. Cuando $s = 0$, el resorte del mecanismo de disparo no está estirado. Si el brazo se jala de modo que $s = 100$ mm y luego se suelta, determine el ángulo máximo θ que se desplazará la bola sin salir de la pista circular. Suponga que todas las superficies de contacto son lisas. Desprecie la masa del resorte y el tamaño de la bola.



Prob. 14-81

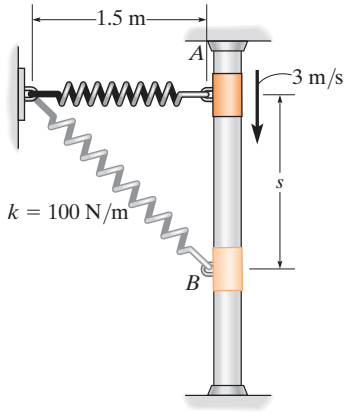
14-82. Si la masa de la tierra es M_e, demuestre que la energía potencial gravitacional de un cuerpo de masa m situado a una distancia r del centro de la Tierra es $V_g = -GM_em/r$. Recuerde que la fuerza gravitacional que actúa entre la Tierra y el cuerpo es $F = G(M_em/r^2)$, ecuación 13-1. Para el cálculo, localice el plano de referencia en $r \rightarrow \infty$. Asimismo, demuestre que F es una fuerza conservativa.

14-83. Se lanza verticalmente un cohete de masa m desde la superficie terrestre, es decir, en $r = r_1$. Suponiendo que el cohete no pierde masa al ascender, determine el trabajo que debe realizar contra la gravedad para alcanzar una distancia r_2. La fuerza gravitacional es $F = GM_em/r^2$ (ecuación 13-1), donde M_e es la masa terrestre y r la distancia entre el cohete y el centro de la Tierra.



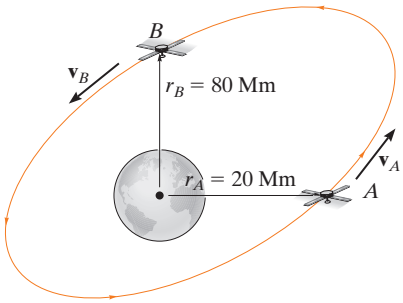
Probs. 14-82/83

***14-84.** El collarín liso de 4 kg tiene una rapidez de 3 m/s cuando está en $s = 0$. Determine la distancia máxima s que viaja antes de detenerse momentáneamente. El resorte tiene una longitud sin estirar de 1 m.



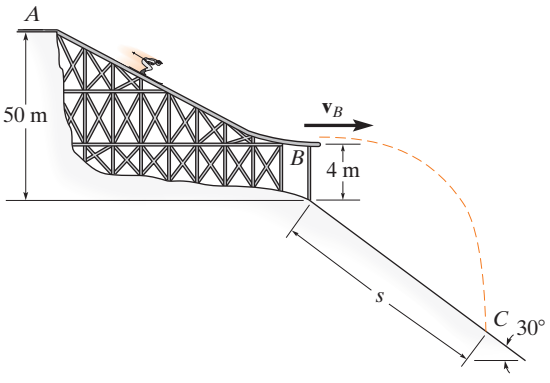
Prob. 14-84

14-85. Un satélite de 60 kg vuela libremente a lo largo de una órbita elíptica de modo que en A, donde $r_A = 20$ Mm, su rapidez es $v_A = 40$ Mm/h. ¿Cuál es la rapidez del satélite cuando llega al punto B, donde $r_B = 80$ Mm? *Sugerencia*: Vea el problema 14-82, donde $M_e = 5.976(10^{24})$ kg y $G = 66.73(10^{-12})\ \text{m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$.



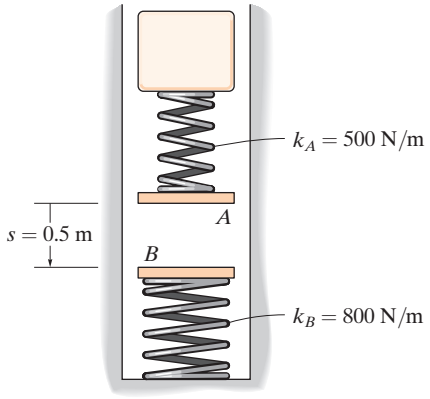
Prob. 14-85

14-86. El esquiador parte del reposo en A y desciende por la rampa. Si la fricción y la resistencia del aire pueden despreciarse, determine su rapidez v_B cuando llega a B. Además, determine la distancia s donde hace contacto con el suelo en C, si salta cuando se desplaza horizontalmente en B. Ignore el tamaño del esquiador. Su masa es de 70 kg.



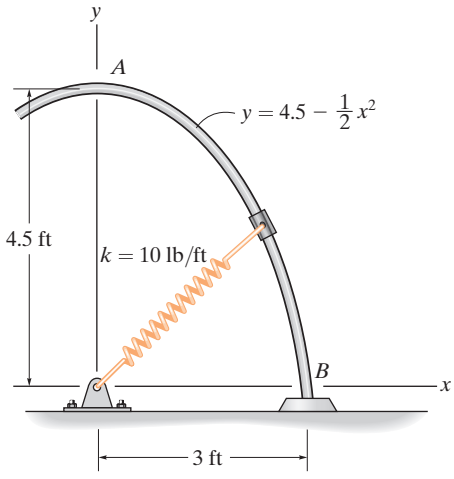
Prob. 14-86

14-87. El bloque tiene una masa de 20 kg y se libera desde el reposo cuando $s = 0.5$ m. Si las masas de los parachoques A y B son despreciables, determine la deformación máxima de cada resorte debido a la colisión.



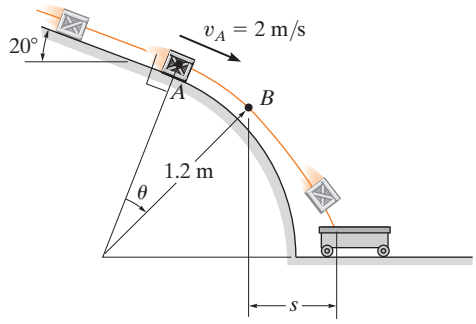
Prob. 14-87

***14-88.** El collarín de 2 lb tiene una rapidez de 5 ft/s en A. El resorte al que está unido tiene una longitud sin estirar de 2 ft y una rigidez de $k = 10$ lb/ft. Si el collarín se mueve sobre la varilla lisa, determine su rapidez cuando llega al punto B, la fuerza normal de la varilla sobre el collarín y la razón a la que disminuye su rapidez.



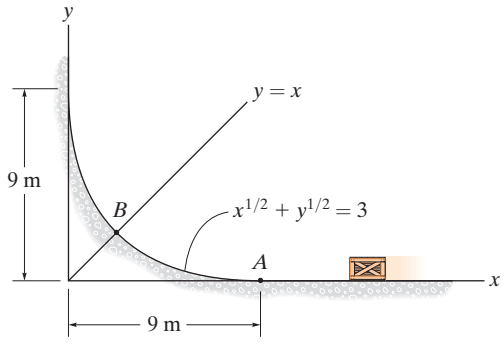
Prob. 14-88

14-89. Cuando la caja de 6 kg alcanza el punto A tiene una rapidez de $v_A = 2$ m/s. Determine el ángulo θ al que sale de la rampa circular lisa y la distancia s a la que cae en el carro. Desprecie la fricción.



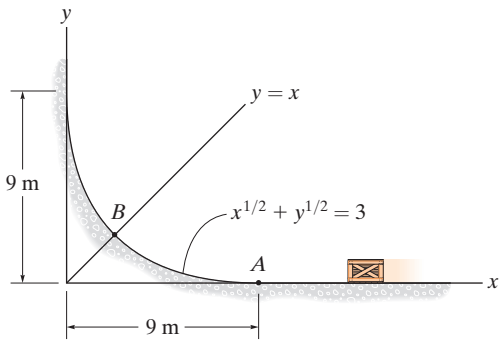
Prob. 14-89

14-90. Cuando la caja de 5 kg alcanza el punto A tiene una rapidez $v_A = 10$ m/s. Determine la fuerza normal que la caja ejerce sobre la superficie cuando llega al punto B. Desprecie la fricción y el tamaño de la caja.



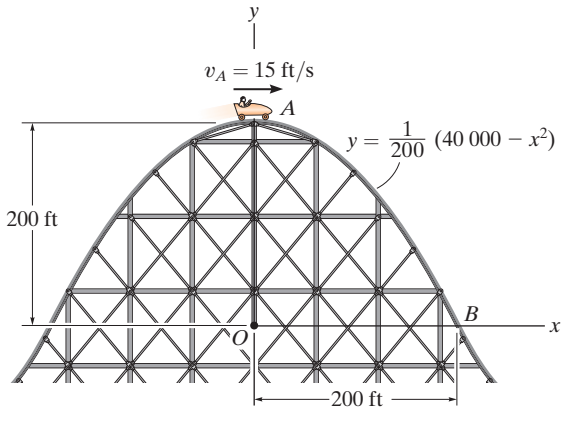
Prob. 14-90

14-91. Cuando la caja de 5 kg alcanza el punto A tiene una rapidez $v_A = 10$ m/s. Determine qué tan alto llega la caja sobre la superficie antes de detenerse. Además, ¿cuál es la fuerza normal resultante en la superficie y la aceleración en este punto? Desprecie la fricción y el tamaño de la caja.



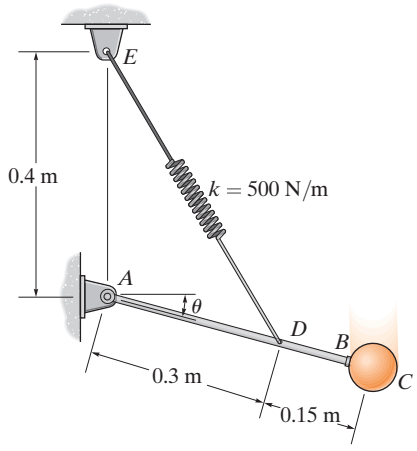
Prob. 14-91

***14-92.** El carro de la montaña rusa tiene una rapidez de 15 ft/s cuando está en la cresta de una pista parabólica vertical. Determine la velocidad del carro y la fuerza normal que ejerce sobre la pista cuando alcanza el punto B. Desprecie la fricción y la masa de las ruedas. El peso total del vehículo y de los pasajeros es de 350 lb.



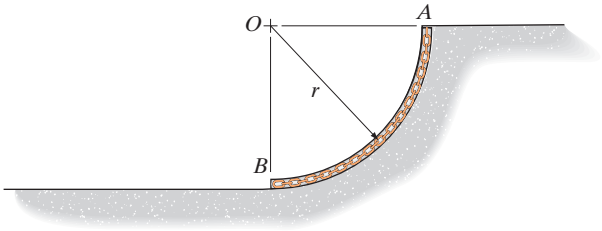
Prob. 14-92

14-93. La esfera C de 10 kg se libera del reposo cuando $\theta = 0°$ y la tensión en el resorte es 100 N. Determine la rapidez de la esfera en el instante $\theta = 90°$. Desprecie la masa de la varilla AB y el tamaño de la esfera.



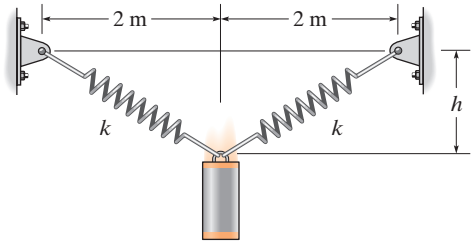
Prob. 14-93

14-94. Un tubo AB de un cuarto de círculo con radio medio r contiene una cadena lisa que tiene una masa por unidad de longitud m_0. Si la cadena se libera del reposo desde la posición indicada, determine su rapidez cuando sale completamente del tubo.



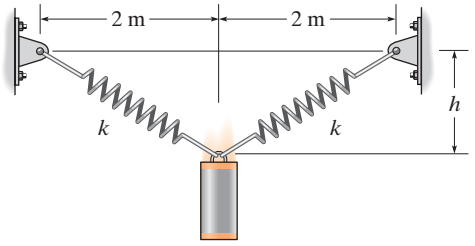
Prob. 14-94

14-95. El cilindro tiene una masa de 20 kg y se libera del reposo cuando $h = 0$. Determine su rapidez cuando $h = 3$ m. Cada resorte tiene una rigidez $k = 40$ N/m y una longitud sin estirar de 2 m.



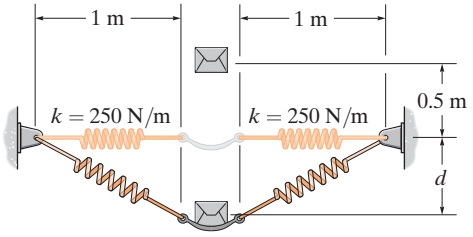
Prob. 14-95

***14-96.** Si el cilindro de 20 kg se libera del reposo en $h = 0$, determine la rigidez k de cada resorte requerida para que su movimiento se detenga cuando $h = 0.5$ m. Cada resorte tiene una longitud sin estirar de 1 m.



Prob. 14-96

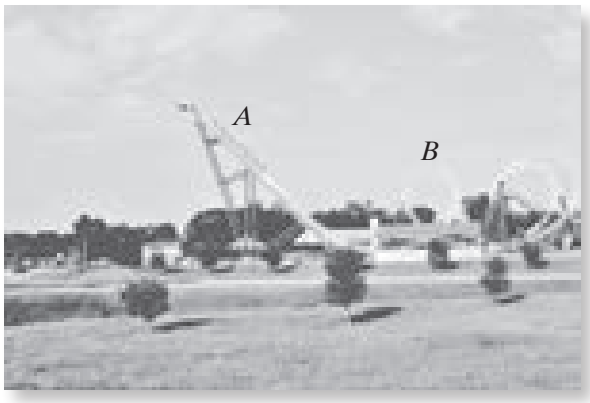
14-97. Una bandeja de masa despreciable está unida a dos resortes idénticos de rigidez $k = 250$ N/m. Si una caja de 10 kg se deja caer desde una altura de 0.5 m por encima de la bandeja, determine el máximo desplazamiento vertical d. En un inicio, cada resorte tiene una tensión de 50 N.



Prob. 14-97

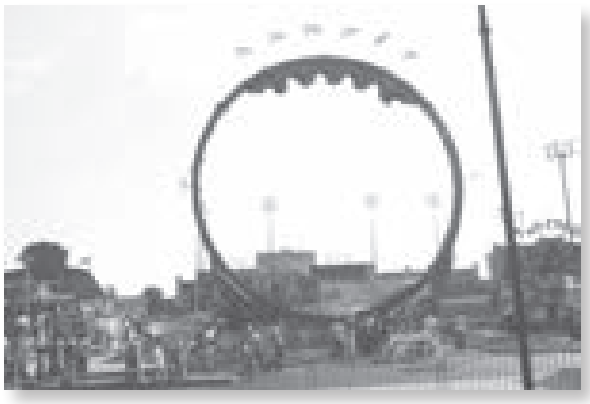
PROBLEMAS CONCEPTUALES

C14-1. Los carros de la montaña rusa se detienen momentáneamente en *A*. Determine la fuerza normal aproximada que ejercen en la vía en *B*. También determine su aceleración aproximada en este punto. Use datos numéricos y tome medidas a escala en la fotografía con una altura conocida en *A*.



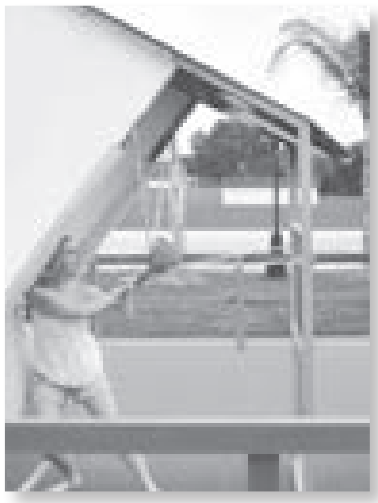
Prob. C14-1 (© R. C. Hibbeler)

C14-2. A medida que gira la rueda grande, el operador puede aplicar un mecanismo de frenado que fija los carros en la rueda, lo cual permite entonces que éstos giren junto con la rueda. Suponga que los pasajeros no tienen puesto el cinturón de seguridad y determine la rapidez mínima de la rueda (carros), de modo que ningún pasajero se caiga. ¿Cuándo deberá el operador soltar el freno para que los carros alcancen su velocidad máxima al girar libremente en la rueda? Estime la fuerza normal máxima que el asiento ejerce en el pasajero cuando se alcanza esta velocidad. Use valores numéricos para explicar su respuesta.



Prob. C14-2 (© R. C. Hibbeler)

C14-3. La mujer jala hacia atrás el lanzador de globos llenos de agua, por lo que se estiran las cuatro cuerdas elásticas. Estime la altura máxima y la distancia máxima que alcanza una bola colocada dentro del recipiente, si se lanza desde la posición mostrada. Use valores numéricos y cualquier medida que sea necesaria desde la fotografía. Suponga que se conocen la longitud sin estirar y la rigidez de cada cuerda.



Prob. C14-3 (© R. C. Hibbeler)

C14-4. La niña está momentáneamente en reposo en la posición mostrada. Si se conocen la longitud sin estirar y rigidez de cada una de las dos cuerdas elásticas, determine aproximadamente qué distancia baja la niña antes de que vuelva a estar en reposo de forma momentánea. Use valores numéricos y tome cualquier medida que sea necesaria a partir de la fotografía.

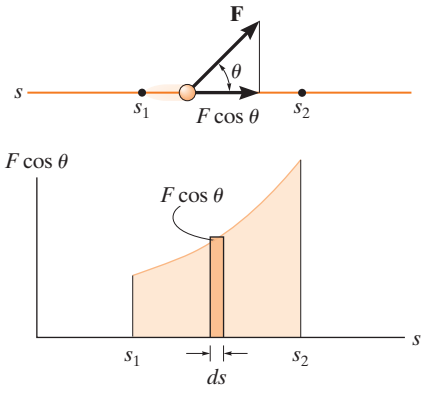
Prob. C14-4 (© R. C. Hibbeler)

REPASO DEL CAPÍTULO

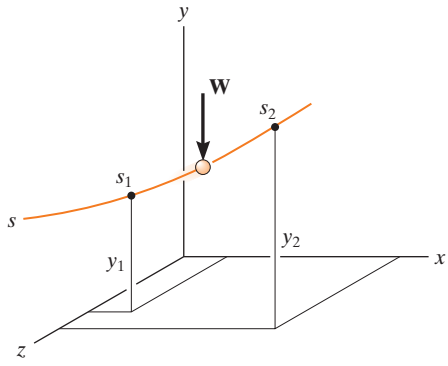
Trabajo de una fuerza

Una fuerza realiza trabajo cuando se produce un desplazamiento a lo largo de su línea de acción. Si la fuerza varía con el desplazamiento, entonces el trabajo es $U = \int F \cos\theta \, ds$.

Gráficamente, ésta representa el área bajo el diagrama F-s.

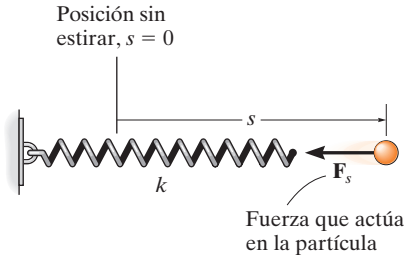


Si la fuerza es constante, entonces para un desplazamiento Δs en la dirección de la fuerza $U = F_C \, \Delta s$. Un ejemplo típico de este caso es el trabajo de un peso, $U = -W\Delta y$. Aquí, Δy es el desplazamiento vertical.



El trabajo realizado por la fuerza de un resorte, $F = ks$, depende del alargamiento o la compresión s del resorte.

$$U = -\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right)$$



Principio de trabajo y energía

Si la ecuación de movimiento en la dirección tangencial, $\Sigma F_t = ma_t$ se combina con la ecuación cinemática, $a_t \, ds = v \, dv$, obtenemos el principio de trabajo y energía. Esta ecuación establece que la energía cinética inicial T, más el trabajo realizado $\sum U_{1\text{-}2}$ es igual a la energía cinética final.

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{–}2} = T_2$$

El principio de trabajo y energía es útil para resolver problemas que involucran fuerza, velocidad y desplazamiento. Para su aplicación, debe dibujarse el diagrama de cuerpo libre de la partícula e identificar las fuerzas que realizan trabajo.

Potencia y eficiencia

Potencia es la cantidad de trabajo realizada por unidad de tiempo. Para su aplicación, deben especificarse la fuerza **F** que crea la potencia y su velocidad **v**.

La eficiencia representa la razón entre la potencia de salida y la potencia de entrada y, debido a las fuerza de fricción, siempre es menor que uno.

$$P = \frac{dU}{dt}$$

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

$$\varepsilon = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}}$$

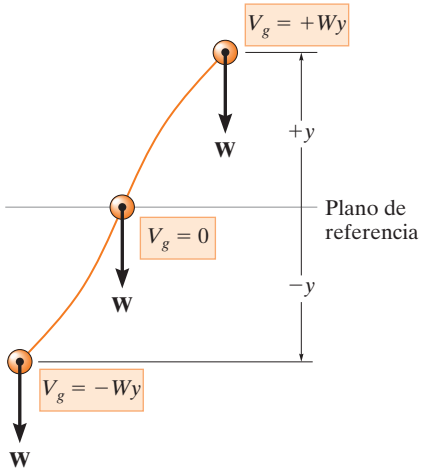
Conservación de la energía

Una fuerza conservativa realiza trabajo que es independiente de su trayectoria. Dos ejemplos son el peso de una partícula y la fuerza de un resorte.

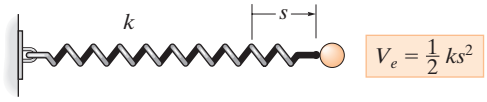
La fricción es una fuerza no conservativa, ya que el trabajo depende de la longitud de la trayectoria. Cuanto más larga sea la trayectoria, más trabajo se realizará.

El trabajo realizado por una fuerza conservativa depende de su posición con respecto a un plano de referencia. Cuando este trabajo se refiere a un plano de referencia, se llama energía potencial. Para un peso es $V_g = \pm Wy$ y para un resorte es $V_e = +\frac{1}{2}ks^2$.

La energía mecánica se compone de la energía cinética T y las energías potenciales gravitacional y elástica V. De acuerdo con la conservación de la energía, esta suma es constante y tiene el mismo valor en cualquier posición de la trayectoria. Si sólo fuerzas gravitacionales y de resortes provocan el movimiento de la partícula, entonces puede usarse la ecuación de la conservación de la energía para resolver problemas que involucran estas fuerzas conservativas, desplazamiento y velocidad.



Energía potencial gravitacional

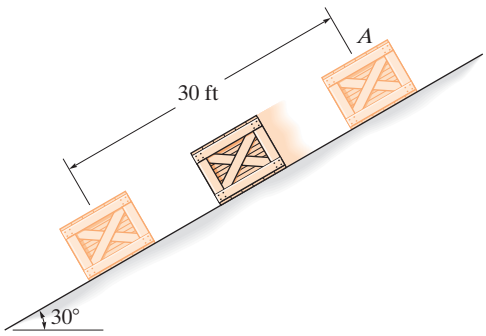


Energía potencial elástica

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

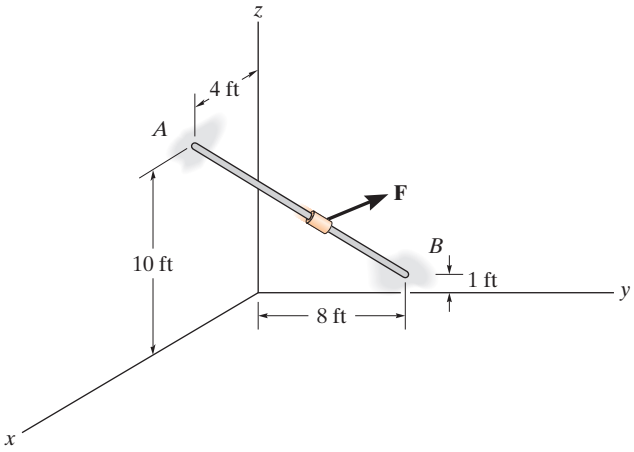
PROBLEMAS DE REPASO

R14-1. Si el embalaje de 150 lb se libera del reposo en A, determine su rapidez después de que se desliza 30 ft hacia abajo sobre el plano. El coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el plano es $\mu_k = 0.3$.



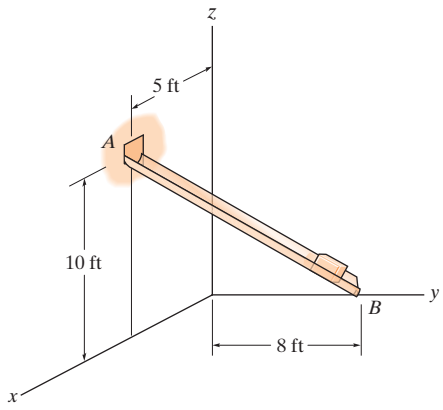
Prob. R14-1

R14-2. El collarín pequeño de 2 lb parte del reposo en A y se desliza hacia abajo a lo largo de la varilla lisa. Durante el movimiento, actúa sobre el collarín una fuerza $\mathbf{F} = \{10\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}\}$ lb, donde x, y, z están en pies. Determine la rapidez del collarín cuando golpea la pared en B.



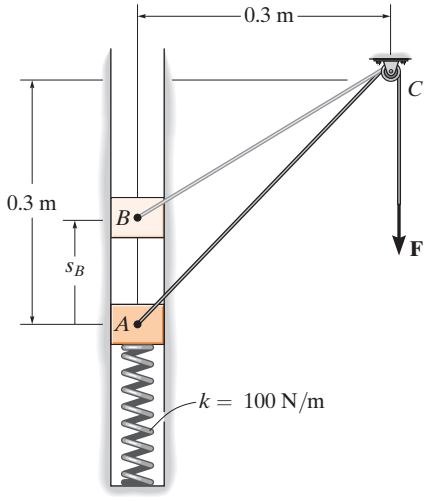
Prob. R14-2

R14-3. El bloque tiene un peso de 1.5 lb y se desliza a lo largo del conducto liso AB. Se libera del reposo en A, que tiene coordenadas de $A(5\text{ ft}, 0, 10\text{ ft})$. Determine la rapidez a la que se desliza en B, que tiene coordenadas de $B(0, 8\text{ ft}, 0)$.



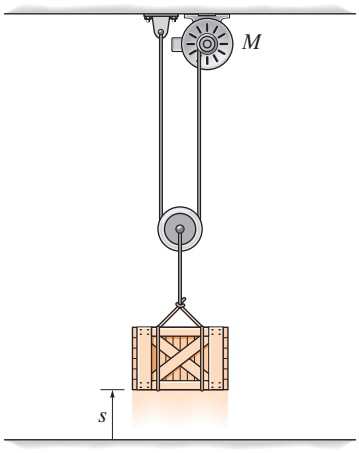
Prob. R14-3

R14-4. El bloque tiene una masa de 0.5 kg y se mueve dentro de la ranura vertical lisa. Si el bloque parte del reposo cuando el resorte al que está unido se ubica en la posición sin estirar en A, determine la fuerza vertical *constante* F que debe aplicarse a la cuerda, de modo que el bloque alcance una rapidez $v_B = 2.5$ m/s cuando llegue a B; $s_B = 0.15$ m. Desprecie la masa de la cuerda y la polea.



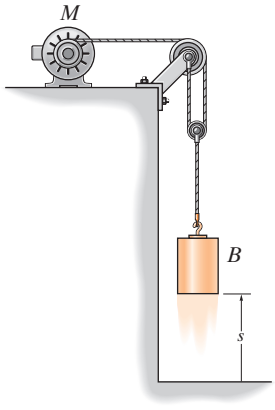
Prob. R14-4

R14-5. La caja, que tiene un peso de 50 lb, se eleva mediante el sistema de polea y motor M. Si la caja parte del reposo y, por aceleración constante, alcanza una rapidez de 12 ft/s después de elevarse 10 ft, determine la potencia que debe suministrarse al motor en el instante $s = 10$ ft. El motor tiene una eficiencia $\varepsilon = 0.74$.



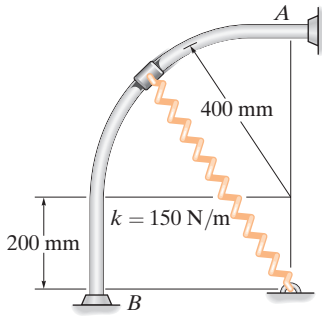
Prob. R14-5

R14-6. La carga de 50 lb se eleva mediante el sistema de polea y motor M. Si el motor ejerce una fuerza constante de 30 lb sobre el cable, determine la potencia que debe suministrarse al motor, si la carga se ha elevado $s = 10$ ft partiendo del reposo. El motor tiene una eficiencia de $\varepsilon = 0.76$.



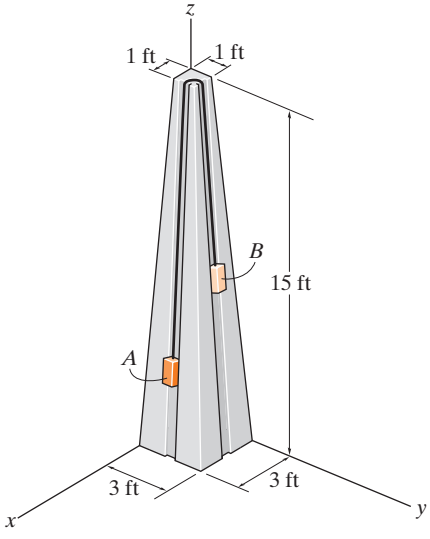
Prob. R14-6

R14-7. El collarín de tamaño despreciable tiene una masa de 0.25 kg y está unido a un resorte que tiene una longitud sin estirar de 100 mm. Si el collarín se libera del reposo en A y se desplaza a lo largo de la guía lisa, determine su rapidez justo antes de que golpee B.



Prob. R14-7

R14-8. Los bloques A y B pesan 10 y 30 lb, respectivamente. Están conectados entre sí mediante una cuerda ligera y están montados en las ranuras sin fricción. Determine la rapidez de cada bloque después de que el bloque A se mueve hacia arriba 6 ft a lo largo del plano. Los bloques se liberan desde el reposo.



Prob. R14-8

Capítulo 15

(© David J. Green/Alamy)

El diseño de los carritos chocones utilizados en este parque de diversiones requiere el conocimiento de los principios del impulso y la cantidad de movimiento.

Cinética de una partícula: impulso y cantidad de movimiento

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Desarrollar el principio del impulso y la cantidad de movimiento lineales para una partícula, y aplicarlo para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo.
- Estudiar la conservación de la cantidad de movimiento lineal para partículas.
- Analizar la mecánica del impacto.
- Presentar el concepto de impulso y cantidad de movimiento angulares.
- Resolver problemas que implican corrientes de fluidos constantes y propulsión con masa variable.

15.1 Principio de impulso y cantidad de movimiento lineales

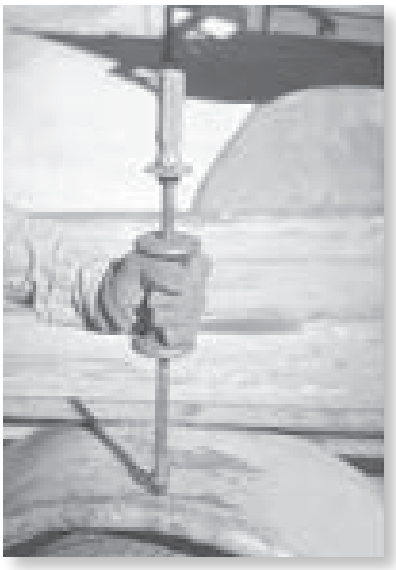
En esta sección integraremos la ecuación de movimiento con respecto al tiempo para obtener el principio de impulso y cantidad de movimiento. La ecuación resultante es útil para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo.

Con cinemática, la ecuación de movimiento para una partícula de masa m puede escribirse como

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{15-1}$$

donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{v}$ se miden a partir de un marco de referencia inercial. Al reordenar los términos, e integrarlos entre los límites $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ cuando $t = t_1$ y $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$ cuando $t = t_2$, tenemos

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt = m\int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} d\mathbf{v}$$



La herramienta de impulso se utiliza para reparar la abolladura del guardafangos. Para ello, primero se inserta su extremo en un orificio perforado en el guardafangos, luego se sujeta la herramienta y se mueve a tirones hacia arriba, hasta que se detiene con el anillo de retención. El impulso desarrollado se transfiere a lo largo de la herramienta y de repente saca la abolladura. (© R. C. Hibbeler)

o bien,

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 \tag{15-2}$$

Esta ecuación se conoce como *principio de impulso y cantidad de movimiento lineales*. Por la derivación se observa que es simplemente una integración con respecto al tiempo de la ecuación de movimiento. Ofrece un *medio directo* de obtener la velocidad final $\mathbf{v}_2$ de la partícula, después de un lapso de tiempo especificado, cuando se conoce la velocidad inicial de la partícula y las fuerzas que actúan en ella son constantes o pueden expresarse en función del tiempo. Por comparación, si $\mathbf{v}_2$ se determinara usando la ecuación de movimiento, se requeriría un proceso de dos pasos; es decir, aplicar $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para obtener $\mathbf{a}$ y, luego, integrar $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ para obtener $\mathbf{v}_2$.

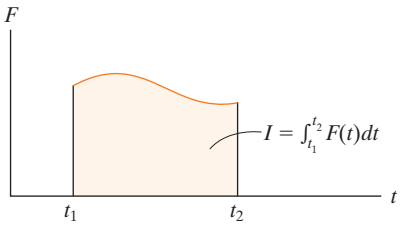
Cantidad de movimiento lineal. Cada uno de los dos vectores de la forma $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$ en la ecuación 15-2 se conoce como la cantidad de movimiento lineal de la partícula. Como m es un escalar positivo, el vector de cantidad de movimiento lineal tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$, y su magnitud mv tiene unidades de masa por velocidad, como kg · m/s o slug · ft/s.

Impulso lineal. La integral $\mathbf{I} = \int \mathbf{F}\,dt$ en la ecuación 15-2 se conoce como *impulso lineal*. El término es una cantidad vectorial que mide el efecto de una fuerza durante el tiempo en que ésta actúa. Como el tiempo es un escalar positivo, el impulso actúa en la misma dirección que la fuerza, y su magnitud tiene unidades de fuerza por tiempo, como N · s o lb · s*.

Si la fuerza se expresa como una función del tiempo, el impulso se determina mediante la evaluación directa de la integral. En particular, si la fuerza es constante en cuanto a magnitud y dirección, el impulso resultante es

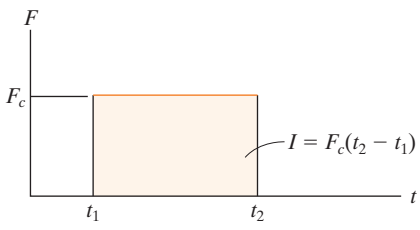
$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_c\,dt = \mathbf{F}_c(t_2 - t_1)$$

Gráficamente, el área sombreada bajo la curva de fuerza *versus* tiempo representa la magnitud del impulso (fig. 15-1). Una fuerza constante crea el área rectangular sombreada que aparece en la figura 15-2.



Fuerza variable

Fig. 15-1



Fuerza constante

Fig. 15-2

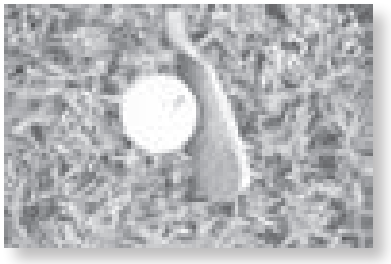
*Aunque las unidades de impulso y cantidad de movimiento se definen de forma diferente, puede demostrarse que la ecuación 15-2 es dimensionalmente homogénea.

Principio de impulso y cantidad de movimiento lineales. Para solucionar problemas, la ecuación 15-2 se reescribirá como

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2 \tag{15-3}$$

la cual expresa que la cantidad de movimiento inicial de la partícula en el instante t_1 más la suma de todos los impulsos aplicados a la partícula de t_1 a t_2 equivale a la cantidad de movimiento final de la partícula en el instante t_2. Los tres términos se ilustran gráficamente en los *diagramas de impulso y cantidad de movimiento* en la figura 15-3. Los dos *diagramas de cantidad de movimiento* son sólo las formas delineadas de la partícula, las cuales indican la dirección y la magnitud de las cantidades de movimiento inicial y final de la partícula, $m\mathbf{v}_1$ y $m\mathbf{v}_2$. Al igual que el diagrama de cuerpo libre, el *diagrama de impulso* es una forma delineada de la partícula que muestra todos los impulsos que actúan en ella cuando se encuentra en algún punto intermedio a lo largo de su trayectoria.

Si cada uno de los vectores en la figura 15-3 se divide en sus componentes x, y, z, podemos escribir las siguientes tres ecuaciones escalares de impulso y cantidad de movimiento lineales.



El estudio de muchos tipos de deportes, como el golf, requiere la aplicación del principio del impulso y de la cantidad de movimiento lineales. (© R. C. Hibbeler)

$$\begin{aligned} m(v_x)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt &= m(v_x)_2 \\ m(v_y)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt &= m(v_y)_2 \\ m(v_z)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_z\, dt &= m(v_z)_2 \end{aligned} \tag{15-4}$$

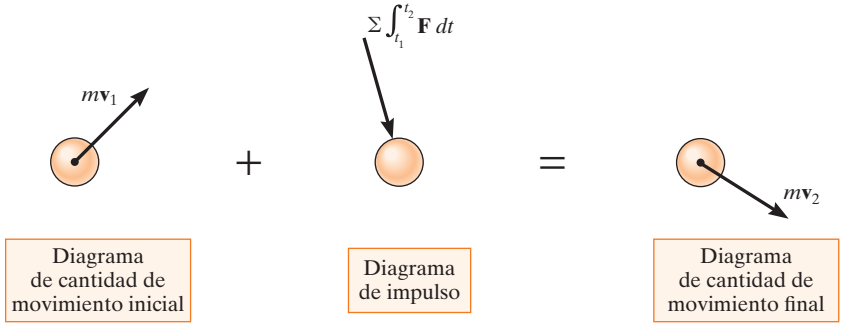


Fig. 15-3

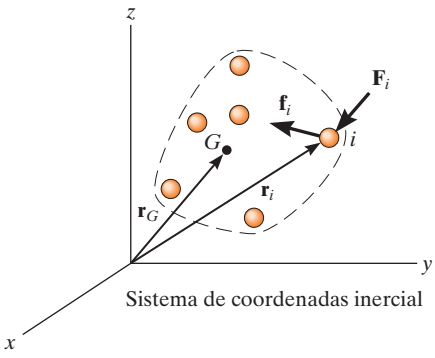


Fig. 15-4

15.2 Principio de impulso y cantidad de movimiento lineales para un sistema de partículas

El principio de impulso y cantidad de movimiento lineales para un sistema de partículas que se mueven con respecto a una referencia inercial (fig. 15-4), se obtiene con la ecuación de movimiento aplicada a todas las partículas del sistema, es decir,

$$\Sigma \mathbf{F}_i = \Sigma m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \tag{15-5}$$

El término del lado izquierdo representa tan sólo la suma de las *fuerzas externas* que actúan en las partículas. Recuerde que las fuerzas internas $\mathbf{f}_i$ que actúan entre las partículas no aparecen con esta suma, ya que, de acuerdo con la tercera ley de Newton, ocurren en pares colineales iguales pero opuestos y, por ende, se cancelan. Al multiplicar ambos lados de la ecuación 15-5 por dt e integrar entre los límites $t = t_1$, $\mathbf{v}_i = (\mathbf{v}_i)_1$ y $t = t_2$, $\mathbf{v}_i = (\mathbf{v}_i)_2$ se obtiene

$$\Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i\, dt = \Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_2 \tag{15-6}$$

Esta ecuación establece que la cantidad de movimiento lineal inicial del sistema más los impulsos de todas las *fuerzas externas* que actúan en el sistema de t_1 a t_2 son iguales a la cantidad de movimiento lineal final del sistema.

Como la ubicación del centro de masa G del sistema se determina a partir de $m\mathbf{r}_G = \sum m_i \mathbf{r}_i$, donde $m = \sum m_i$ es la masa total de todas las partículas (fig. 15-4), y si luego se considera la derivada con respecto al tiempo, tenemos

$$m\mathbf{v}_G = \Sigma m_i \mathbf{v}_i$$

la cual establece que la cantidad de movimiento lineal total del sistema de partículas equivale a la cantidad de movimiento lineal de una partícula aglomerada "ficticia" de masa $m = \sum m_i$ que se mueve a la velocidad del centro de masa del sistema. Al sustituir en la ecuación 15-6 se obtiene

$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i\, dt = m(\mathbf{v}_G)_2 \tag{15-7}$$

Aquí, la cantidad de movimiento lineal inicial de la partícula aglomerada, más los impulsos externos que actúan en el sistema de partículas de t_1 a t_2, es igual a la cantidad de movimiento lineal final de la partícula aglomerada. Por consiguiente, la ecuación anterior justifica la aplicación del principio de impulso y cantidad de movimiento lineales a un sistema de partículas que componen un cuerpo rígido.

Procedimiento para el análisis

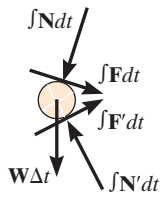
El principio de impulso y cantidad de movimiento lineales se utiliza para resolver problemas que implican *fuerza*, *tiempo* y *velocidad*, pues estos términos intervienen en la formulación. Para su aplicación se sugiere el siguiente procedimiento.*

Diagrama de cuerpo libre

- Establezca el marco de referencia inercial x, y, z y trace el diagrama de cuerpo libre de la partícula, que incluya todas las fuerzas que producen impulsos en la partícula.
- Deberá establecer la dirección y el sentido de las velocidades inicial y final de la partícula.
- Si se desconoce un vector, suponga que el sentido de sus componentes está en la dirección de la(s) coordenada(s) inercial(es) positiva(s).
- Como un procedimiento alternativo, trace los diagramas de impulso y cantidad de movimiento de la partícula como se planteó en la referencia a la figura 15-3.

Principio de impulso y cantidad de movimiento

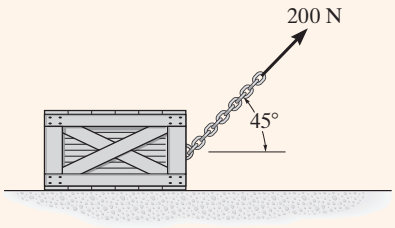
- De acuerdo con el sistema de coordenadas establecido, aplique el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales, $m\mathbf{v}_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2$. Si el movimiento ocurre en el plano x-y, las dos ecuaciones de componentes escalares pueden formularse ya sea al encontrar las componentes vectoriales de $\mathbf{F}$ en el diagrama de cuerpo libre, o al utilizar los datos que aparecen en los diagramas de impulso y cantidad de movimiento.
- Tenga en cuenta que todas las fuerzas que actúan en el diagrama de cuerpo libre de la partícula crearán un impulso, aun cuando algunas de estas fuerzas no trabajen.
- Las fuerzas que son funciones del tiempo se integran para obtener el impulso. Gráficamente, el impulso es igual al área bajo la curva de fuerza-tiempo.



A medida que giran las ruedas de la máquina de lanzar, aplican impulsos de fricción a la pelota y le imprimen una cantidad de movimiento lineal. Los impulsos se muestran en el diagrama de impulso. Aquí, tanto los impulsos de fricción como los normales varían con el tiempo. Por comparación, el impulso producido por el peso es constante y es muy pequeño, dado que es muy corto el tiempo Δt en que la pelota está en contacto con las ruedas. (© R. C. Hibbeler)

* Este procedimiento se seguirá cuando se desarrollen las comprobaciones y la teoría en el texto.

EJEMPLO 15.1



(a)

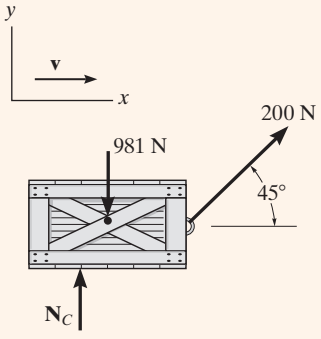
La caja de 100 kg que se muestra en la figura 15-5*a* está originalmente en reposo sobre la superficie horizontal lisa. Si se aplica una fuerza de remolque de 200 N, que actúa a un ángulo de 45°, durante 10 s, determine la velocidad final y la fuerza normal que la superficie ejerce en la caja durante este intervalo.

SOLUCIÓN

Este problema se resuelve mediante el principio de impulso y cantidad de movimiento, ya que implica fuerza, velocidad y tiempo.

Diagrama de cuerpo libre. Vea la figura 15-5*b*. Como todas las fuerzas que actúan son *constantes*, los impulsos son simplemente el producto de la magnitud de la fuerza por 10 s [$\mathbf{I} = \mathbf{F}_c(t_2 - t_1)$]. Observe el procedimiento alternativo de trazar los diagramas de impulso y cantidad de movimiento de la caja (fig. 15-5*c*).

Principio de impulso y cantidad de movimiento. Al aplicar las ecuaciones 15-4, se obtiene



(b)

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad m(v_x)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt = m(v_x)_2$$

$$0 + 200\ \text{N} \cos 45°(10\ \text{s}) = (100\ \text{kg})v_2$$

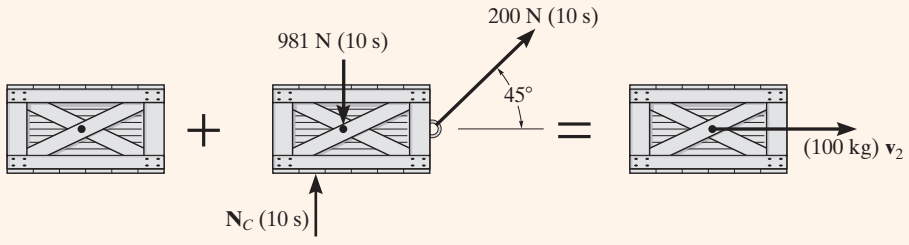
$$v_2 = 14.1\ \text{m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$(+\uparrow) \qquad m(v_y)_1 + \Sigma \int_{1} F_y\, dt = m(v_y)_2$$

$$0 + N_C(10\ \text{s}) - 981\ \text{N}(10\ \text{s}) + 200\ \text{N sen}\, 45°(10\ \text{s}) = 0$$

$$N_C = 840\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Como no ocurre movimiento en la dirección *y*, la aplicación directa de la ecuación de equilibrio $\Sigma F_y = 0$ da el mismo resultado para N_C. Trate de resolver el problema al aplicar primero $\Sigma F_x = ma_x$, entonces $v = v_0 + a_c t$.

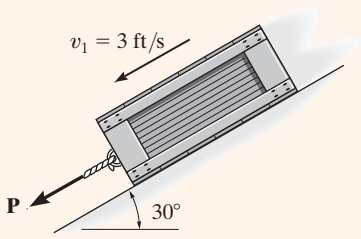


(c)

Fig. 15-5

EJEMPLO 15.2

En el embalaje de 50 lb de la figura 15-6*a* actúa una fuerza de magnitud variable $P = (20t)$ lb, donde t está en segundos. Determine la velocidad del embalaje 2 s después de que **P** se aplica. La velocidad inicial es $v_1 = 3$ ft/s hacia abajo del plano y el coeficiente de fricción cinética entre el embalaje y el plano es $\mu_k = 0.3$.



(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Vea la figura 15-6*b*. Como la magnitud de la fuerza $P = 20t$ varía con el tiempo, el impulso que crea se determina al integrarse a lo largo del intervalo de 2 s.

Principio de impulso y cantidad de movimiento. Al aplicar la ecuación 15-4 en la dirección x, tenemos

$$(+\swarrow) \qquad m(v_x)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt = m(v_x)_2$$

$$\frac{50 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}(3 \text{ ft/s}) + \int_0^{2 \text{ s}} 20t\, dt - 0.3N_C(2 \text{ s}) + (50 \text{ lb}) \operatorname{sen} 30°(2 \text{ s}) = \frac{50 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} v_2$$

$$4.658 + 40 - 0.6N_C + 50 = 1.553v_2$$

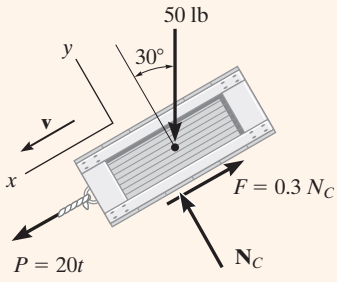
La ecuación de equilibrio puede aplicarse en la dirección y. ¿Por qué?

$$+\nwarrow \Sigma F_y = 0; \qquad N_C - 50 \cos 30° \text{ lb} = 0$$

Al resolver,

$$N_C = 43.30 \text{ lb}$$

$$v_2 = 44.2 \text{ ft/s} \swarrow \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Fig. 15-6

NOTA: También podemos resolver este problema con la ecuación de movimiento. A partir de la ecuación 15-6*b*,

$$+\swarrow \Sigma F_x = ma_x; \quad 20t - 0.3(43.30) + 50 \operatorname{sen} 30° = \frac{50}{32.2} a$$

$$a = 12.88t + 7.734$$

Con cinemática,

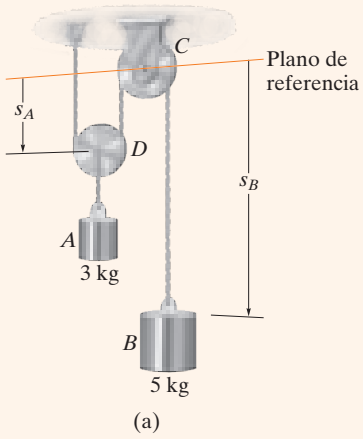
$$+\swarrow dv = a\, dt; \qquad \int_{3 \text{ ft/s}}^{v} dv = \int_0^{2\,s} (12.88t + 7.734) dt$$

$$v = 44.2 \text{ ft/s} \qquad \textit{Resp.}$$

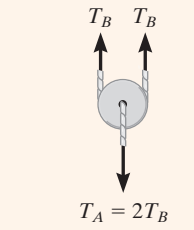
Por comparación, la aplicación del principio de impulso y cantidad de movimiento elimina la necesidad de utilizar cinemática ($a = dv/dt$) y, por lo tanto, el resultado es un método más fácil de solución.

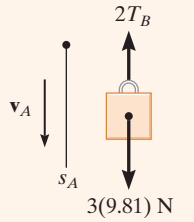
15

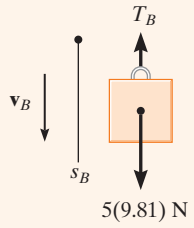
EJEMPLO 15.3



(a)







(b)

Fig. 15-7

Los bloques A y B de la figura 15-7*a* tienen una masa de 3 kg y 5 kg, respectivamente. Si se pone en movimiento el sistema a partir del reposo, determine la velocidad del bloque B en 6 s. Ignore la masa de las poleas y la cuerda.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Vea la figura 15-7*b*. Como el peso de cada bloque es constante, las tensiones en las cuerdas también lo serán. Asimismo, como se desprecia la masa de la polea D, la tensión en la cuerda $T_A = 2T_B$. Observe que se supone que los bloques se mueven hacia abajo en las direcciones de las coordenadas positivas s_A y s_B.

Principio de impulso y cantidad de movimiento.
Bloque A:

$$(+\downarrow) \qquad m(v_A)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y \, dt = m(v_A)_2$$

$$0 - 2T_B(6\text{ s}) + 3(9.81)\text{ N}(6\text{ s}) = (3\text{ kg})(v_A)_2 \qquad (1)$$

Bloque B:

$$(+\downarrow) \qquad m(v_B)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y \, dt = m(v_B)_2$$

$$0 + 5(9.81)\text{ N}(6\text{ s}) - T_B(6\text{ s}) = (5\text{ kg})(v_B)_2 \qquad (2)$$

Cinemática. Como los bloques están sometidos a un movimiento dependiente, la velocidad de A puede relacionarse con la de B por medio del análisis de cinemática visto en la sección 12.9. Se establece un plano de referencia horizontal a través del punto fijo en C (fig. 15-7*a*) y las coordenadas de posición, s_A y s_B, se relacionan con la longitud total constante l de los segmentos verticales de la cuerda mediante la ecuación

$$2s_A + s_B = l$$

Al considerar la derivada con respecto al tiempo se obtiene

$$2v_A = -v_B \qquad (3)$$

Como lo indica el signo negativo, cuando B se mueve hacia abajo A lo hace hacia arriba. Al sustituir este resultado en la ecuación 1, y resolver las ecuaciones 1 y 2 se obtiene

$$(v_B)_2 = 35.8\text{ m/s} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

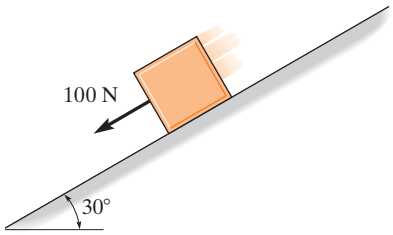
$$T_B = 19.2\text{ N}$$

NOTA: Dese cuenta que la dirección *positiva* (hacia abajo) de $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ es *consistente* en las figuras 15-7*a* y 15-7*b* y en las ecuaciones 1 a 3. Esto es importante pues lo que buscamos es una solución de ecuaciones simultáneas.

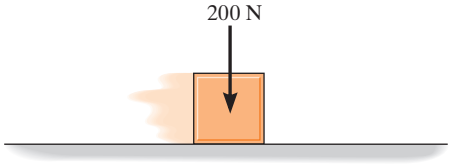
PROBLEMAS PRELIMINARES

P15-1. Determine el impulso de la fuerza para $t = 2$ s.

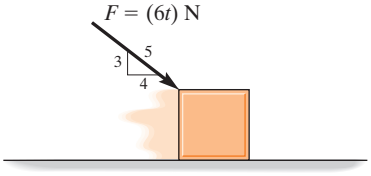
a)



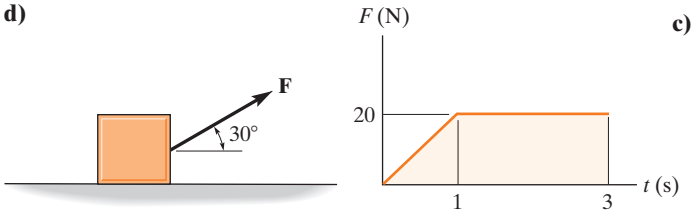
b)



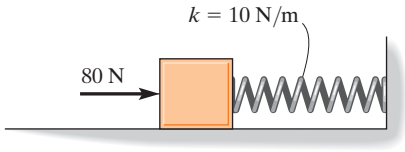
c)



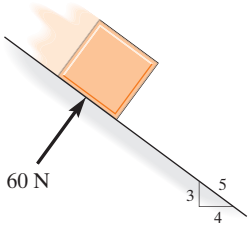
d)



e)



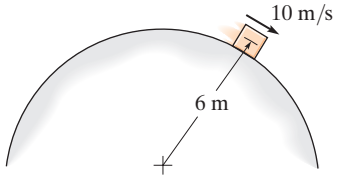
f)



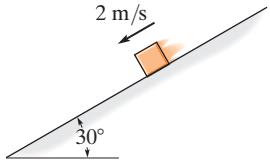
Prob. P15-1

15-2. Determine la cantidad de movimiento lineal del bloque de 10 kg.

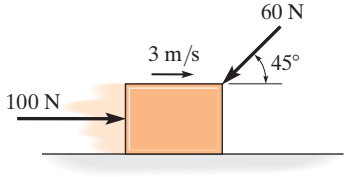
a)



b)



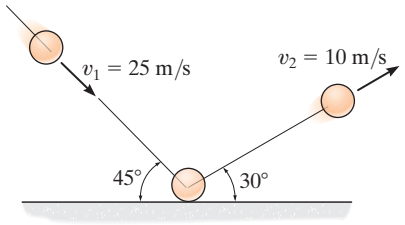
c)



Prob. P15-2

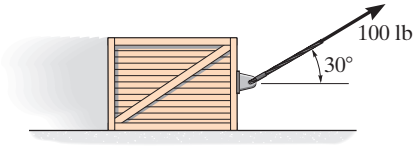
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F15-1. La pelota de 0.5 kg choca contra el suelo áspero y rebota con las velocidades que se indican. Determine la magnitud del impulso que ejerce el suelo en la pelota. Suponga que ésta no se desliza cuando choca contra el suelo, e ignore su tamaño y el impulso producido por su peso.



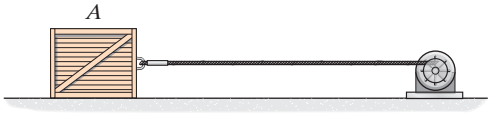
Prob. F15-1

F15-2. Si el coeficiente de fricción cinética entre el embalaje de 150 lb y el suelo es $\mu_k = 0.2$, determine la rapidez del embalaje cuando $t = 4$ s. El embalaje comienza a moverse desde el punto de reposo y lo remolca la fuerza de 100 lb.



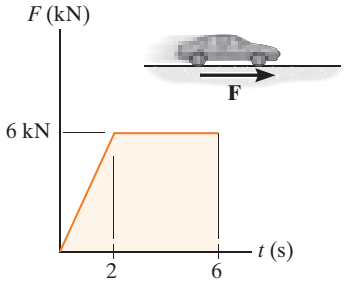
Prob. F15-2

F15-3. El motor ejerce una fuerza $F = (20t^2)$N en el cable, donde t está en segundos. Determine la rapidez del embalaje de 25 kg cuando $t = 4$ s. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el embalaje y el plano son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.25$, respectivamente.



Prob. F15-3

F15-4. Las ruedas del automóvil de 1.5 Mg generan la fuerza de tracción **F** descrita por la gráfica. Si el automóvil arranca desde el punto de reposo, determine su rapidez cuando $t = 6$ s.

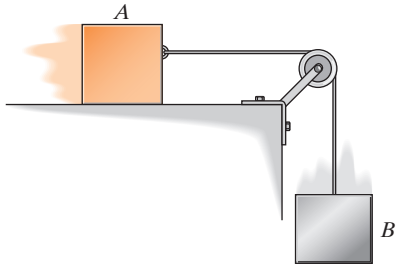


Prob. F15-4

F15-5. El vehículo de tracción en las cuatro ruedas (vehículo utilitario deportivo) de 2.5 Mg tira del remolque de 1.5 Mg. La fuerza de tracción desarrollada en las ruedas es $F_D = 9$ kN. Determine la rapidez del vehículo en 20 s, a partir del punto de reposo. Además, determine la tensión desarrollada en el acoplamiento entre el vehículo utilitario deportivo y el remolque. Desprecie la masa de las ruedas.

Prob. F15-5

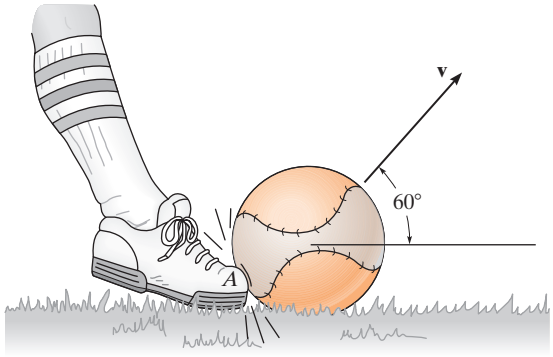
F15-6. El bloque de 10 lb A alcanza una velocidad de 1 ft/s en 5 segundos, a partir del punto de reposo. Determine la tensión en la cuerda y el coeficiente de fricción cinética entre el bloque A y el plano horizontal. Ignore el peso de la polea. El bloque B pesa 8 lb.



Prob. F15-6

PROBLEMAS

15-1. Un hombre patea el balón de 150 g, de modo que éste se despega del suelo a un ángulo de 60° y golpea el suelo a la misma altura a una distancia de 12 m. Determine el impulso del pie sobre el balón en *A*. No tome en cuenta el impulso causado por el peso del balón mientras está siendo pateado.

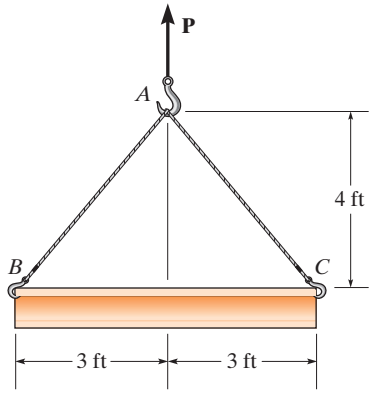


Prob. 15-1

15-2. Un bloque de 20 lb se desliza hacia abajo sobre un plano inclinado a 30°, con una velocidad inicial de 2 ft/s. Determine la velocidad del bloque en 3 s, si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es $\mu_k = 0.25$.

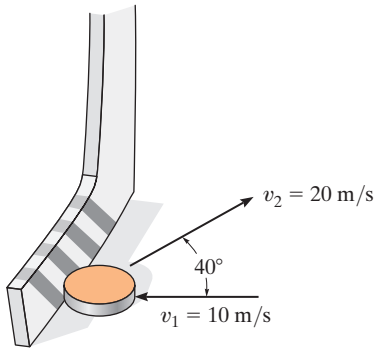
15-3. La viga uniforme tiene un peso de 5000 lb. Determine la tensión promedio en cada uno de los dos cables *AB* y *AC*, si a la viga se le da una rapidez hacia arriba de 8 ft/s en 1.5 s, partiendo del reposo. Desprecie la masa de los cables.

***15-4.** Cada uno de los cables puede soportar una tensión máxima de 5000 lb. Si la viga uniforme tiene un peso de 5000 lb, determine el tiempo más corto posible para levantar la viga con una rapidez de 10 ft/s partiendo del reposo.



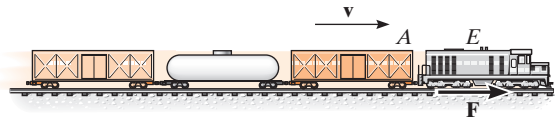
Probs. 15-3/4

15-5. Un disco de hockey se desplaza a la izquierda con una velocidad de $v_1 = 10$ m/s cuando es golpeado por un palo de hockey y se le da una velocidad de $v_2 = 20$ m/s, como se indica en la figura. Determine la magnitud del impulso neto ejercido por el palo de hockey sobre el disco que tiene una masa de 0.2 kg.



Prob. 15-5

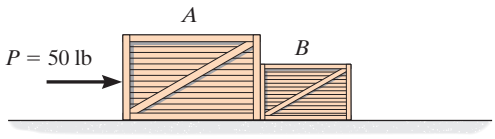
15-6. Un tren se compone de una máquina de 50 Mg y tres vagones, cada uno con 30 Mg de masa. Si se requieren 80 s para que el tren incremente su rapidez de manera uniforme a 40 km/h, a partir del punto de reposo, determine la fuerza *T* desarrollada en el acoplamiento entre la máquina *E* y el primer vagón *A*. Las ruedas de la máquina generan una fuerza de tracción de fricción resultante **F** que mueve el tren hacia delante, mientras las ruedas de los vagones ruedan libremente. Asimismo, determine la fuerza *F* que actúa en las ruedas de la máquina.



Prob. 15-6

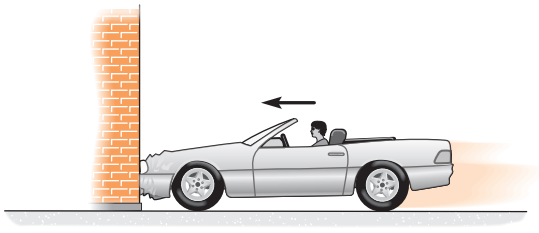
15

15-7. Las cajas A y B pesan 100 lb y 50 lb, respectivamente. Si parten desde el reposo, determine su rapidez cuando $t = 5$ s. Además, encuentre la fuerza ejercida por la caja A sobre la caja B durante el movimiento. El coeficiente de fricción cinética entre las cajas y el suelo es $\mu_k = 0.25$.



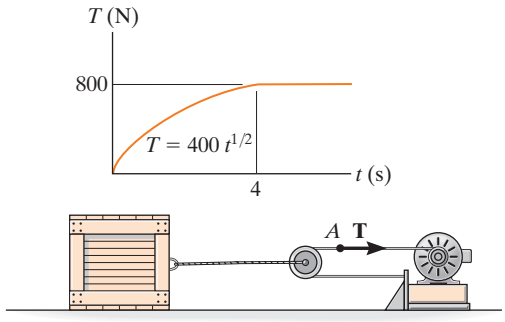
Prob. 15-7

***15-8.** El automóvil tiene un peso de 2700 lb y se desplaza hacia delante a 4 ft/s cuando choca contra la pared. Si el impacto se produce en 0.06 s, determine la fuerza impulsora promedio que actúa sobre el auto. Suponga que *no se aplican* los frenos. Si el coeficiente de fricción cinética entre las ruedas y el pavimento es $\mu_k = 0.3$, calcule la fuerza impulsora sobre la pared, si los frenos *se aplicaran* durante el choque. La aplicación de los frenos es sobre las cuatro ruedas, por lo que todas ellas se deslizan.



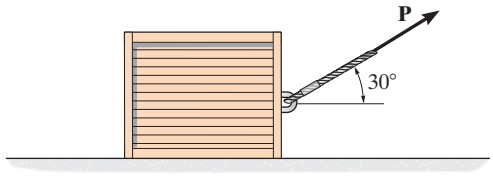
Prob. 15-8

15-9. La caja de 200 kg descansa sobre el suelo, cuyos coeficientes de fricción estática y cinética son $\mu_s = 0.5$ y $\mu_k = 0.4$, respectivamente. El cabrestante proporciona una fuerza de remolque horizontal $\boldsymbol{T}$ a su cable en A, que varía como se muestra en la gráfica. Determine la rapidez de la caja cuando $t = 4$ s. Originalmente, la tensión en el cable es cero. *Sugerencia:* Primero determine la fuerza necesaria para comenzar a mover la caja.



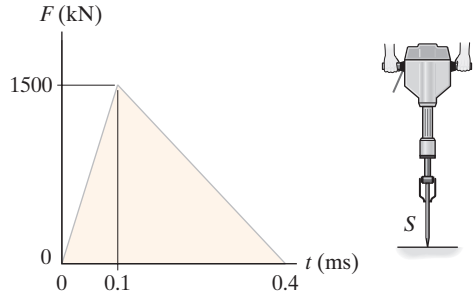
Prob. 15-9

15-10. La caja de 50 kg se jala mediante la fuerza constante **P**. Si la caja parte desde el reposo y alcanza una rapidez de 10 m/s en 5 s, determine la magnitud de **P**. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y el suelo es $\mu_k = 0.2$.



Prob. 15-10

15-11. Durante su operación, el martillo de percusión golpea la superficie de concreto con la fuerza que se indica en la gráfica. Para conseguir esto, la punta S de 2 kg se dispara hacia la superficie a 90 m/s. Determine la rapidez de la punta justo después de rebotar.



Prob. 15-11

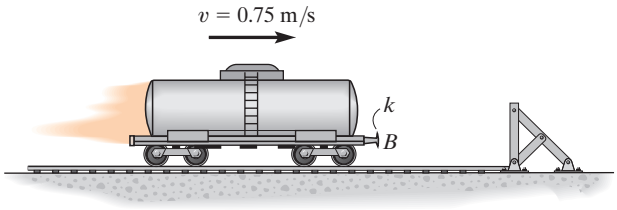
***15-12.** Durante un periodo de tiempo corto, la fuerza impulsora de fricción que actúa sobre las ruedas de la furgoneta de 2.5 Mg es $F_D = (600t^2)$ N, donde t se da en segundos. Si la furgoneta tiene una rapidez de 20 km/h cuando $t = 0$, determine su rapidez cuando $t = 5$ s.

Prob. 15-12

15-13. La furgoneta de 2.5 Mg viaja con una rapidez de 100 km/h cuando se aplican los frenos y se bloquean las cuatro ruedas. Si la rapidez disminuye hasta 40 km/h en 5 s, determine el coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos y la carretera.

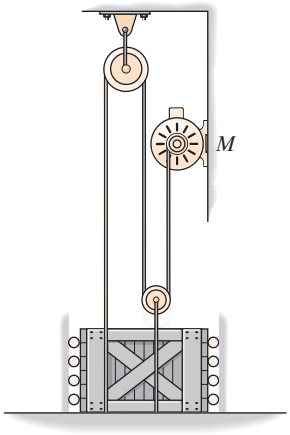
Prob. 15-13

15-14. Un vagón-tanque tiene una masa de 20 Mg y rueda libremente hacia la derecha con una rapidez de 0.75 m/s. Si golpea la barrera, determine el impulso horizontal necesario para detener el vagón, si el resorte del parachoques B tiene una rigidez (a) $k \to \infty$ (el parachoques es rígido) y (b) $k = 15$ kN/m.



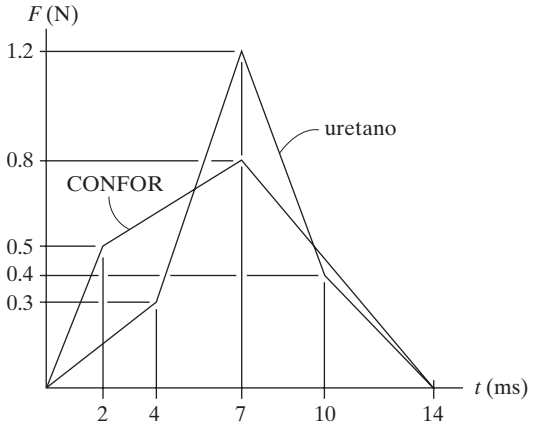
Prob. 15-14

15-15. El motor, M, tira del cable con una fuerza $F = (10t^2 + 300)$ N, donde t se da en segundos. Si la caja de 100 kg está inicialmente en reposo en $t = 0$, determine su rapidez cuando $t = 4$ s. Desprecie la masa del cable y las poleas. *Sugerencia:* Primero encuentre el tiempo necesario para comenzar a elevar la caja.



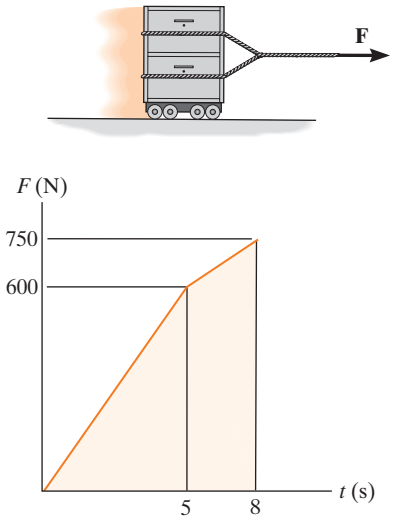
Prob. 15-15

***15-16.** La elección de un material para asientos de vehículos depende de su capacidad para resistir golpes y vibraciones. Con base en los datos que se muestran en las gráficas, determine los impulsos creados por un peso que cae sobre una muestra de espuma de uretano y de espuma CONFOR.



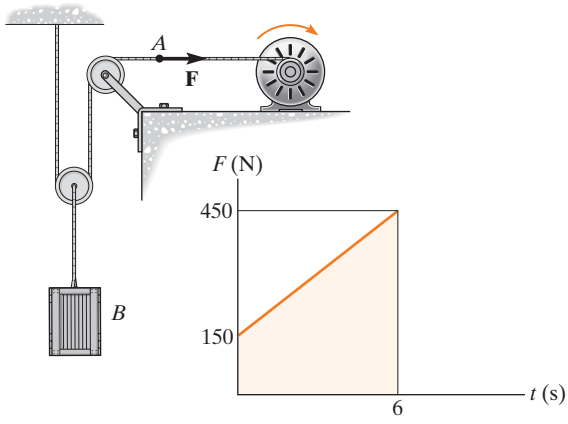
Prob. 15-16

15-17. La fuerza de remolque que actúa sobre el gabinete de 400 kg varía como se muestra en la gráfica. Determine su rapidez, partiendo del reposo, cuando $t = 8$ s. ¿Hasta dónde habrá viajado el gabinete durante ese tiempo?



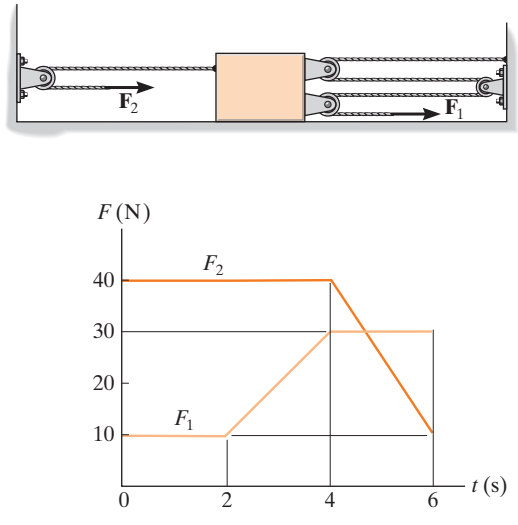
Prob. 15-17

15-18. El motor ejerce una fuerza **F** sobre la caja de 40 kg, como se indica en la gráfica. Determine la rapidez de la caja cuando $t = 3$ s y cuando $t = 6$ s. Cuando $t = 0$, la caja se mueve hacia abajo a 10 m/s.



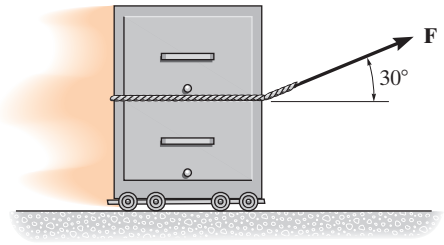
Prob. 15-18

15-19. El bloque deslizante de 30 kg se mueve hacia la izquierda con una rapidez de 5 m/s cuando actúan sobre él las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Si estas cargas varían de la manera mostrada en la gráfica, determine la rapidez del bloque en $t = 6$ s. No tome en cuenta la fricción ni la masa de las poleas y las cuerdas.



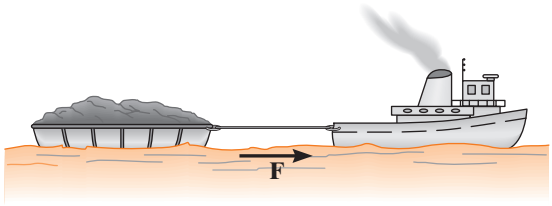
Prob. 15-19

***15-20.** El gabinete de 200 lb se somete a la fuerza $F = 20(t + 1)$ lb, donde t se da en segundos. Si el gabinete se mueve inicialmente hacia la izquierda con una velocidad de 20 ft/s, determine su rapidez cuando $t = 5$ s. No tome en cuenta el tamaño de los rodillos.



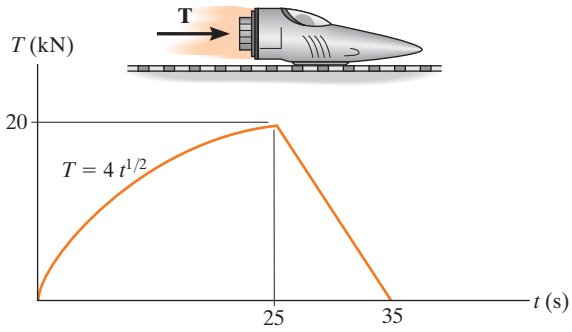
Prob. 15-20

15-21. Si el remolcador de 50 Mg requiere 35 s para aumentar su rapidez uniformemente desde el reposo hasta 25 km/h, determine la fuerza de la cuerda sobre el remolcador. La hélice proporciona la fuerza de propulsión **F** que genera el movimiento hacia delante del remolcador, en tanto que la barcaza se mueve libremente. Además, determine F que actúa sobre el remolcador. La barcaza tiene una masa de 75 Mg.



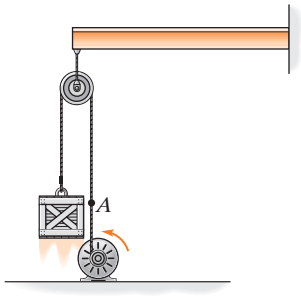
Prob. 15-21

15-22. El empuje sobre el cohete-trineo de 4 Mg se muestra en la gráfica. Determine la velocidad máxima del trineo y la distancia que éste viaja cuando $t = 35$ s. No tome en cuenta la fricción.



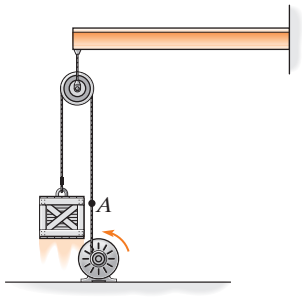
Prob. 15-22

15-23. El motor jala el cable en A con una fuerza $F = (30 + t^2)$ lb, donde t se da en segundos. Si la caja de 34 lb está originalmente sobre el suelo en $t = 0$, determine su rapidez en $t = 4$ s. Desprecie la masa del cable y las poleas. *Sugerencia:* Primero encuentre el tiempo necesario para comenzar a elevar la caja.



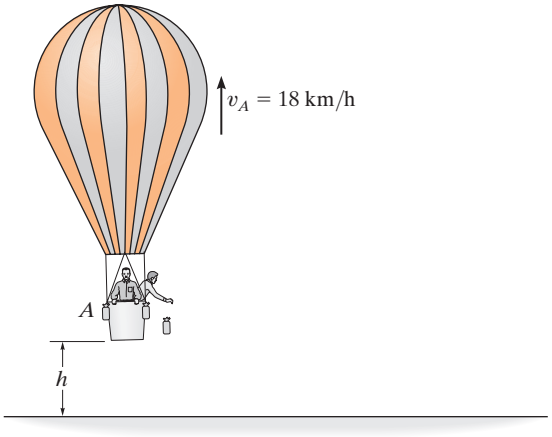
Prob. 15-23

***15-24.** El motor tira del cable en A con una fuerza $F = (e^{2t})$ lb, donde t se da en segundos. Si la caja de 34 lb está originalmente en reposo sobre el suelo en $t = 0$, determine su velocidad en $t = 2$ s. Desprecie la masa del cable y las poleas. *Sugerencia:* Primero encuentre el tiempo necesario para comenzar a elevar la caja.



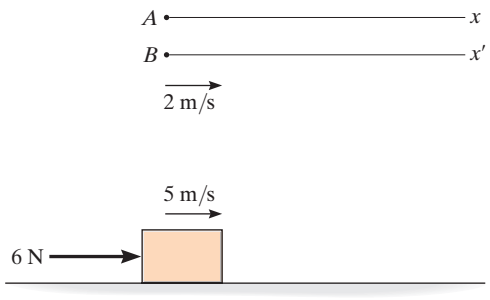
Prob. 15-24

15-25. El globo aerostático tiene una masa total de 400 kg, incluyendo los pasajeros y el lastre. El globo se está elevando a una velocidad constante de 18 km/h cuando $h = 10$ m. Si el hombre deja caer una bolsa de arena de 40 kg, determine la velocidad del globo cuando la bolsa golpea el suelo. No tome en cuenta la resistencia del aire.



Prob. 15-25

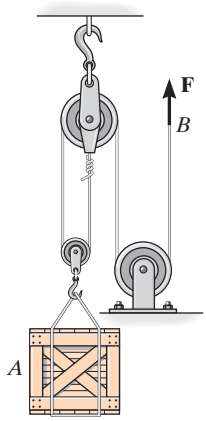
15-26. De acuerdo con lo indicado en la deducción, el principio del impulso y la cantidad de movimiento es válido para los observadores en *cualquier* marco de referencia inercial. Demuestre que esto es así, considerando el bloque de 10 kg que se desliza sobre la superficie lisa y se somete a una fuerza horizontal de 6 N. Si el observador A está en un marco x *fijo*, determine la rapidez final del bloque en 4 s si tiene una velocidad inicial de 5 m/s, medida desde el marco fijo. Compare el resultado con el obtenido por un observador B, unido al eje x', que se mueve a una velocidad constante de 2 m/s con respecto a A.



Prob. 15-26

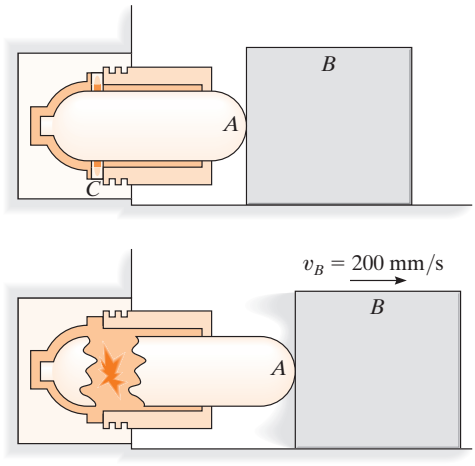
15-27. La caja de 20 kg se eleva mediante una fuerza de $F = (100 + 5t^2)$ N, donde t se da en segundos. Determine la rapidez de la caja cuando $t = 3$ s, si parte desde el reposo.

***15-28.** La caja de 20 kg se eleva mediante una fuerza de $F = (100 + 5t^2)$ N, donde t se da en segundos. Determine cuánto se ha elevado la caja cuando $t = 3$ s, si parte desde el reposo.



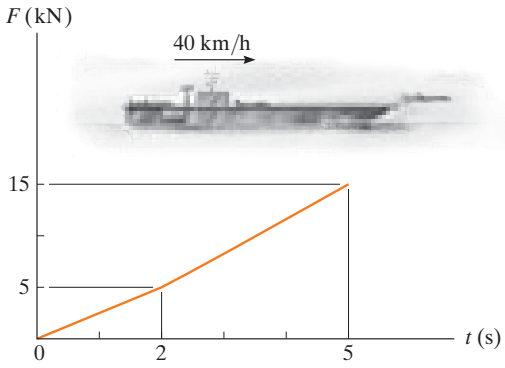
Probs. 15-27/28

15-29. En caso de emergencia, el actuador de gas se utiliza para mover un bloque B de 75 kg, mediante la explosión de una carga de C cerca de un cilindro presurizado de masa despreciable. Como resultado de la explosión, las fracturas del cilindro y el gas liberado hacen que la parte frontal del cilindro A mueva hacia adelante el bloque B, dándole una rapidez de 200 mm/s en 0.4 s. Si el coeficiente de fricción cinética entre B y el piso es $\mu_k = 0.5$, determine el impulso que el actuador imparte sobre B.



Prob. 15-29

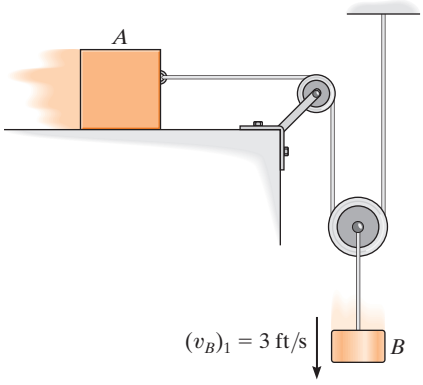
15-30. Un avión a reacción que tiene una masa de 7 Mg despega desde un portaaviones, de manera que el empuje del motor varía como se indica en la gráfica. Si el portaaviones se desplaza hacia adelante con una rapidez de 40 km/h, determine la rapidez aerodinámica del avión después de 5 s.



Prob. 15-30

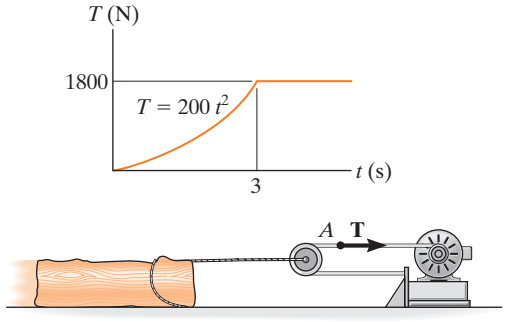
15-31. El bloque A pesa 10 lb y el bloque B pesa 3 lb. Si B se mueve hacia abajo con una velocidad $(v_B)_1 = 3$ ft/s en $t = 0$, determine la velocidad de A cuando $t = 1$ s. Suponga que el plano horizontal es liso. Desprecie la masa de las poleas y las cuerdas.

***15-32.** El bloque A pesa 10 lb y el bloque B pesa 3 lb. Si B se mueve hacia abajo con una velocidad $(v_B)_1 = 3$ ft/s en $t = 0$, determine la velocidad de A cuando $t = 1$ s. El coeficiente de fricción cinética entre el plano horizontal y el bloque A es $\mu_A = 0.15$.



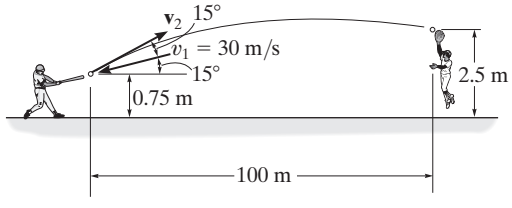
Probs. 15-31/32

15-33. El tronco tiene una masa de 500 kg y descansa sobre el suelo cuyos coeficientes de fricción estática y cinética son $\mu_s = 0.5$ y $\mu_k = 0.4$, respectivamente. El malacate proporciona una fuerza de remolque horizontal T a su cable en A, que varía como se muestra en la gráfica. Determine la rapidez del tronco cuando $t = 5$ s. Originalmente, la tensión en el cable es cero. *Sugerencia:* Primero determine la fuerza necesaria para empezar a mover el tronco.

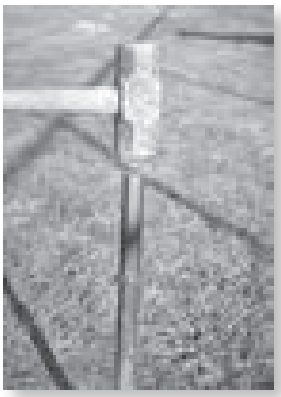


Prob. 15-33

15-34. La pelota de béisbol de 0.15 kg tiene una rapidez de $v = 30$ m/s justo antes de ser golpeada por el bate. Después, se desplaza a lo largo de la trayectoria mostrada antes de que el jardinero la atrape. Determine la magnitud de la fuerza impulsora promedio impartida a la pelota, si está en contacto con el bate durante 0.75 ms.



Prob. 15-34



(© R. C. Hibbeler)

El martillo de la fotografía superior aplica una fuerza impulsora a la estaca. Durante este tiempo de contacto extremadamente corto, el peso de la estaca puede considerarse no impulsora y siempre que se hinque en suelo blando; el impulso de éste al actuar en la estaca también puede considerarse no impulsor. En contraste, si se utiliza la estaca en un rompe-pavimentos, entonces dos fuerzas impulsoras actúan en la estaca, una en su extremo superior, producida por el rompe-pavimentos, y la otra en su parte inferior debida a la rigidez del concreto. (© R. C. Hibbeler)

15.3 Conservación de la cantidad de movimiento lineal de un sistema de partículas

Cuando la suma de los *impulsos externos* que actúan en un sistema de partículas es *cero*, la ecuación 15-6 se reduce a una forma simplificada, a saber,

$$\Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_1 = \Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_2 \tag{15-8}$$

Esta ecuación se conoce como la *conservación de la cantidad de movimiento lineal* y establece que la cantidad de movimiento lineal total de un sistema de partículas permanece constante durante el lapso t_1 a t_2. Al sustituir $m\mathbf{v}_G = \sum m_i\mathbf{v}_i$ en la ecuación 15-8, también podemos escribir

$$(\mathbf{v}_G)_1 = (\mathbf{v}_G)_2 \tag{15-9}$$

la cual indica que la velocidad $\mathbf{v}_G$ del centro de masa del sistema de partículas no cambia, si no se aplican impulsos externos al sistema.

La conservación de la cantidad de movimiento lineal se suele aplicar cuando las partículas chocan o interactúan. Para su aplicación, debería estudiarse con cuidado el diagrama de cuerpo libre de *todo* el sistema de partículas, para identificar las fuerzas que crean, ya sea impulsos internos o externos, y determinar así en qué dirección(es) se conserva la cantidad de movimiento lineal. Como se estableció antes, los *impulsos internos* del sistema siempre se eliminan, puesto que se presentan en pares colineales iguales pero opuestos. Si el lapso de tiempo durante el cual se estudia el movimiento es *muy corto*, algunos de los impulsos externos también pueden ignorarse o considerarse aproximadamente iguales a cero. Las fuerzas que producen estos impulsos despreciables se llaman *fuerzas no impulsoras*. Por comparación, las fuerzas que son muy grandes y que actúan durante un lapso de tiempo muy corto producen un cambio significativo de la cantidad de movimiento y se llaman *fuerzas impulsoras*. Desde luego, no se pueden omitir en el análisis del impulso-cantidad de movimiento.

Por lo común, las fuerzas impulsoras ocurren a causa de la explosión o el choque de un cuerpo contra otro; en tanto que las fuerzas no impulsoras pueden incluir el peso de un cuerpo, la fuerza impartida por un resorte levemente deformado de rigidez en cierto modo pequeña, o en cuanto a eso, cualquier fuerza que sea muy pequeña comparada con otras fuerzas (impulsoras) más grandes. Cuando se hace esta distinción entre fuerzas impulsoras y no impulsoras, es importante darse cuenta de que ésta sólo se aplica durante el tiempo t_1 a t_2. Como ejemplo, considere el efecto de golpear una pelota de tenis con una raqueta, como se muestra en la fotografía. Durante el *muy corto* tiempo de interacción, la fuerza de la raqueta en la pelota es impulsora puesto que cambia drásticamente su cantidad de movimiento. Por comparación, el peso de la pelota tendrá un efecto insignificante en el cambio de la cantidad de movimiento y, por consiguiente, es no impulsora. Entonces, puede despreciarse en el análisis de impulso-can-

tidad de movimiento durante este tiempo. Si se considera un análisis de impulso-cantidad de movimiento, durante el tiempo de vuelo mucho más largo después de la interacción raqueta-pelota, el impulso del peso de la pelota es importante ya que, junto con la resistencia del aire, hace que cambie la cantidad de movimiento de la pelota.

(© R. C. Hibbeler)

15

Procedimiento para el análisis

En general, el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales o el de la conservación de la cantidad de movimiento lineal se aplican a un *sistema de partículas*, para determinar las velocidades finales de las partículas *justo después* del periodo de tiempo considerado. Al aplicar este principio a todo el sistema, los impulsos internos que actúan dentro del sistema, los cuales pueden ser desconocidos, se *eliminan* del análisis. Para su aplicación se sugiere seguir el procedimiento indicado.

Diagrama de cuerpo libre

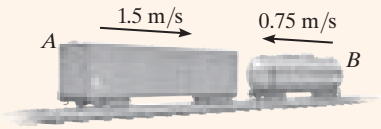
- Establezca el marco de referencia inercial x, y, z y trace el diagrama de cuerpo libre de cada partícula del sistema, con la finalidad de identificar las fuerzas internas y externas.
- La conservación de la cantidad de movimiento lineal se aplica al sistema en una dirección donde no hay fuerzas externas o donde las fuerzas pueden considerarse no impulsoras.
- Establezca la dirección y el sentido de las velocidades inicial y final de las partículas. Si se desconoce el sentido, suponga que es a lo largo de un eje de coordenadas inercial positivo.
- Como un procedimiento alternativo, trace los diagramas de impulso y cantidad de movimiento de cada una de las partículas del sistema.

Ecuaciones de cantidad de movimiento

- Aplique el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales, o el de la conservación de la cantidad de movimiento lineal en las direcciones apropiadas.
- Si es necesario determinar el *impulso interno* $\int F\,dt$ que actúa en sólo una partícula de un sistema, entonces debe *aislarse* la partícula (diagrama de cuerpo libre) y debe aplicarse *a esta partícula* el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales.
- Después de que se calcula el impulso y siempre que se conozca el tiempo Δt durante el cual actúa el impulso, entonces la *fuerza impulsora promedio* F_{prom} se determina mediante $F_{\text{prom}} = \int F\,dt/\Delta t$.

EJEMPLO 15.4

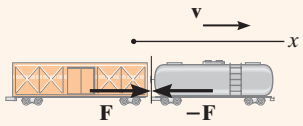
El vagón cerrado A de 15 Mg rueda libremente a 1.5 m/s por la vía horizontal hasta que se encuentra con un carro tanque B de 12 Mg que rueda a 0.75 m/s hacia él, como se indica en la figura 15-8*a*. Si los dos chocan y se acoplan, determine (a) la rapidez de ambos justo después del acoplamiento, y (b) la fuerza promedio entre ellos si el acoplamiento ocurre en 0.8 s.



(a)

SOLUCIÓN

Parte (a) Diagrama de cuerpo libre.* En este caso consideramos *ambos*, carro y vagón, como un solo sistema (fig. 15-8*b*). Por inspección, la cantidad de movimiento se conserva en la dirección x puesto que la fuerza de acoplamiento $\mathbf{F}$ es *interna* al sistema y, por consiguiente, se anula. Se supone que los dos, al acoplarse, se mueven a $\mathbf{v}_2$ en la dirección x positiva.



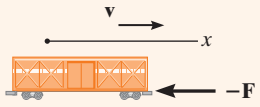
(b)

Conservación de la cantidad de movimiento lineal

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = (m_A + m_B)v_2$$

$$(15\,000\text{ kg})(1.5\text{ m/s}) - 12\,000\text{ kg}(0.75\text{ m/s}) = (27\,000\text{ kg})v_2$$

$$v_2 = 0.5\text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

Fig. 15-8

Parte (b). La fuerza de acoplamiento (impulsora) promedio, $\mathbf{F}_{\text{prom}}$, se determina al aplicar el principio de cantidad de movimiento lineal a *cualquiera* de los dos.

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en la figura 15-8*c*, al aislar el vagón cerrado la fuerza de acoplamiento es *externa* a él.

Principio de impulso y cantidad de movimiento. Como $\int F\,dt = F_{\text{prom}}\Delta t = F_{\text{prom}}(0.8\text{ s})$, tenemos

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 + \Sigma \int F\,dt = m_A v_2$$

$$(15\,000\text{ kg})(1.5\text{ m/s}) - F_{\text{prom}}(0.8\text{ s}) = (15\,000\text{ kg})(0.5\text{ m/s})$$

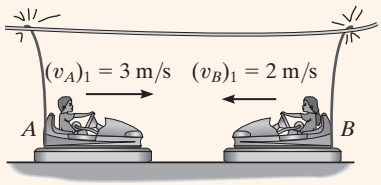
$$F_{\text{prom}} = 18.8\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: La solución fue posible en este caso, puesto que la velocidad final del vagón cerrado se obtuvo en la parte (a). Intente resolver F_{prom} mediante el principio de impulso y cantidad de movimiento para el carro tanque.

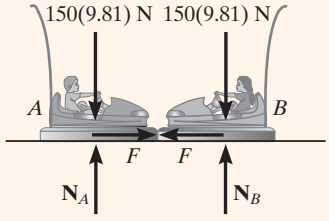
*En el diagrama de cuerpo libre se muestran sólo las fuerzas horizontales.

EJEMPLO 15.5

Cada uno de los carritos chocones A y B en la figura 15-9*a* tiene una masa de 150 kg y se mueve libremente a las velocidades que se muestran antes de que choquen de frente. Si no se pierde energía durante la colisión, determine sus velocidades después de la colisión.



(a)



(b)

Fig. 15-9

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Los carritos se considerarán como un solo sistema. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 15-9*b*.

Conservación de la cantidad de movimiento.

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2$$

$$(150\text{ kg})(3\text{ m/s}) + (150\text{ kg})(-2\text{ m/s}) = (150\text{ kg})(v_A)_2 + (150\text{ kg})(v_B)_2$$

$$(v_A)_2 = 1 - (v_B)_2 \qquad (1)$$

Conservación de la energía. Como no se pierde energía, el teorema de la conservación de la energía resulta

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\frac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 + \frac{1}{2}m_B(v_B)_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}m_B(v_B)_2^2 + 0$$

$$\frac{1}{2}(150\text{ kg})(3\text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(150\text{ kg})(2\text{ m/s})^2 + 0 = \frac{1}{2}(150\text{ kg})(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}(150\text{ kg})(v_B)_2^2 + 0$$

$$(v_A)_2^2 + (v_B)_2^2 = 13 \qquad (2)$$

Si sustituimos la ecuación (1) en la (2) y simplificamos, obtenemos

$$(v_B)_2^2 - (v_B)_2 - 6 = 0$$

Al resolver las dos raíces,

$$(v_B)_2 = 3\text{ m/s} \qquad \text{y} \qquad (v_B)_2 = -2\text{ m/s}$$

Como $(v_B)_2 = -2$ m/s se refiere a la velocidad de B justo *antes* de la colisión, entonces la velocidad de B justo después de la colisión debe ser

$$(v_B)_2 = 3\text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

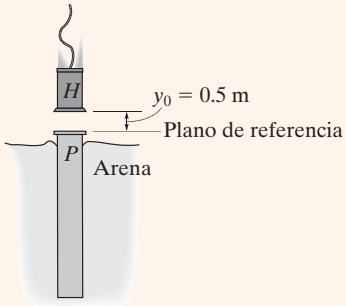
Al sustituir este resultado en la ecuación (1), obtenemos

$$(v_A)_2 = 1 - 3\text{ m/s} = -2\text{ m/s} = 2\text{ m/s} \leftarrow \qquad \textit{Resp.}$$

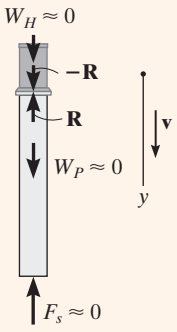
15

EJEMPLO 15.6

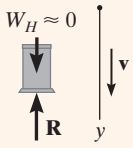
(© R. C. Hibbeler)



(a)



(b)



(c)

Fig. 15-10

En la figura 15-10*a* se muestra un pilote rígido de 800 kg que se hinca en el suelo usando un martinete de 300 kg. Éste cae desde el punto de reposo a una altura $y_0 = 0.5$ m y golpea la parte superior del pilote. Determine el impulso que el pilote ejerce en el martinete, si el pilote está rodeado por completo de arena suelta, de modo que después del golpe el martinete *no* rebota del pilote.

SOLUCIÓN

Conservación de la energía. La velocidad a la cual el martinete golpea el pilote se determina con la ecuación de la conservación de la energía aplicada al martinete. Con el plano de referencia en el extremo superior del pilote (fig. 15-10*a*), tenemos

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

$$\frac{1}{2}m_H(v_H)_0^2 + W_H y_0 = \frac{1}{2}m_H(v_H)_1^2 + W_H y_1$$

$$0 + 300(9.81)\,\text{N}(0.5\,\text{m}) = \frac{1}{2}(300\,\text{kg})(v_H)_1^2 + 0$$

$$(v_H)_1 = 3.132\,\text{m/s}$$

Diagrama de cuerpo libre. Por los aspectos físicos del problema, el diagrama de cuerpo libre del martinete y el pilote (fig. 15-10*b*) indica que durante el *corto tiempo* desde *justo antes* hasta *justo después* del *choque*, los pesos del martinete y el pilote y la fuerza de resistencia $\mathbf{F}_s$ de la arena son *no impulsores*. La fuerza impulsora **R** es interna al sistema y, por consiguiente, se cancela. Entonces, la cantidad de movimiento se conserva en la dirección vertical durante este corto tiempo.

Conservación de la cantidad de movimiento. Como el martinete no rebota del pilote justo después de la colisión, entonces $(v_H)_2 = (v_P)_2 = v_2$.

$$(+\downarrow) \qquad m_H(v_H)_1 + m_P(v_P)_1 = m_H v_2 + m_P v_2$$

$$(300\,\text{kg})(3.132\,\text{m/s}) + 0 = (300\,\text{kg})v_2 + (800\,\text{kg})v_2$$

$$v_2 = 0.8542\,\text{m/s}$$

Principio de impulso y cantidad de movimiento. Ahora puede determinarse el impulso que el pilote imparte al martinete, puesto que se conoce v_2. Por el diagrama de cuerpo libre del martinete (fig. 15-10*c*), tenemos

$$(+\downarrow) \qquad m_H(v_H)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m_H v_2$$

$$(300\,\text{kg})(3.132\,\text{m/s}) - \int R\,dt = (300\,\text{kg})(0.8542\,\text{m/s})$$

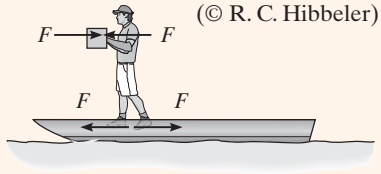
$$\int R\,dt = 683\,\text{N}\cdot\text{s} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: El impulso igual pero opuesto actúa sobre el pilote. Trate de determinarlo aplicando al pilote el principio del impulso y la cantidad de movimiento.

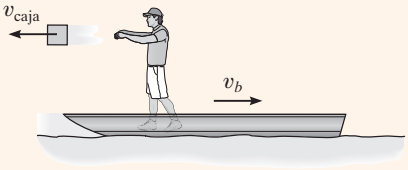
EJEMPLO 15.7

El hombre de 80 kg puede lanzar la caja de 20 kg horizontalmente a 4 m/s cuando está de pie sobre el suelo. Si en vez de eso se encuentra firmemente parado sobre el bote de 120 kg y lanza la caja, como se muestra en la fotografía, determine cuánto se moverá el bote en tres segundos. No tome en cuenta la resistencia del agua.

(© R. C. Hibbeler)



(a)



(b)

Fig. 15-11

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Si el hombre, el bote y la caja se consideran como un solo sistema, las fuerzas horizontales entre el hombre y el bote y el hombre y la caja se vuelven internas al sistema (fig. 15-11*a*), de modo que el impulso lineal se conserva a lo largo del eje x.

Conservación de la cantidad de movimiento. Al escribir la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento, es *importante* que las velocidades se midan a partir del mismo sistema de coordenadas inercial, que aquí se supone fijo. A partir de este sistema de coordenadas, supondremos que el bote y el hombre van hacia la derecha, mientras que la caja va a la izquierda, como se indica en la figura 15-11*b*.

Al aplicar la conservación de la cantidad de movimiento lineal para el sistema hombre, bote, caja,

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad 0+0+0=(m_m+m_b)\,v_b-m_{\text{caja}}\,v_{\text{caja}}$$

$$0=(80\text{ kg}+120\text{ kg})\,v_b-(20\text{ kg})\,v_{\text{caja}}$$

$$v_{\text{caja}}=10\,v_b \qquad (1)$$

Cinemática. Como se conoce la velocidad de la caja en *relación* con el hombre (y el bote), $v_{\text{caja}/b}$, entonces v_b también puede relacionarse con v_{caja} utilizando la ecuación de velocidad relativa.

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad v_{\text{caja}}=v_b+v_{\text{caja}/b}$$

$$-v_{\text{caja}}=v_b-4\text{ m/s} \qquad (2)$$

Al resolver las ecuaciones (1) y (2),

$$v_{\text{caja}}=3.64\text{ m/s}\leftarrow$$

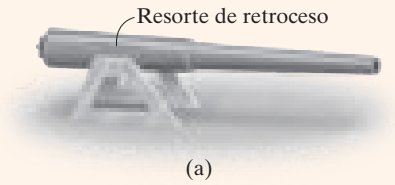
$$v_b=0.3636\text{ m/s}\rightarrow$$

Por consiguiente, el desplazamiento del bote en tres segundos es

$$s_b=v_b t=(0.3636\text{ m/s})(3\text{ s})=1.09\text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

15

EJEMPLO 15.8



(a)

El cañón de 1200 lb de la figura 15-12*a* dispara un proyectil de 8 lb con una velocidad de salida de 1500 ft/s medida con respecto al cañón. Si el disparo ocurre en 0.03 s, determine la velocidad de retroceso del cañón justo después del disparo. El soporte del cañón está fijo en el suelo y el retroceso horizontal del cañón es absorbido por dos resortes.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre.* Como se muestra en la figura 15-9*b*, consideraremos el proyectil y el cañón como un solo sistema, ya que las fuerzas impulsoras, **F** y −**F**, entre el cañón y el proyectil son *internas* al sistema y, por consiguiente, se eliminarán del análisis. Asimismo, durante el tiempo $\Delta t = 0.03$ s, cada uno de los dos resortes de retroceso conectados al soporte ejerce una *fuerza no impulsora* **F** en el cañón. Esto se debe a que Δt es muy corto, de modo que durante este tiempo el cañón tan sólo recorre una distancia *s muy pequeña*. En consecuencia, $F_s = ks \approx 0$, donde k es la rigidez del resorte, que también se considera relativamente pequeña. Entonces se concluye que la cantidad de movimiento del sistema se conserva en la *dirección horizontal*.

Conservación de la cantidad de movimiento

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad m_c(v_c)_1 + m_p(v_p)_1 = -m_c(v_c)_2 + m_p(v_p)_2$$

$$0 + 0 = -\left(\frac{1200 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}\right)(v_c)_2 + \left(\frac{8 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}\right)(v_p)_2$$

$$(v_p)_2 = 150\,(v_c)_2 \qquad (1)$$

Estas velocidades desconocidas se miden mediante un observador *fijo*. Como en el ejemplo 15.7, también pueden relacionarse mediante la ecuación de velocidad relativa.

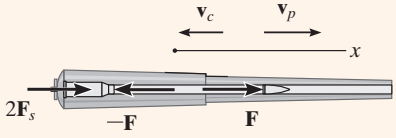
$$\stackrel{+}{\rightarrow} \qquad (v_p)_2 = (v_c)_2 + v_{p/c}$$

$$(v_p)_2 = -(v_c)_2 + 1500 \text{ ft/s} \qquad (2)$$

Al resolver las ecuaciones (1) y (2) se obtiene

$$(v_c)_2 = 9.93 \text{ ft/s}$$

$$(v_p)_2 = 1490 \text{ ft/s} \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Fig. 15-12

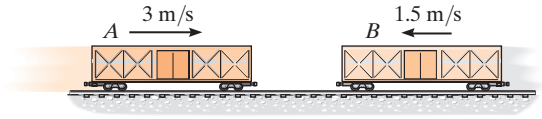
Aplique el principio del impulso y la cantidad de movimiento al proyectil (o el cañón) y demuestre que la fuerza impulsora promedio sobre el proyectil es de 12.3 kip.

NOTA: Si el cañón está firmemente sujeto a su soporte (sin resortes), la fuerza de reacción del soporte en el cañón debe considerarse como un impulso externo al sistema, ya que el soporte no permite que el cañón se mueva. En este caso *no* se conserva la cantidad de movimiento.

*En el diagrama de cuerpo libre se muestran únicamente las fuerzas horizontales.

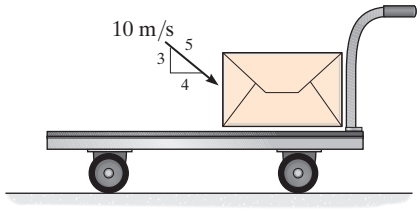
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F15-7. Los carros de carga A y B tienen una masa de 20 Mg y 15 Mg, respectivamente. Determine la velocidad de A después de la colisión, si los carros chocan y rebotan, de tal suerte que B se desplaza hacia la derecha con una rapidez de 2 m/s. Si A y B están en contacto durante 0.5 s, determine la fuerza impulsora promedio que actúa entre ellos.



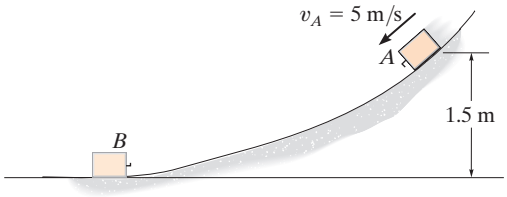
Prob. F15-7

F15-8. La carretilla y el paquete tienen una masa de 20 kg y 5 kg, respectivamente. Si la superficie de la carretilla es lisa e inicialmente está en reposo, mientras que la velocidad del paquete es la que se muestra, determine la velocidad final común de la carretilla y el paquete después del impacto.



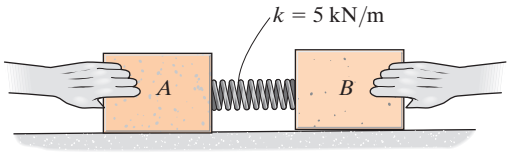
Prob. F15-8

F15-9. La rapidez inicial del bloque A de 5 kg es de 5 m/s cuando se desliza hacia abajo de la rampa lisa y choca contra el bloque estacionario B de 8 kg de masa. Si los dos bloques se acoplan después de la colisión, determine su velocidad común inmediatamente después de la colisión.



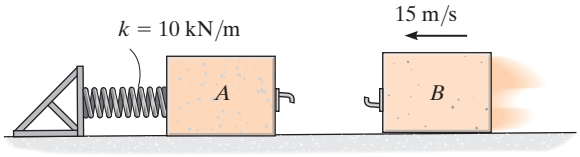
Prob. F15-9

F15-10. El resorte está fijo al bloque A y el bloque B se comprime contra el resorte. Si éste se comprime $s = 200$ mm y luego se sueltan los bloques, determine su velocidad en el instante en que el bloque B pierde el contacto con el resorte. Las masas de los bloques A y B son de 10 kg y 15 kg, respectivamente.



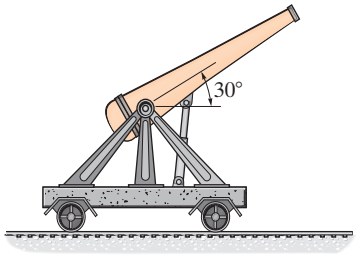
Prob. F15-10

F15-11. La masa de los bloques A y B es de 15 kg y 10 kg, respectivamente. Si A está estacionario y B tiene una velocidad de 15 m/s justo antes de la colisión, y los bloques se acoplan entre sí después del impacto, determine la compresión máxima del resorte.



Prob. F15-11

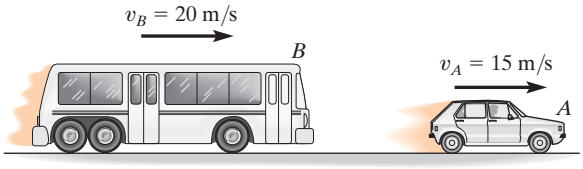
F15-12. El cañón y su pedestal sin un proyectil tienen una masa de 250 kg. Si se dispara un proyectil de 20 kg con el cañón a una velocidad de 400 m/s, medida *con respecto* al cañón, determine la rapidez del proyectil cuando sale del cañón. Desprecie la resistencia al rodamiento.



Prob. F15-12

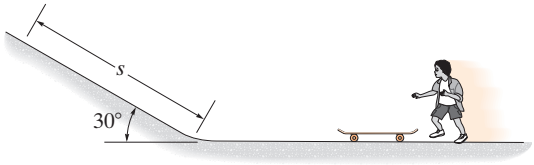
PROBLEMAS

15-35. El autobús B de 5 Mg se desplaza hacia la derecha a 20 m/s. Mientras tanto, un automóvil A de 2 Mg viaja a 15 m/s hacia la derecha. Si los vehículos chocan y se embrollan, determine su velocidad en común justo después de la colisión. Suponga que los vehículos ruedan libremente durante la colisión.



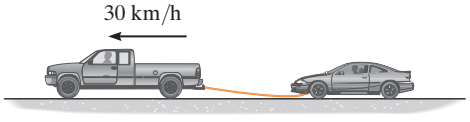
Prob. 15-35

***15-36.** El niño de 50 kg salta sobre la patineta de 5 kg con una velocidad horizontal de 5 m/s. Determine la distancia s que alcanza el niño sobre el plano inclinado, antes de llegar al reposo momentáneamente. Desprecie la resistencia al rodamiento de la patineta.



Prob. 15-36

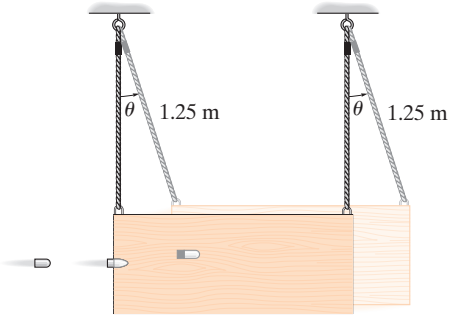
15-37. La camioneta de 2.5 Mg remolca el automóvil de 1.5 Mg mediante un cable, como se muestra en la figura. Si el auto está inicialmente en reposo y la camioneta se desplaza con una velocidad de 30 km/h cuando el cable está flojo, determine la velocidad común de la camioneta y el automóvil justo después de que el cable se tensa. Además, encuentre la pérdida de energía.



Prob. 15-37

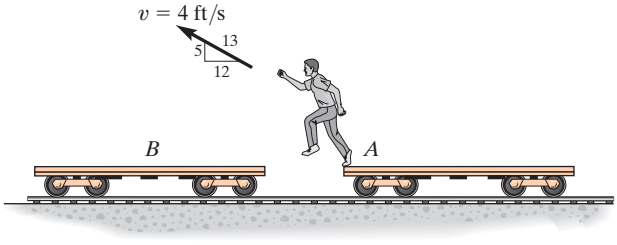
15-38. Un vagón de ferrocarril que tiene una masa de 15 Mg se desplaza a 1.5 m/s sobre una pista horizontal. Al mismo tiempo, otro vagón que tiene una masa de 12 Mg se desplaza a 0.75 m/s en la dirección contraria. Si los vagones se encuentran y se acoplan, determine la rapidez de los dos vagones justo después del acoplamiento. Encuentre la diferencia entre la energía cinética total antes y después de producirse el acoplamiento, y explique cualitativamente lo que sucedió con esta energía.

15-39. Un péndulo balístico consiste en un bloque de madera de 4 kg inicialmente en reposo, $\theta = 0°$. Cuando una bala de 2 g lo impacta y se incrusta en él, se observa que el bloque oscila hacia arriba hasta un ángulo máximo de $\theta = 6°$. Estime la rapidez inicial de la bala.



Prob. 15-39

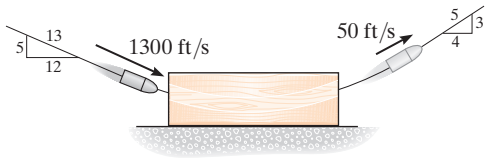
***15-40.** El muchacho salta del vagón descubierto en A con una velocidad de $v = 4$ ft/s relativa al vagón, como se indica en la figura. Si aterriza en el segundo vagón B, determine la velocidad final de ambos vagones después del movimiento. Cada vagón tiene un peso de 80 lb. El peso del muchacho es 60 lb. Ambos vagones están inicialmente en reposo. Desprecie la masa de las ruedas del vagón.



Prob. 15-40

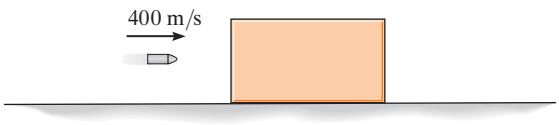
15-41. Una bala de 0.03 lb que viaja a 1300 ft/s impacta el bloque de madera de 10 lb y sale del otro lado, a 50 ft/s, como se ilustra en la figura. Determine la rapidez del bloque justo después de que la bala sale de él y, también, determine hasta qué punto el bloque se desliza antes de detenerse. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es $\mu_k = 0.5$.

15-42. Una bala de 0.03 lb que viaja a 1300 ft/s impacta el bloque de madera de 10 lb y sale del otro lado, a 50 ft/s, como se muestra en la figura. Determine la velocidad del bloque justo después de que la bala sale de él. Además, determine la fuerza normal promedio sobre el bloque, si la bala pasa a través de él en 1 ms, y el tiempo que se desliza el bloque antes de detenerse. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es $\mu_k = 0.5$.



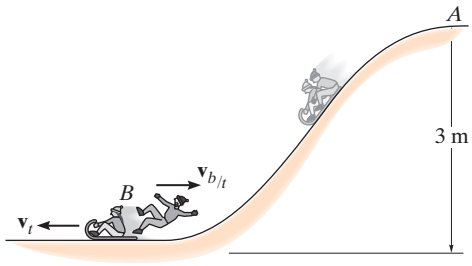
Probs. 15-41/42

15-43. La bala de 20 g viaja a 400 m/s cuando se incrusta en el bloque estacionario de 2 kg. Determine la distancia que se desliza el bloque antes de detenerse. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es $\mu_k = 0.2$.



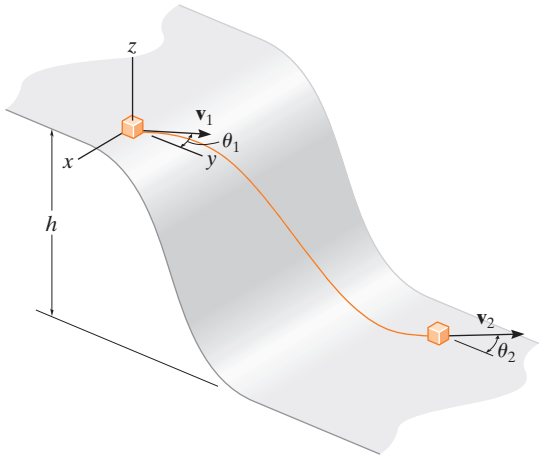
Prob. 15-43

***15-44.** Un trineo, que tiene una masa de 10 kg, parte desde el reposo en A y carga a una niña y un niño que tienen masas de 40 kg y 45 kg, respectivamente. Cuando el trineo llega a la parte inferior de la pendiente en B, el niño es empujado hacia atrás con una velocidad horizontal de $v_{b/t} = 2$ m/s, medida en relación con el trineo. Determine la velocidad del trineo después de esto. Para realizar el cálculo, desprecie la fricción.



Prob. 15-44

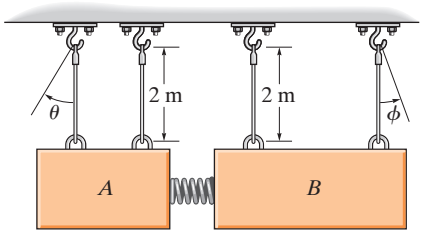
15-45. El bloque de masa m se desplaza a v_1 en la dirección θ_1 mostrada en la parte superior de la pendiente lisa. Determine su rapidez v_2 y su dirección θ_2 cuando alcanza la parte inferior.



Prob. 15-45

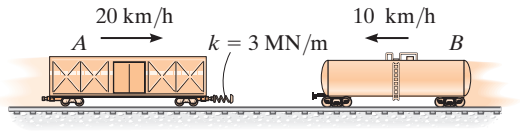
15

15-46. La masa de cada uno de los bloques A y B es de 5 kg y cuelgan de cuerdas paralelas. Un resorte de rigidez $k = 60$ N/m está sujeto a B y se comprime 0.3 m contra A y B como se muestra. Determine los ángulos máximos θ y ϕ de las cuerdas, después de que los bloques se sueltan del punto de reposo y el resorte regresa a su longitud no alargada.



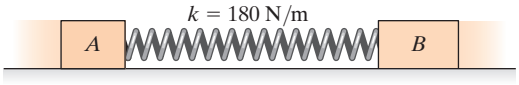
Prob. 15-46

15-47. El vagón de carga A de 30 Mg y el vagón de carga B de 15 Mg se mueven uno hacia el otro, con las velocidades mostradas. Determine la compresión máxima del resorte montado sobre el vagón A. No tome en cuenta la resistencia al rodamiento.



Prob. 15-47

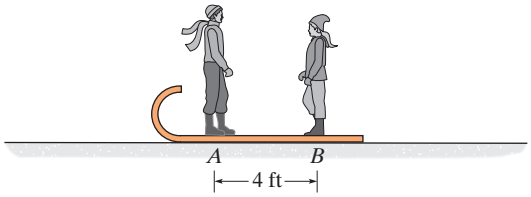
***15-48.** Los bloques A y B tienen masas de 40 kg y 60 kg, respectivamente. Se colocan sobre una superficie lisa y el resorte conectado entre ellos se estira 2 m. Si se liberan desde el reposo, determine la rapidez de cada uno de los bloques en el instante en que el resorte está sin estirar.



Prob. 15-48

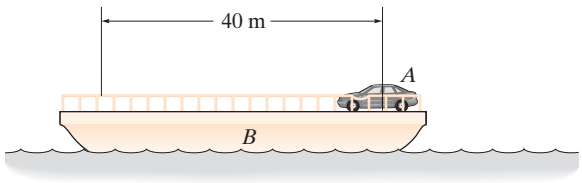
15-49. Un muchacho A que pesa 80 lb y una chica B con un peso de 65 lb se paran inmóviles en los extremos del trineo, cuyo peso es de 20 lb. Si intercambian posiciones, es decir, A pasa a la posición original de B y viceversa, determine la posición final del trineo justo después del movimiento. Desprecie la fricción entre el trineo y la nieve.

15-50. Un muchacho A que pesa 80 lb y una chica B con un peso de 65 lb se paran inmóviles en los extremos del trineo, que tiene un peso de 20 lb. Si A camina hacia B y se detiene, y ambos caminan juntos de nuevo a la posición original de A, determine la posición final del trineo justo después de que se detiene el movimiento. Desprecie la fricción entre el trineo y la nieve.



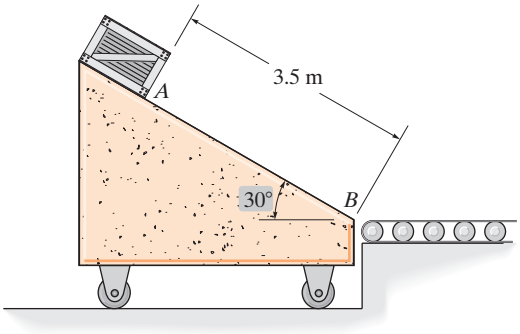
Probs. 15-49/50

15-51. La barcaza B de 10 Mg soporta un automóvil A de 2 Mg. Si alguien conduce el automóvil hasta el otro lado de la barcaza, determine cuánto se mueve la barcaza. Desprecie la resistencia del agua.



Prob. 15-51

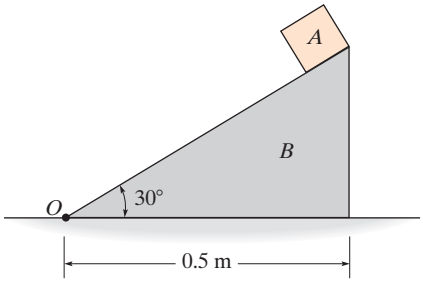
***15-52.** La rampa de rodamiento libre tiene una masa de 40 kg. Una caja de 10 kg se libera desde el reposo en A y se desliza hacia abajo 3.5 m hasta el punto B. Si la superficie de la rampa es lisa, determine su rapidez cuando la caja llega a B. Además, ¿cuál es la velocidad de la caja?



Prob. 15-52

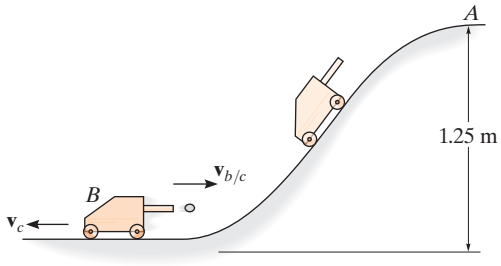
15-53. El bloque A tiene una masa de 5 kg y se coloca sobre el bloque B triangular liso que tiene una masa de 30 kg. Si el sistema se libera desde el reposo, determine la distancia B que se mueve desde el punto O cuando A llega a la parte inferior. Desprecie el tamaño del bloque A.

15-54. Resuelva el problema 15-53 si el coeficiente de fricción cinética entre A y B es $\mu_k = 0.3$. No tome en cuenta la fricción entre el bloque B y el plano horizontal.



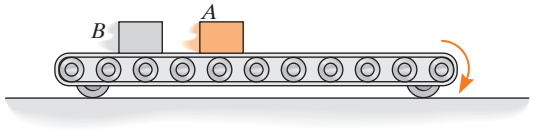
Probs. 15-53/54

15-55. El carro tiene una masa de 3 kg y rueda libremente hacia abajo desde A sobre la pendiente. Cuando llega a la parte inferior, una pistola de resorte dispara una bola de 0.5 kg por la parte trasera con una velocidad horizontal de $v_{b/c} = 0.6$ m/s, medida en relación con el carro. Determine la velocidad final del carro.



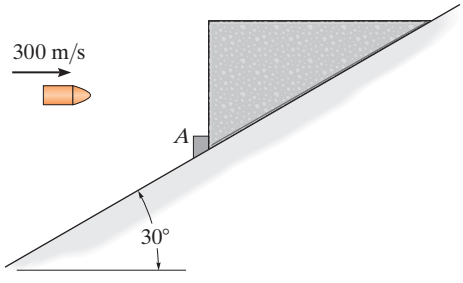
Prob. 15-55

***15-56.** Dos cajas A y B, cada una con un peso de 160 lb, se apoyan sobre la banda transportadora de 500 lb, que puede rodar libremente sobre el piso. Si la banda parte desde el reposo y comienza a moverse con una rapidez de 3 ft/s, determine la rapidez final de la banda transportadora, si (a) las cajas no se apilan, por lo que A cae y después lo hace B, y (b) A se apila sobre B y ambas cajas caen juntas.



Prob. 15-56

15-57. El bloque de 10 kg se mantiene en reposo sobre el plano inclinado liso debido al bloque de tope en A. Si la bala de 10 g viaja a 300 m/s cuando se incrusta en el bloque de 10 kg, determine la distancia que se desliza el bloque a lo largo del plano antes de detenerse momentáneamente.



Prob. 15-57

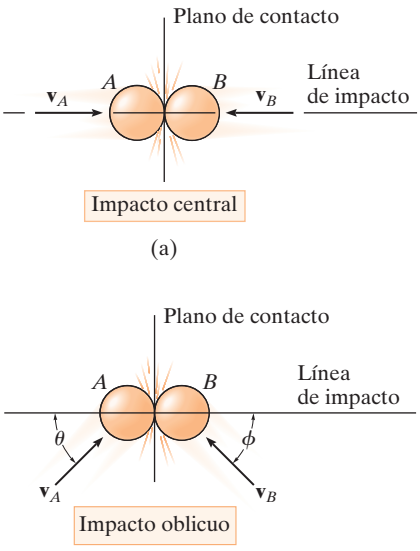


Fig. 15-13

15.4 Impacto

El *impacto* ocurre cuando dos cuerpos chocan entre sí durante un periodo muy *corto*, lo cual hace que se ejerzan fuerzas (impulsoras) relativamente grandes entre los cuerpos. El golpe de un martillo sobre un clavo, o un palo de golf sobre una pelota, son ejemplos comunes de cargas de impacto.

Por lo general, hay dos tipos de impacto. El *impacto central* ocurre cuando la dirección del movimiento de los centros de masa de las dos partículas va a lo largo de una línea, que pasa a través de los centros de masa de las partículas. Esta línea se llama *línea de impacto*, que es perpendicular al plano de contacto (fig. 15-13*a*). Cuando el movimiento de una o de las dos partículas forma un ángulo con la línea de impacto (fig. 15-13*b*), se dice que el impacto es un *impacto oblicuo*.

Impacto central. Para ilustrar el método de analizar la mecánica del impacto, considere el caso que implica el impacto central de las partículas A y B que se muestran en figura 15-14.

- Las partículas tienen los momentos iniciales que se muestran en la figura 15-14*a*. Siempre que $(v_A)_1 > (v_B)_1$, finalmente ocurrirá la colisión.
- Durante la colisión las partículas deben considerarse como *deformables* o no rígidas. Las partículas experimentarán un *periodo de deformación*, de modo que ejercen un impulso de deformación igual y opuesto $\int \mathbf{P}\, dt$ entre sí (fig. 15-14*b*).
- Sólo en el instante de *deformación máxima* ambas partículas se desplazarán con una velocidad constante $\mathbf{v}$, puesto que su movimiento relativo es cero (fig. 15-14*c*).
- Después de un *periodo de restitución*, las partículas recuperarán su forma original o permanecerán deformadas permanentemente. El *impulso de restitución* $\int \mathbf{R}\, dt$ igual pero opuesto separa las partículas (fig. 15-14*d*). En realidad, las propiedades físicas de cualquiera de los dos cuerpos son tales que el impulso de deformación *siempre será mayor* que el de restitución, es decir, $\int P\, dt > \int R\, dt$.
- Justo después de la separación, las partículas tendrán las cantidades de movimiento mostradas en la figura 15-14*e*, donde $(v_B)_2 > (v_A)_2$.

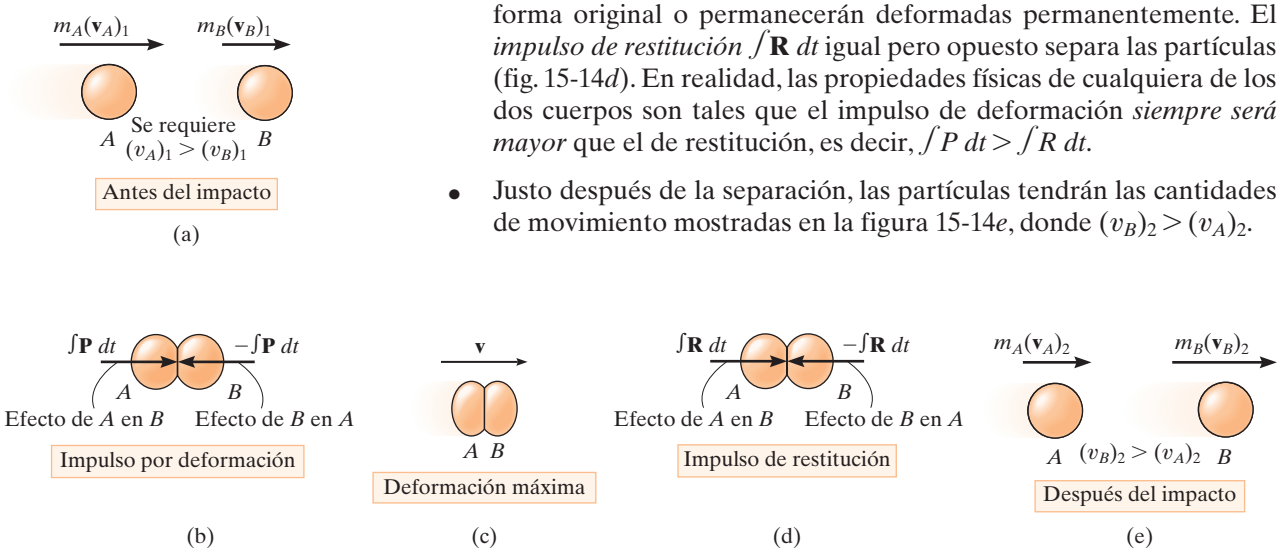


Fig. 15-14

En la mayoría de los problemas se *conocerán* las velocidades iniciales de las partículas, y será necesario determinar sus velocidades finales $(v_A)_2$ y $(v_B)_2$. Al respecto, la *cantidad de movimiento* del *sistema de partículas* se *conserva,* pues durante la colisión *se cancelan* los impulsos internos de deformación y restitución. Por consiguiente, al remitirnos a la figura 15-14*a* y 15-14*e* requerimos

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 \qquad (15\text{-}10)$$

Para obtener una segunda ecuación necesaria para resolver $(v_A)_2$ y $(v_B)_2$, debemos aplicar a *cada partícula* el principio de impulso y cantidad de movimiento. Por ejemplo, durante la fase de deformación de la partícula A, figuras 15-14*a*, 15-14*b* y 15-14*c*, tenemos

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 - \int P\,dt = m_A v$$

Para la fase de restitución, figuras 15-14*c*, 15-14*d* y 15-14*e*,

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad m_A v - \int R\,dt = m_A(v_A)_2$$

La razón entre el impulso de restitución y el impulso de deformación se llama *coeficiente de restitución*, e. De acuerdo con las ecuaciones anteriores, este valor para la partícula A es

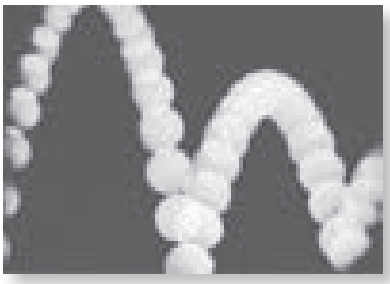
$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} = \frac{v - (v_A)_2}{(v_A)_1 - v}$$

Asimismo, podemos establecer e si consideramos la partícula B (fig. 15-14). Esto resulta en

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} = \frac{(v_B)_2 - v}{v - (v_B)_1}$$

Si se elimina la incógnita v de las dos ecuaciones anteriores, el coeficiente de restitución puede expresarse en función de las velocidades inicial y final de las partículas, como

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad \boxed{e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}} \qquad (15\text{-}11)$$



La calidad de fabricación de una pelota de tenis se mide por la altura de su rebote, la cual puede relacionarse con su coeficiente de restitución. Por medio de la mecánica del impacto oblicuo, los ingenieros pueden diseñar un dispositivo de separación para eliminar las pelotas de tenis que están por debajo del estándar de una línea de producción. (© Gary S. Settles/ Science Source)

Siempre que se especifica un valor para e, las ecuaciones 15-10 y 15-11 pueden resolverse simultáneamente para obtener $(v_A)_2$ y $(v_B)_2$. Sin embargo, para ello es importante establecer con cuidado una convención de signos para definir la dirección positiva tanto de $\mathbf{v}_A$ como de $\mathbf{v}_B$ y, luego, utilizarla *de manera consistente* cuando se escriban *ambas* ecuaciones. Como se vio en la aplicación mostrada, e indicada simbólicamente mediante la flecha entre paréntesis, definimos la dirección positiva hacia la derecha cuando se refiere a los movimientos tanto de A como de B. Por consiguiente, si en la solución de $(v_A)_2$ o $(v_B)_2$ resulta un valor negativo, ello indica que el movimiento es hacia la izquierda.

Coeficiente de restitución. Según las figuras 15-14*a* y 15-14*e*, se observa que la ecuación 15-11 establece que e es igual a la relación de la velocidad relativa de la separación de las partículas *justo después del impacto*, $(v_B)_2 - (v_A)_2$ a la velocidad relativa de aproximación de las partículas *justo antes del impacto,* $(v_A)_1 - (v_B)_1$. Al medir tales velocidades relativas de manera experimental, se ha visto que e varía considerablemente con la velocidad de impacto, así como con el tamaño y la forma de los cuerpos que chocan. Por lo tanto, el coeficiente de restitución es confiable sólo cuando se utiliza con datos que representen con fidelidad las condiciones que se sabía existían cuando se tomaron las mediciones. Por lo general, e tiene un valor entre cero y uno, y debemos estar al tanto del significado físico de estos dos límites.

Impacto elástico ($e = 1$). Si la colisión entre las dos partículas es *perfectamente elástica*, el impulso de deformación ($\int \mathbf{P}\, dt$) es igual y opuesto al impulso de restitución ($\int \mathbf{R}\, dt$). Aun cuando en realidad esto nunca puede ser, $e = 1$ en el caso de una colisión elástica.

Impacto plástico ($e = 0$). Se dice que el impacto es inelástico *o plástico* cuando $e = 0$. En este caso, no hay impulso de restitución ($\int \mathbf{R}\, dt = \mathbf{0}$), por lo que, después de la colisión, ambas partículas se acoplan o *permanecen en contacto* y se mueven con una velocidad común.

Por la derivación anterior, es evidente que no puede utilizarse el principio de trabajo y energía en el análisis de problemas de impacto, ya que no es posible saber cómo varían o se desplazan las *fuerzas internas* de deformación y restitución durante la colisión. Sin embargo, al conocer las velocidades de las partículas antes y después de la colisión, la pérdida de energía durante la colisión se calcula como la diferencia de la energía cinética de las partículas. Esta pérdida de energía, $\sum U_{1-2} = \sum T_2 - \sum T_1$, ocurre porque una parte de la energía cinética de la partícula se transforma en energía térmica, y porque también genera ruido y una deformación localizada del material cuando ocurre la colisión. En particular, si el impacto es *perfectamente elástico*, no se pierde energía en la colisión; mientras que si es *plástico*, la pérdida de energía durante la colisión es máxima.

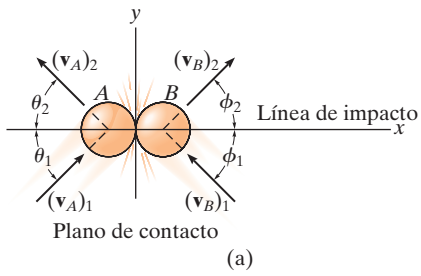
La mecánica del pool depende de la aplicación de la conservación de la cantidad de movimiento y del coeficiente de restitución (© R. C. Hibbeler)

Procedimiento para el análisis (impacto central)

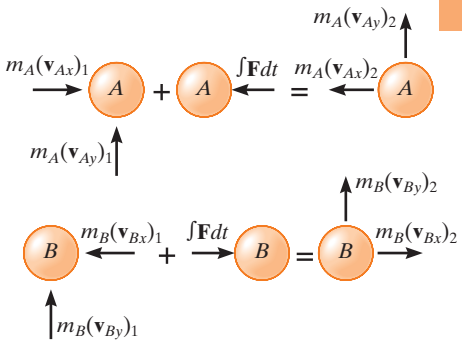
En la mayoría de los casos, se tienen que determinar las *velocidades finales* de las dos partículas, *justo después* de que se someten a un impacto central directo. Siempre que se conozcan el coeficiente de restitución, la masa y la velocidad inicial de cada partícula, *justo antes* de que se conozca el impacto, la solución de este problema se obtiene mediante las siguientes dos ecuaciones.

- La conservación de la cantidad de movimiento es aplicable al sistema de partículas, $\sum mv_1 = \sum mv_2$.
- El coeficiente de restitución, $e = [(v_B)_2 - (v_A)_2]/[(v_A)_1 - (v_B)_1]$, relaciona las velocidades relativas de las partículas a lo largo de la línea de impacto, justo antes y después de la colisión.

Cuando se aplican estas dos ecuaciones, puede suponerse el sentido de una velocidad desconocida. Si la solución da una magnitud negativa, la velocidad actúa en el sentido opuesto.



(a)



(b)

Fig. 15-15

Impacto oblicuo. Cuando entre dos partículas lisas ocurre un impacto oblicuo, éstas se apartan una de otra con velocidades de direcciones y magnitudes desconocidas. Siempre que se conozcan las velocidades iniciales, habrá cuatro incógnitas en el problema. Como se muestra en la figura 15-15*a*, estas incógnitas pueden representarse como $(v_A)_2$, $(v_B)_2$, θ_2 y ϕ_2, o bien, como las componentes x y y de las velocidades finales.

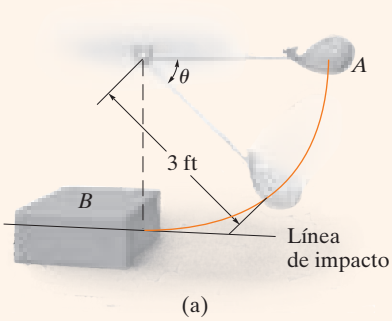
Procedimiento para el análisis (impacto oblicuo)

Si el eje y se establece dentro del plano de contacto y el eje x a lo largo de la línea de impacto, las fuerzas impulsoras de deformación y restitución actúan *sólo en la dirección x* (fig. 15-15*b*). Al descomponer la velocidad o los vectores de cantidad de movimiento en componentes a lo largo de los ejes x y y (fig. 15-15*b*), entonces es posible escribir cuatro ecuaciones escalares independientes para determinar $(v_{Ax})_2$, $(v_{Ay})_2$, $(v_{Bx})_2$, y $(v_{By})_2$.

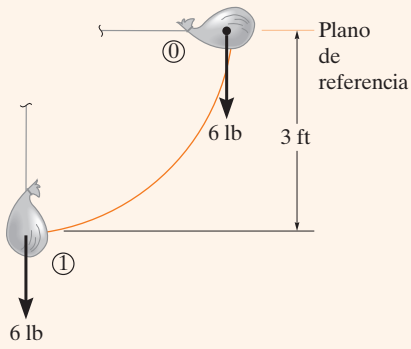
- La cantidad de movimiento del sistema se conserva *a lo largo de la línea de impacto*, eje x, de modo que $\sum m(v_x)_1 = \sum m(v_x)_2$.
- El coeficiente de restitución, $e = [(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2]/[(v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1]$, relaciona las *componentes* de las velocidades relativas de las partículas *a lo largo de la línea de impacto* (eje x).
- Si estas dos ecuaciones se resuelven simultáneamente, obtenemos $(v_{Ax})_2$ y $(v_{Bx})_2$.
- La cantidad de movimiento de la partícula A se conserva a lo largo del eje y, perpendicular a la línea de impacto, ya que no actúa ningún impulso en la partícula A en esta dirección. Por consiguiente, $m_A(v_{Ay})_1 = m_A(v_{Ay})_2$ o bien $(v_{Ay})_1 = (v_{Ay})_2$.
- La cantidad de movimiento de la partícula B se conserva a lo largo del eje y, perpendicular a la línea de impacto, puesto que no actúa ningún impulso en la partícula B en esta dirección. Por consiguiente, $(v_{By})_1 = (v_{By})_2$.

La aplicación de estas cuatro ecuaciones se ilustra en el ejemplo 15.11.

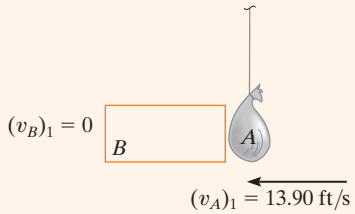
EJEMPLO 15.9



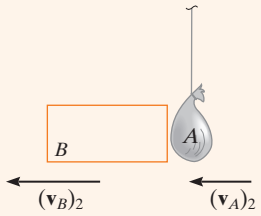
(a)



(b)



Justo antes del impacto



Justo después del impacto

(c)

Fig. 15-16

La bolsa A, que pesa 6 lb, se suelta del punto de reposo en la posición $\theta = 0°$, como se muestra en la figura 15-16*a*. Después de que cae a $\theta = 90°$, choca contra la caja B que pesa 18 lb. Si el coeficiente de restitución entre la bolsa y la caja es $e = 0.5$, determine las velocidades de la bolsa y la caja justo después del impacto. ¿Cuál es la pérdida de energía durante la colisión?

SOLUCIÓN

Este problema implica impacto central. ¿Por qué? Antes de analizar la mecánica del impacto, primero se requiere obtener la velocidad de la bolsa *justo antes* de que choque contra la caja.

Conservación de la energía. Con el plano de referencia en $\theta = 0°$ (fig. 15-16*b*), obtenemos

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{6\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(v_A)_1^2 - 6\text{ lb}(3\text{ ft}); (v_A)_1 = 13.90\text{ ft/s}$$

Conservación de la cantidad de movimiento. Después del impacto supondremos que A y B se desplazan a la izquierda. Si aplicamos la conservación de la cantidad de movimiento al sistema (fig. 15-16*c*),

$$(\pm) \qquad m_B(v_B)_1 + m_A(v_A)_1 = m_B(v_B)_2 + m_A(v_A)_2$$

$$0 + \left(\frac{6\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(13.90\text{ ft/s}) = \left(\frac{18\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(v_B)_2 + \left(\frac{6\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(v_A)_2$$

$$(v_A)_2 = 13.90 - 3(v_B)_2 \qquad (1)$$

Coeficiente de restitución. Al darnos cuenta de que para que ocurra la separación después de la colisión $(v_B)_2 > (v_A)_2$ (fig. 15-16*c*), entonces

$$(\pm) \qquad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}; \qquad 0.5 = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{13.90\text{ ft/s} - 0}$$

$$(v_A)_2 = (v_B)_2 - 6.950 \qquad (2)$$

Al resolver las ecuaciones 1 y 2 simultáneamente se obtiene

$$(v_A)_2 = -1.74\text{ ft/s} = 1.74\text{ ft/s} \rightarrow \quad \text{y} \quad (v_B)_2 = 5.21\text{ ft/s} \leftarrow \qquad \textit{Resp.}$$

Pérdida de energía. Al aplicar el principio de trabajo y energía a la bolsa y la caja justo antes y después de la colisión, tenemos

$$\Sigma U_{1-2} = T_2 - T_1;$$

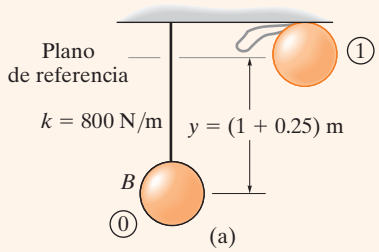
$$\Sigma U_{1-2} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{18\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(5.21\text{ ft/s})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{6\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(1.74\text{ ft/s})^2\right] - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{6\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(13.9\text{ ft/s})^2\right]$$

$$\Sigma U_{1-2} = -10.1\text{ ft}\cdot\text{lb} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: La pérdida de energía ocurre debido a la deformación inelástica durante la colisión.

EJEMPLO 15.10

La bola B de la figura 15-17*a* tiene una masa de 1.5 kg y cuelga del techo por medio de una cuerda elástica de 1 m de largo. Si la cuerda se *estira* hacia abajo 0.25 m y la bola se suelta del punto de reposo, determine cuánto se alarga la cuerda después de que la bola rebota en el techo. La rigidez de la cuerda es $k = 800$ N/m y el coeficiente de restitución entre la bola y el techo es $e = 0.8$. La bola experimenta un impacto central con el techo.



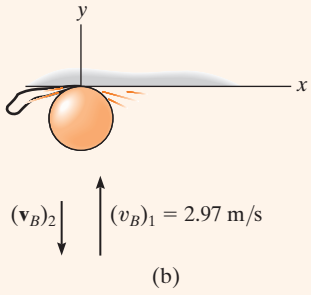
SOLUCIÓN

Primero debemos obtener la velocidad de la bola *justo antes* de que golpee el techo usando métodos de energía, y considerar en seguida el impulso y la cantidad de movimiento entre la bola y el techo y, por último, utilizar de nuevo métodos de energía para determinar el alargamiento de la cuerda.

Conservación de la energía. Con el plano de referencia situado como se muestra en la figura 15-17*a*, y habida cuenta de que inicialmente $y = y_0 = (1 + 0.25)$ m $= 1.25$ m, tenemos

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$
$$\tfrac{1}{2}m(v_B)_0^2 - W_B y_0 + \tfrac{1}{2}ks^2 = \tfrac{1}{2}m(v_B)_1^2 + 0$$
$$0 - 1.5(9.81)\text{N}(1.25\text{ m}) + \tfrac{1}{2}(800\text{ N/m})(0.25\text{ m})^2 = \tfrac{1}{2}(1.5\text{ kg})(v_B)_1^2$$
$$(v_B)_1 = 2.968\text{ m/s}\uparrow$$

Ahora se considerará la interacción de la bola con el techo mediante los principios de impacto.* Como una parte desconocida de la masa del techo interviene en el impacto, no se escribirá la conservación de la cantidad de movimiento del sistema bola-techo. La "velocidad" de esta parte del techo es cero, ya que se supone que él (o la Tierra) permanece(n) en reposo antes y después del impacto.



Coeficiente de restitución. Figura 15-17*b*.

$$(+\uparrow)\quad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}; \qquad 0.8 = \frac{(v_B)_2 - 0}{0 - 2.968\text{ m/s}}$$
$$(v_B)_2 = -2.374\text{ m/s} = 2.374\text{ m/s}\downarrow$$

Conservación de la energía. El alargamiento máximo s_3 en la cuerda se determina al aplicar de nuevo la ecuación de conservación de la energía a la bola justo después de la colisión. Suponga que $y = y_3 = (1 + s_3)$ m (fig. 15-17*c*), entonces

$$T_2 + V_2 = T_3 + V_3$$
$$\tfrac{1}{2}m(v_B)_2^2 + 0 = \tfrac{1}{2}m(v_B)_3^2 - W_B y_3 + \tfrac{1}{2}ks_3^2$$
$$\tfrac{1}{2}(1.5\text{ kg})(2.37\text{ m/s})^2 = 0 - 9.81(1.5)\text{ N}(1\text{ m} + s_3) + \tfrac{1}{2}(800\text{ N/m})s_3^2$$
$$400s_3^2 - 14.715s_3 - 18.94 = 0$$

Al resolver esta ecuación cuadrática para la raíz positiva se obtiene

$$s_3 = 0.237\text{ m} = 237\text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

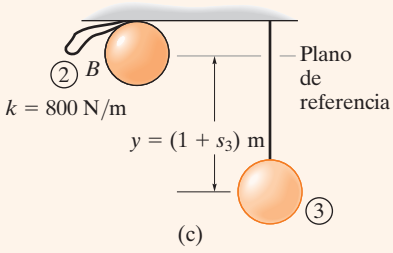
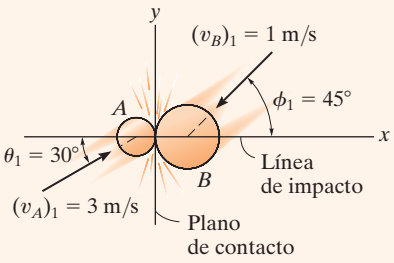


Fig. 15-17

*El peso de la bola se considera una fuerza no impulsora.

EJEMPLO 15.11



(a)

Dos discos lisos A y B de 1 kg y 2 kg de masa, respectivamente, chocan a las velocidades que se muestran en la figura 15-18*a*. Si su coeficiente de restitución es $e = 0.75$, determine las componentes x y y de la velocidad final de cada disco, justo después de la colisión.

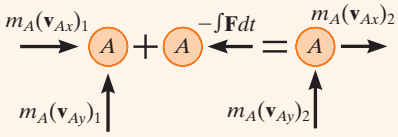
SOLUCIÓN

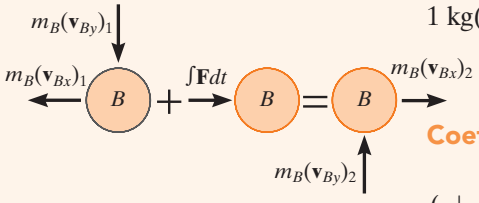
Este problema implica *impacto oblicuo*. ¿Por qué? Para resolverlo, establecemos los ejes x y y a lo largo de la línea de impacto y del plano de contacto, respectivamente (fig. 15-18*a*).

Al descomponer cada una de las velocidades iniciales en componentes x y y, tenemos

$$(v_{Ax})_1 = 3\cos 30° = 2.598 \text{ m/s} \qquad (v_{Ay})_1 = 3 \operatorname{sen} 30° = 1.50 \text{ m/s}$$
$$(v_{Bx})_1 = -1\cos 45° = -0.7071 \text{ m/s} \qquad (v_{By})_1 = -1 \operatorname{sen} 45° = -0.7071 \text{ m/s}$$

Se *supone* que después de la colisión las cuatro componentes de velocidad desconocidos *actúan en las direcciones positivas* (fig. 15-18*b*). Como el impacto ocurre en la dirección x (línea de impacto), la conservación de la cantidad de movimiento de *ambos* se aplica en esta dirección. ¿Por qué?





(b)

Conservación de la cantidad de movimiento en la dirección "x". Si nos remitimos a los diagramas de cantidad de movimiento,

$$m_A(v_{Ax})_1 + m_B(v_{Bx})_1 = m_A(v_{Ax})_2 + m_B(v_{Bx})_2$$
$$1 \text{ kg}(2.598 \text{ m/s}) + 2 \text{ kg}(-0.707 \text{ m/s}) = 1 \text{ kg}(v_{Ax})_2 + 2 \text{ kg}(v_{Bx})_2$$
$$(v_{Ax})_2 + 2(v_{Bx})_2 = 1.184 \qquad (1)$$

Coeficiente de restitución (x).

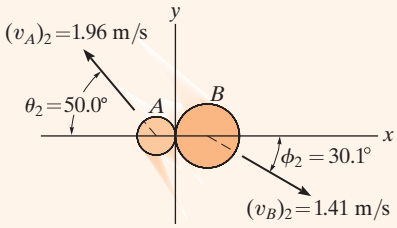
$$(\pm) \quad e = \frac{(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2}{(v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1};\ 0.75 = \frac{(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2}{2.598 \text{ m/s} - (-0.7071 \text{ m/s})}$$
$$(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2 = 2.482 \qquad (2)$$

Al resolver las ecuaciones 1 y 2 para $(v_{Ax})_2$ y $(v_{Bx})_2$ se obtiene

$$(v_{Ax})_2 = -1.26 \text{ m/s} = 1.26 \text{ m/s} \leftarrow \qquad (v_{Bx})_2 = 1.22 \text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

Conservación de la cantidad de movimiento en la dirección "y". La cantidad de movimiento de *cada disco se conserva* en la dirección y (plano de contacto), pues los discos son lisos y, por consiguiente, en esta dirección *no* actúa ningún impulso externo. De la figura 15-18*b*,

$$(+\uparrow)\ m_A(v_{Ay})_1 = m_A(v_{Ay})_2; \quad (v_{Ay})_2 = 1.50 \text{ m/s} \uparrow \qquad \textit{Resp.}$$
$$(+\uparrow)\ m_B(v_{By})_1 = m_B(v_{By})_2; \quad (v_{By})_2 = -0.707 \text{ m/s} = 0.707 \text{ m/s} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$



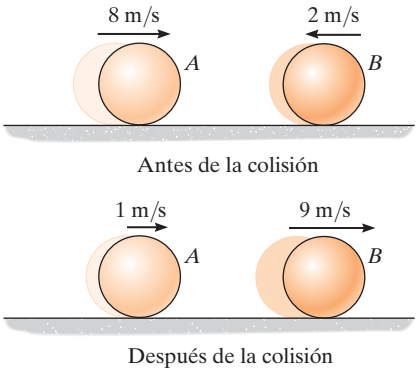
(c)

Fig. 15-18

NOTA: Demuestre que cuando se suman las componentes de velocidad vectorialmente, se obtienen los resultados mostrados en la figura 15-18*c*.

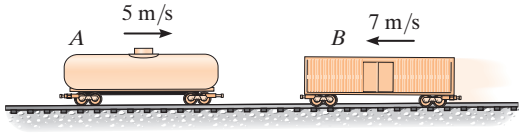
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F15-13. Determine el coeficiente de restitución e entre la bola A y bola B. Se muestran las velocidades de A y B antes y después de la colisión.



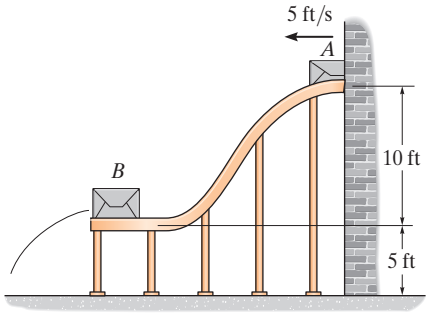
Prob. F15-13

F15-14. El carro tanque A de 15 Mg y el vagón de carga B de 25 Mg viajan uno hacia el otro a las velocidades indicadas. Si el coeficiente de restitución entre los parachoques es $e = 0.6$, determine la velocidad de cada carro justo después de la colisión.



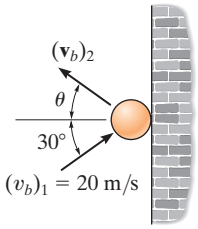
Prob. F15-14

F15-15. La rapidez del paquete A de 30 lb es de 5 ft/s al entrar a la rampa lisa. Cuando resbala hacia abajo de la rampa, choca contra el paquete B de 80 lb, el cual inicialmente está en reposo. Si el coeficiente de restitución entre A y B es $e = 0.6$, determine la velocidad de B justo después del impacto.



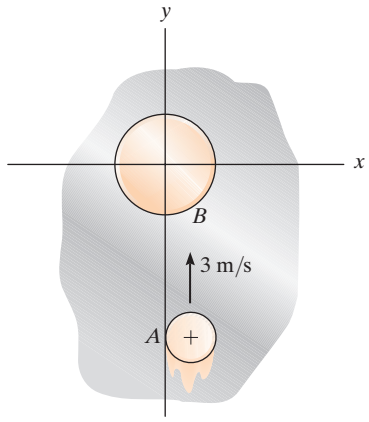
Prob. F15-15

F15-16. La bola choca contra la pared lisa a una velocidad de $(v_b)_1 = 20$ m/s. Si el coeficiente de restitución entre la bola y la pared es $e = 0.75$, determine la velocidad de la bola justo después del impacto.



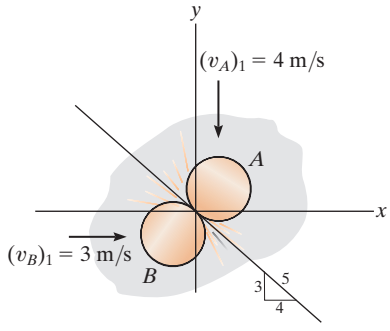
Prob. F15-16

F15-17. El disco A tiene una masa de 2 kg y se desliza sobre el plano horizontal liso con una velocidad de 3 m/s. El disco B tiene una masa de 11 kg y está inicialmente en reposo. Si, después del impacto, A tiene una velocidad de 1 m/s, paralela al eje x positivo, determine la rapidez del disco B después del impacto.



Prob. F15-17

F15-18. Dos discos A y B tienen cada uno una masa de 1 kg y las velocidades iniciales mostradas justo antes de que choquen. Si el coeficiente de restitución es $e = 0.5$, determine la rapidez de cada uno justo después del impacto.

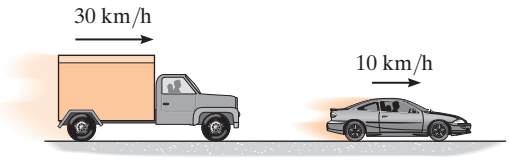


Prob. F15-18

PROBLEMAS

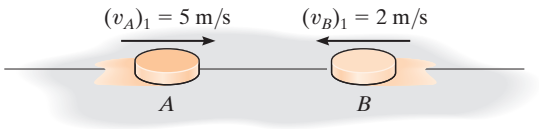
15-58. Un disco tiene una masa de 250 g, y se desliza sobre una superficie horizontal *lisa* con una velocidad inicial $(v_A)_1 = 2$ m/s. Tiene una colisión directa contra el disco B, que tiene una masa de 175 g y está originalmente en reposo. Si ambos discos tienen el mismo tamaño y la colisión es perfectamente elástica ($e = 1$), determine la velocidad de cada disco justo después de la colisión. Demuestre que la energía cinética de los discos antes y después de la colisión es la misma.

15-59. El camión de 5 Mg y el automóvil de 2 Mg viajan a las velocidades de rodamiento libre que se indican justo antes de chocar. Después de la colisión, el automóvil se desplaza a 15 km/h hacia la derecha *con respecto al* camión. Determine el coeficiente de restitución entre el camión y el automóvil, así como la pérdida de energía a causa de la colisión.



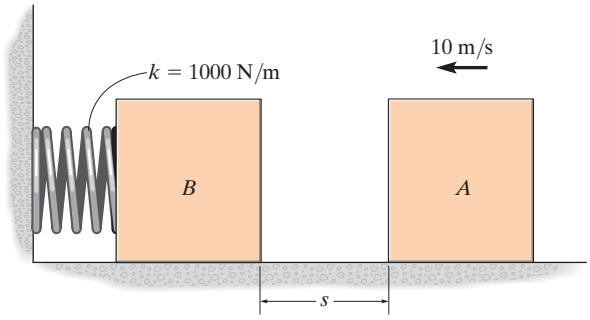
Prob. 15-59

***15-60.** El disco A tiene una masa de 2 kg y se desliza hacia adelante sobre la superficie *lisa* con una velocidad $(v_A)_1 = 5$ m/s cuando golpea el disco B de 4 kg, el cual se desliza hacia A con velocidad $(v_B)_1 = 2$ m/s, con un impacto central directo. Si el coeficiente de restitución entre los discos es $e = 0.4$, calcule las velocidades de A y B justo después de la colisión.



Prob. 15-60

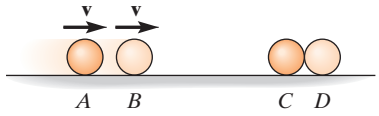
15-61. El bloque A de 15 kg se desliza sobre la superficie cuyo $\mu_k = 0.3$. El bloque tiene una velocidad $v = 10$ m/s cuando $s = 4$ m a partir del bloque B de 10 kg. Si el resorte sin estirar tiene una rigidez $k = 1000$ N/m, determine la máxima compresión del resorte debida a la colisión. Considere que $e = 0.6$.



Prob. 15-61

15-62. Los cuatro bolas lisas tienen cada una la misma masa m. Si A y B ruedan hacia adelante con velocidad $\mathbf{v}$ y golpean a C, explique por qué después de la colisión C y D se mueven cada una con una velocidad $\mathbf{v}$. ¿Por qué D no se mueve con velocidad $2\mathbf{v}$? La colisión es elástica, $e = 1$. No tome en cuenta el tamaño de cada bola.

15-63. Las cuatro bolas tienen cada una la misma masa m. Si A y B ruedan hacia adelante con velocidad $\mathbf{v}$ y golpean a C, determine la velocidad de cada bola después de las tres primeras colisiones. Considere $e = 0.5$ entre cada bola.



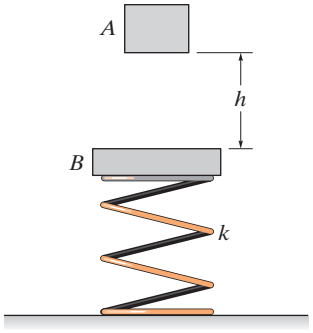
Probs. 15-62/63

***15-64.** La bola A tiene una masa de 3 kg y se mueve con una velocidad de 8 m/s cuando choca de manera directa contra la bola B, que tiene una masa de 2 kg y se mueve con una velocidad de 4 m/s. Si $e = 0.7$ determine la velocidad de cada bola justo después de la colisión. No tome en cuenta el tamaño de las bolas.

Prob. 15-64

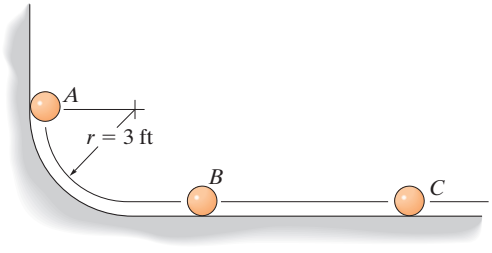
15-65. Una bola A de 1 lb viaja horizontalmente a 20 ft/s cuando golpea un bloque B de 10 lb que está en reposo. Si el coeficiente de restitución entre A y B es $e = 0.6$, y el coeficiente de fricción cinética entre el plano y el bloque es $\mu_k = 0.4$, determine el tiempo necesario para que el bloque B detenga su deslizamiento.

15-66. El bloque A, que tiene una masa m, se libera desde el reposo, cae una distancia h y golpea la placa B que tiene una masa $2m$. Si el coeficiente de restitución entre A y B es e, determine la velocidad de la placa justo después de la colisión. El resorte tiene una rigidez k.



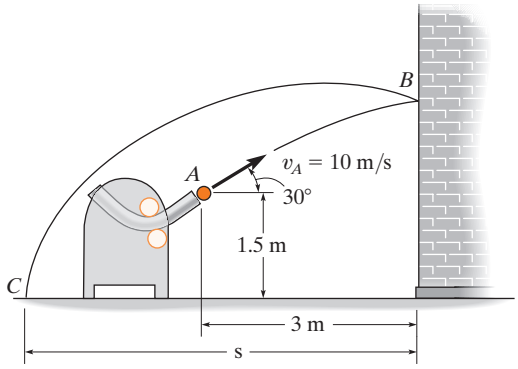
Prob. 15-66

15-67. Cada una de las tres bolas pesa 0.5 lb y tiene un coeficiente de restitución de $e = 0.85$. Si la bola A se libera desde el reposo y golpea la bola B y, luego, la bola B golpea la bola C, determine la velocidad de cada bola después de haberse producido la segunda colisión. Las bolas se deslizan sin fricción.



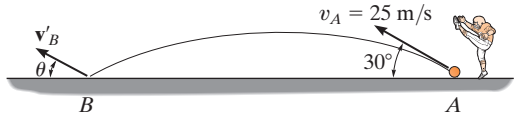
Prob. 15-67

***15-68.** Una máquina de lanzar dispara la pelota de 0.5 kg hacia la pared con una velocidad inicial $v_A = 10$ m/s como se muestra. Determine (a) la velocidad a la que choca contra la pared en B, (b) la velocidad a la que rebota de la pared si $e = 0.5$ y (c) la distancia s desde la pared hasta donde golpea el suelo en C.



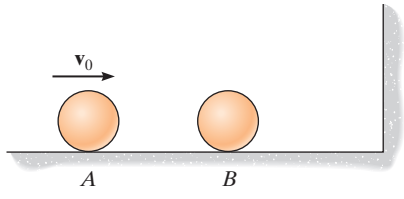
Prob. 15-68

15-69. Se patea un balón de 300 g con una velocidad de $v_A = 25$ m/s en el punto A, como se indica. Si el coeficiente de restitución entre el balón y el terreno es $e = 0.4$, determine la magnitud y la dirección θ de la velocidad del balón que rebota en B.



Prob. 15-69

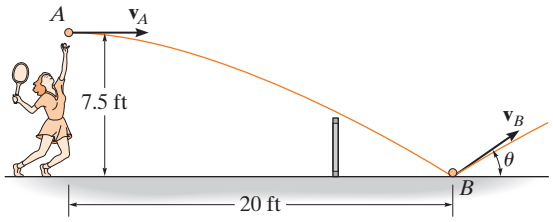
15-70. Cada una de las dos esferas lisas A y B tiene una masa m. Si a la esfera A se le da una velocidad v_0, mientras que la esfera B está en reposo, determine la velocidad de B justo después de que choca contra la pared. El coeficiente de restitución para cualquier colisión es e.



Prob. 15-70

15-71. Se observó que una pelota de tenis, cuando se sirve horizontalmente a 7.5 ft por encima del suelo, golpea el suelo liso en B a 20 ft de distancia. Determine la velocidad inicial $\mathbf{v}_A$ de la pelota y la velocidad $\mathbf{v}_B$ (y θ) de la pelota, justo después de golpear la cancha en B. Considere que $e = 0.7$.

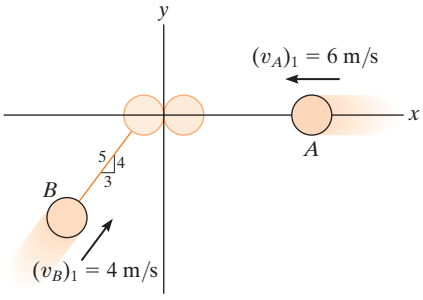
***15-72.** La pelota de tenis es golpeada con una velocidad horizontal $\mathbf{v}_A$, choca contra el suelo liso en B y rebota hacia arriba a $\theta = 30°$. Determine la velocidad inicial $\mathbf{v}_A$, la velocidad final $\mathbf{v}_B$ y el coeficiente de restitución entre la pelota y el suelo.



Probs. 15-71/72

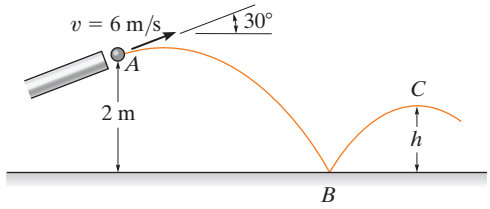
15-73. Cada uno de los dos discos lisos A y B tiene una masa de 0.5 kg. Si ambos discos se mueven con las velocidades indicadas al chocar, determine sus velocidades finales justo después de la colisión. El coeficiente de restitución es $e = 0.75$.

15-74. Cada uno de los dos discos lisos A y B tiene una masa de 0.5 kg. Ambos discos se mueven con las velocidades mostradas al chocar. Determine el coeficiente de restitución entre los discos si, después de la colisión, B viaja a lo largo de una línea, 30° en sentido antihorario desde el eje y.



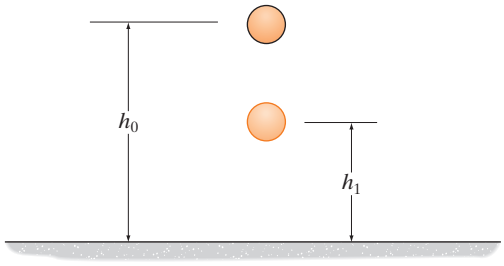
Probs. 15-73/74

15-75. La bola de 0.5 kg se dispara desde el tubo en A con una velocidad de $v = 6$ m/s. Si el coeficiente de restitución entre la bola y la superficie es $e = 0.8$, determine la altura h después de que rebota en la superficie.



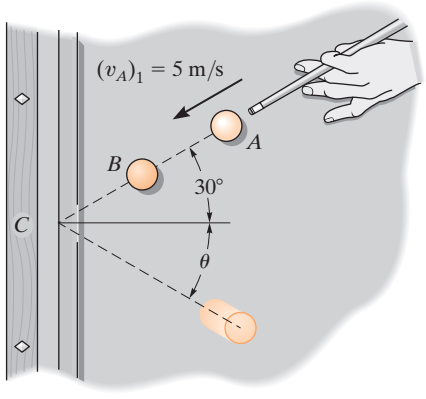
Prob. 15-75

***15-76.** Una bola de masa m se deja caer verticalmente desde una altura h_0 por encima del suelo. Si rebota hasta una altura h_1, determine el coeficiente de restitución entre la bola y el suelo.



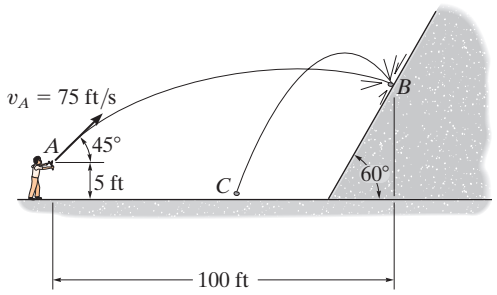
Prob. 15-76

15-77. A la bola blanca se le da una velocidad inicial $(v_A)_1 = 5$ m/s. Si choca directamente contra la bola B ($e = 0.8$), determine la velocidad de B y el ángulo θ justo después de que rebota en la banda en C ($e' = 0.6$). Cada bola tiene una masa de 0.4 kg. No tome en cuenta su tamaño.



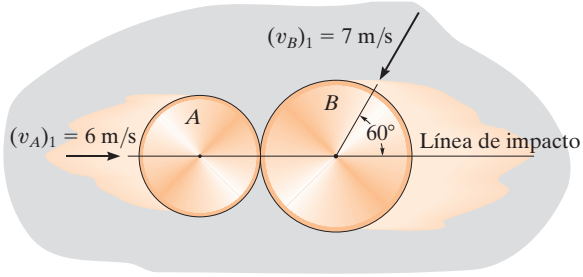
Prob. 15-77

15-78. Con el uso de un tirador, el niño dispara la canica de 0.2 lb contra el muro de concreto, golpeándolo en B. Si el coeficiente de restitución entre la canica y la pared es $e = 0.5$, determine la rapidez de la canica después de que rebota en la pared.



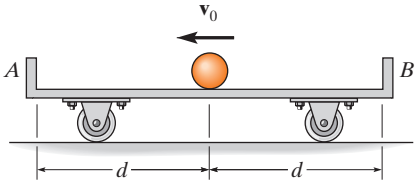
Prob. 15-78

15-79. Los dos discos A y B tienen una masa de 3 kg y 5 kg, respectivamente. Si chocan con las velocidades iniciales que se indican, determine sus velocidades justo después del impacto. El coeficiente de restitución es $e = 0.65$.



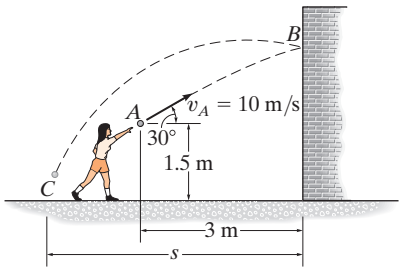
Prob. 15-79

***15-80.** A una bola de tamaño despreciable y masa m se le da una velocidad de $\mathbf{v}_0$ sobre el centro del carro que tiene una masa M y está originalmente en reposo. Si el coeficiente de restitución entre la bola y las paredes A y B es e, determine la velocidad de la bola y el carro justo después de que la bola golpea A. También, determine el tiempo total necesario para que la bola golpee A, rebote, después golpee B, rebote, y regrese al centro del carro. Desprecie la fricción.



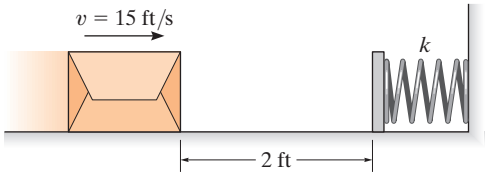
Prob. 15-80

15-81. La niña lanza la pelota de 0.5 kg hacia la pared con una velocidad inicial $v_A = 10$ m/s. Determine (a) la velocidad a que la pelota choca contra la pared en B, (b) a qué velocidad rebota en la pared si el coeficiente de restitución es $e = 0.5$, y (c) la distancia s desde la pared hasta donde choca contra el suelo en C.



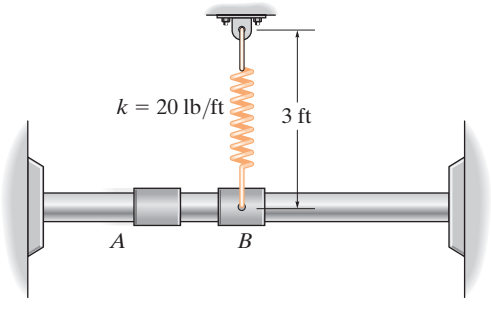
Prob. 15-81

15-82. La caja de 20 lb se desliza sobre la superficie cuyo $\mu_k = 0.3$. La caja tiene una velocidad $v = 15$ ft/s cuando está a 2 ft de la placa. Si golpea la placa lisa, que tiene un peso de 10 lb y se mantiene en posición mediante un resorte sin estirar de rigidez $k = 400$ lb/ft, determine la máxima compresión impartida al resorte. Considere que $e = 0.8$ entre la caja y la placa. Suponga que la placa se desliza como si fuera lisa.



Prob. 15-82

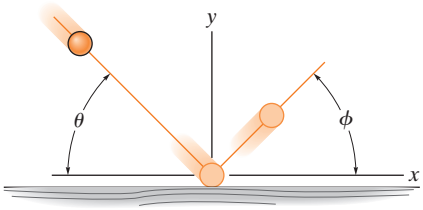
15-83. El collarín B de 10 lb se encuentra en reposo y, en la posición mostrada, el resorte no está estirado. Si otro collarín A de 1 lb lo golpea, de modo que B se desliza 4 ft sobre la varilla lisa antes de parar momentáneamente, determine la velocidad de A justo después del impacto, y la fuerza promedio ejercida entre A y B durante el impacto, si éste ocurre en 0.002 s. El coeficiente de restitución entre A y B es $e = 0.5$.



Prob. 15-83

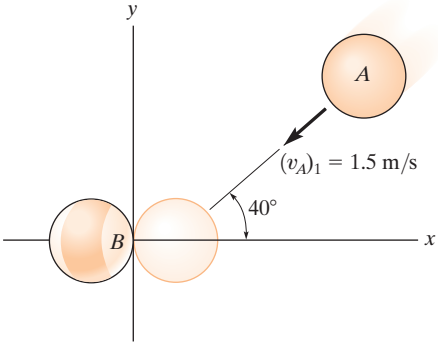
***15-84.** Se lanza una pelota sobre un piso áspero a un ángulo θ. Si rebota a un ángulo ϕ y el coeficiente de fricción cinética es μ, determine el coeficiente de restitución e. No tome en cuenta el tamaño de la pelota. *Sugerencia:* Muestre que durante el impacto, los impulsos promedio y las direcciones x y y se relacionan mediante $I_x = \mu I_y$. Como el instante del impacto es el mismo, $F_x\,\Delta t = \mu F_y\,\Delta t$ o $F_x = \mu F_y$.

15-85. Se lanza una pelota sobre un piso áspero a un ángulo $\theta = 45°$. Si rebota al mismo ángulo $\phi = 45°$, determine el coeficiente de fricción cinética entre el piso y la pelota. El coeficiente de restitución es $e = 0.6$. *Sugerencia:* Muestre que durante el impacto, los impulsos promedio en la direcciones x y están relacionados por $I_x = \mu I_y$. Como el instante del impacto es el mismo, $F_x\,\Delta t = \mu F_y\,\Delta t$ o $F_x = \mu F_y$.



Probs. 15-84/85

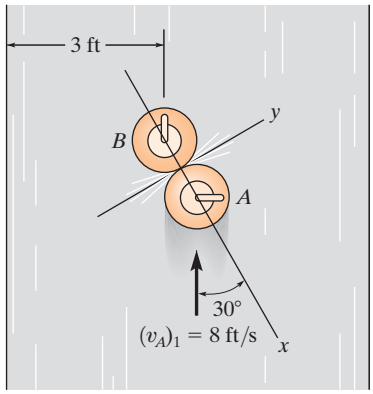
15-86. Dos bolas de billar lisas A y B tienen una masa de 200 g cada una. Si A golpea a B con una velocidad $(v_A)_1 = 1.5$ m/s como se muestra, determine sus velocidades finales justo después de la colisión. La bola B está originalmente en reposo y el coeficiente de restitución es $e = 0.85$. Desprecie el tamaño de cada bola.



Prob. 15-86

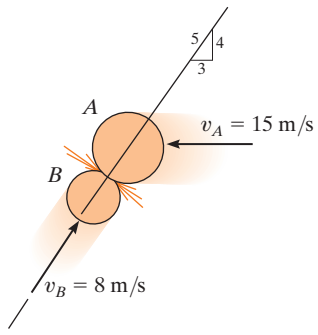
15-87. La "piedra" A usada en el deporte del *curling* se desliza sobre la pista de hielo y golpea otra "piedra" B como se indica. Si cada "piedra" es lisa y tiene un peso de 47 lb, y el coeficiente de restitución entre las "piedras" es $e = 0.8$, determine su velocidad justo después de la colisión. Inicialmente A tiene una velocidad de 8 ft/s y B está en reposo. Desprecie la fricción.

***15-88.** La "piedra" A usada en el deporte del *curling* se desliza sobre la pista de hielo y golpea otra "piedra" B como se muestra. Si cada "piedra" es lisa y tiene un peso de 47 lb, y el coeficiente de restitución entre las "piedras" es $e = 0.8$, determine el tiempo requerido justo después de la colisión para que B se deslice fuera de la pista. Esto requiere que la componente horizontal del desplazamiento sea de 3 ft.



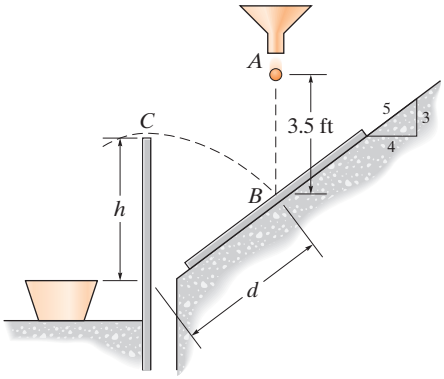
Probs. 15-87/88

15-89. Dos discos lisos A y B tienen las velocidades iniciales mostradas justo antes de chocar uno contra otro. Si tienen masas $m_A = 4$ kg y $m_B = 2$ kg, determine la rapidez de cada uno de ellos justo después del impacto. El coeficiente de restitución es $e = 0.8$.



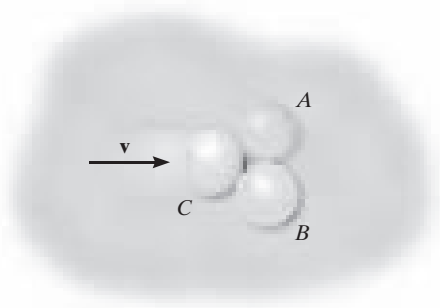
Prob. 15-89

15-90. Antes de que un arándano pueda llegar a su plato de comida, debe pasar una prueba de rebote que califica su calidad. Si se aceptan los arándanos que tienen un $e \geq 0.8$, determine las dimensiones d y h para la barrera, de modo que cuando un arándano caiga desde el reposo en A golpee la pendiente en B y rebote por encima de la barrera en C.



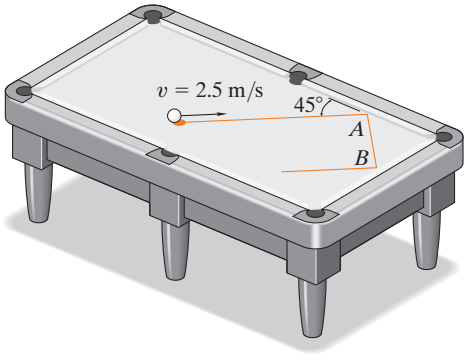
Prob. 15-90

***15-92.** Las dos bolas de billar A y B están originalmente en contacto entre sí, cuando una tercera bola C golpea cada una de ellas al mismo tiempo, como se indica en la figura. Si la bola C permanece en reposo después de la colisión, determine el coeficiente de restitución. Todas las bolas tienen la misma masa. Desprecie el tamaño de las bolas.



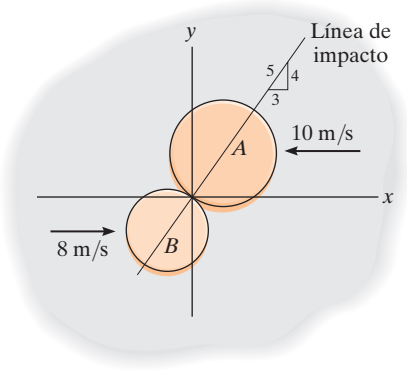
Prob. 15-92

15-91. La bola de billar de 200 g se mueve con una rapidez de 2.5 m/s cuando golpea el lado de la mesa de billar en A. Si el coeficiente de restitución entre la bola y el lado de la mesa es $e = 0.6$, determine la rapidez de la bola justo después de golpear la mesa dos veces, es decir, en A y luego en B. Desprecie el tamaño de la bola.



Prob. 15-91

15-93. Los discos A y B tienen una masa de 15 kg y 10 kg, respectivamente. Si se deslizan sobre un plano horizontal liso con las velocidades mostradas, determine la rapidez de cada disco justo después del impacto. El coeficiente de restitución entre ellos es $e = 0.8$.



Prob. 15-93

15.5 Cantidad de movimiento angular

La *cantidad de movimiento angular* de una partícula con respecto a un punto O se define como el "momento" de la cantidad de movimiento lineal de la partícula con respecto a O. Como este concepto es similar a determinar el momento de una fuerza con respecto a un punto, la cantidad de movimiento angular, $\mathbf{H}_O$, en ocasiones se conoce como el *momento de cantidad de movimiento*.

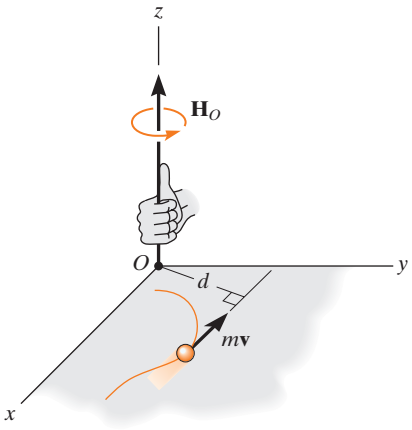


Fig. 15-19

Formulación escalar. Si una partícula se mueve a lo largo de una curva situada en el plano x-y (fig. 15-19), la cantidad de movimiento angular en cualquier instante se determina con respecto al punto O (en realidad el eje z) por medio de una formulación escalar. La *magnitud* de $\mathbf{H}_O$ es

$$(H_O)_z = (d)(mv) \tag{15-12}$$

Aquí, d es el brazo de momento o distancia perpendicular de O a la línea de acción de $m\mathbf{v}$. Unidades comunes para $(H_O)_z$ son kg · m^2/s o slug · ft^2/s. La *dirección* de $\mathbf{H}_O$ se define con la regla de la mano derecha. Como se muestra, la curva de los dedos de la mano derecha indica el sentido de rotación de $m\mathbf{v}$ con respecto a O, de manera que, en este caso, el pulgar (o $\mathbf{H}_O$) está dirigido perpendicular al plano x-y a lo largo del eje $+z$.

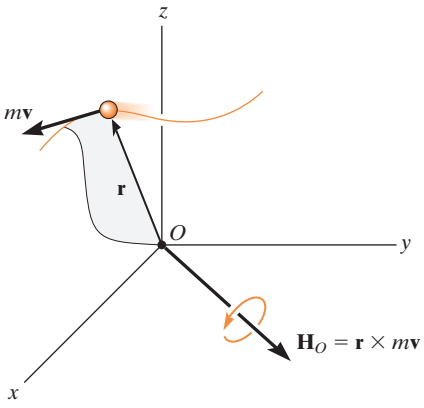


Fig. 15-20

Formulación vectorial. Si la partícula se mueve a lo largo de una curva espacial (fig. 15-20), el producto vectorial (o producto cruz) puede utilizarse para determinar la *cantidad de movimiento angular* con respecto a O. En este caso,

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \tag{15-13}$$

Aquí, $\mathbf{r}$ denota un vector de posición trazado del punto O a la partícula. Como se muestra en la figura, $\mathbf{H}_O$ es *perpendicular* al plano sombreado que contiene $\mathbf{r}$ y $m\mathbf{v}$.

Para evaluar el producto vectorial, $\mathbf{r}$ y $m\mathbf{v}$ deberán expresarse en función de sus componentes cartesianas, de modo que la cantidad de movimiento angular se obtiene al evaluar el determinante:

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \tag{15-14}$$

15.6 Relación entre el momento de una fuerza y la cantidad de movimiento angular

Los momentos con respecto al punto O de todas las fuerzas que actúan en la partícula de la figura 15-21*a* pueden relacionarse con su cantidad de movimiento angular aplicando la ecuación de movimiento. Si la masa de la partícula es constante, podemos escribir

$$\Sigma \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$$

Los momentos de las fuerzas con respecto al punto O se obtienen mediante una multiplicación de producto vectorial, en ambos lados de esta ecuación, por el vector de posición $\mathbf{r}$, el cual se mide con respecto al marco de referencia inercial x, y, z. Tenemos

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}$$

Según el apéndice B, la derivada de $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ se escribe como

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}$$

El primer término del lado derecho, $\dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} = m(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}$, puesto que el producto vectorial de un vector por sí mismo es cero. Por consiguiente, la ecuación anterior se escribe como

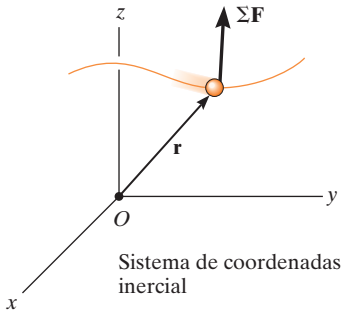
$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{15-15}$$

la cual establece que *el momento resultante con respecto al punto O, de todas las fuerzas que actúan en la partícula, es igual al cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular de la partícula con respecto al punto O.* Este resultado es similar a la ecuación 15-1, es decir,

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \tag{15-16}$$

Aquí $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$, de modo que *la fuerza resultante que actúa en la partícula es igual al cambio con respecto de su cantidad de movimiento angular*.

Por las derivaciones, se observa que las ecuaciones 15-15 y 15-16 en realidad son otra forma de formular la segunda ley de Newton del movimiento. En otras secciones de este libro se demostrará que estas ecuaciones tienen muchas aplicaciones prácticas cuando se amplían y aplican a problemas que incluyen ya sea un sistema de partículas o un cuerpo rígido.



Sistema de coordenadas inercial

(a)

Fig. 15-21

Sistema de partículas. Puede derivarse una ecuación con la misma forma que la ecuación 15-15 para el sistema de partículas que se muestra en la figura 15-21*b*. Las fuerzas que actúan en la partícula *i*ésima arbitraria del sistema son una *fuerza externa* resultante $\mathbf{F}_i$ y una *fuerza interna* resultante $\mathbf{f}_i$. Al expresar los momentos de estas fuerzas con respecto al punto O y con la ecuación 15-15, tenemos

$$(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = (\dot{\mathbf{H}}_i)_O$$

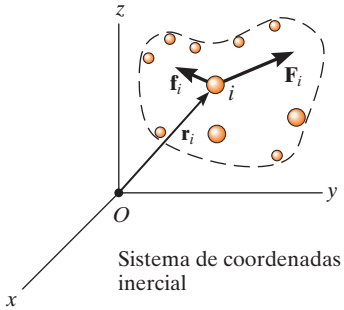
Aquí $(\dot{\mathbf{H}}_i)_O$ es el cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular de la partícula *i*ésima con respecto al punto O. Pueden escribirse ecuaciones similares para cada una de las demás partículas del sistema. Cuando los resultados se suman vectorialmente, se obtiene

$$\Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = \Sigma(\dot{\mathbf{H}}_i)_O$$

El segundo término es cero ya que las fuerzas internas ocurren en pares colineales iguales pero opuestos y, por consiguiente, el momento de cada par con respecto al punto O es cero. Si no se aplica la notación indexada, la ecuación anterior se escribe en forma simplificada como

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{15-17}$$

la cual establece que la *suma de los momentos con respecto al punto O, de todas las fuerzas externas que actúan en un sistema de partículas, es igual al cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular total del sistema con respecto al punto O*. Aunque, en este caso, O se eligió como el origen de las coordenadas, en realidad puede representar cualquier *punto fijo* en el marco de referencia inercial.



(b)

Fig. 15-21 (cont.)

EJEMPLO 15.12

La caja de la figura 15-22*a* tiene una masa m y desciende por la rampa circular lisa, de modo que cuando está en el ángulo θ su rapidez es v. Determine su cantidad de movimiento angular con respecto al punto O en este instante y la tasa de incremento de su rapidez, es decir, a_t.

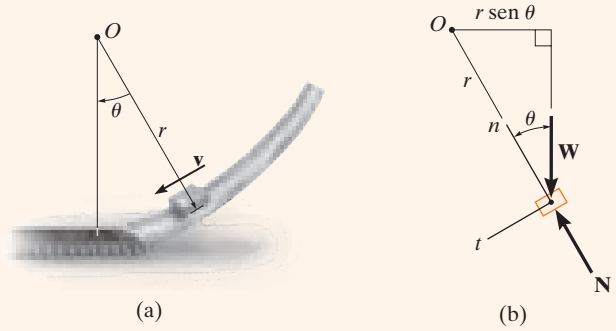


Fig. 15-22

SOLUCIÓN

Como **v** es tangente a la trayectoria, al aplicar la ecuación 15-12 la cantidad de movimiento angular es

$$H_O = r\,mv \curvearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

La tasa de incremento de su velocidad (dv/dt) se determina con la ecuación 15-15. En el diagrama de cuerpo libre de la caja (fig. 15-22*b*), se observa que sólo el peso $W = mg$ contribuye con un momento con respecto al punto O. Entonces,

$$\zeta + \Sigma M_O = \dot{H}_O; \qquad mg(r \operatorname{sen} \theta) = \frac{d}{dt}(r\,mv)$$

Como r y m son constantes,

$$mgr \operatorname{sen}\theta = r\,m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g \operatorname{sen}\theta \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Este mismo resultado se obtiene, desde luego, con la ecuación de movimiento aplicada en la dirección tangencial (fig. 15-22*b*), es decir,

$$+\swarrow \Sigma F_t = ma_t; \qquad mg \operatorname{sen}\theta = m\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = g \operatorname{sen}\theta \qquad \textit{Resp.}$$

15.7 Principio de impulso y cantidad de movimiento angulares

Principio de impulso y cantidad de movimiento angulares. Si la ecuación 15-15 se reescribe en la forma $\Sigma \mathbf{M}_O dt = d\mathbf{H}_O$ y se integra, al suponer que en el instante $t = t_1$, $\mathbf{H}_O = (\mathbf{H}_O)_1$ y en el instante $t = t_2$, $\mathbf{H}_O = (\mathbf{H}_O)_2$, tenemos

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O \, dt = (\mathbf{H}_O)_2 - (\mathbf{H}_O)_1$$

o bien,

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O \, dt = (\mathbf{H}_O)_2 \tag{15-18}$$

Esta ecuación se conoce como el *principio de impulso y cantidad de movimiento angulares*. Los momentos angulares inicial y final $(\mathbf{H}_O)_1$ y $(\mathbf{H}_O)_2$ se definen como el momento de la cantidad de movimiento lineal de la partícula ($\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$) en los instantes t_1 y t_2, respectivamente. El segundo término del lado izquierdo, $\Sigma \int \mathbf{M}_O dt$, se llama *impulso angular*. Se determina al integrar, con respecto al tiempo, los momentos de todas las fuerzas que actúan en la partícula durante el lapso de tiempo t_1 a t_2. Como el momento de una fuerza con respecto al punto O es $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, el impulso angular se expresa en forma vectorial como

$$\text{impulso angular} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O \, dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \, dt \tag{15-19}$$

Aquí $\mathbf{r}$ es un vector de posición que se extiende desde el punto O hasta cualquier punto de la línea de acción de $\mathbf{F}$.

Asimismo, al utilizar la ecuación 15-18, el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares para un sistema de partículas se escribe como

$$\Sigma (\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O \, dt = \Sigma (\mathbf{H}_O)_2 \tag{15-20}$$

El primero y tercer términos de esta ecuación representan las cantidades de movimiento angular de todas las partículas [$\Sigma \mathbf{H}_O = \Sigma(\mathbf{r}_i \times m\mathbf{v}_i)$] en los instantes t_1 y t_2. El segundo término es la suma de los impulsos angulares dados a todas las partículas de t_1 a t_2. Recuerde que estos impulsos son creados sólo por los momentos de las fuerzas externas que actúan en el sistema donde, para la partícula *i*ésima, $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$.

Formulación vectorial. Con los principios de impulso y cantidad de movimiento es posible, por consiguiente, escribir dos ecuaciones que definan el movimiento de la partícula, es decir, las ecuaciones 15-3 y las ecuaciones 15-18, reformuladas como

$$\begin{aligned} m\mathbf{v}_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt &= m\mathbf{v}_2 \\ (\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt &= (\mathbf{H}_O)_2 \end{aligned} \tag{15-21}$$

Formulación escalar. En general, las ecuaciones anteriores pueden expresarse en su forma de componentes x, y, z. Si la partícula está limitada a moverse en el plano x-y, entonces es posible escribir tres ecuaciones escalares para expresar el movimiento, es decir,

$$\begin{aligned} m(v_x)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt &= m(v_x)_2 \\ m(v_y)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt &= m(v_y)_2 \\ (H_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_O\, dt &= (H_O)_2 \end{aligned} \tag{15-22}$$

Las dos primeras de estas ecuaciones representan el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales en las direcciones x y y, que se analizó en la sección 15.1, y la tercera ecuación representa el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares con respecto al eje z.

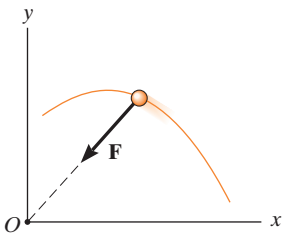


Fig. 15-23

Conservación de la cantidad de movimiento angular.

Cuando todos los impulsos angulares que actúan en la partícula son cero durante el tiempo t_1 a t_2, la ecuación 15-18 se reduce a la siguiente forma simplificada:

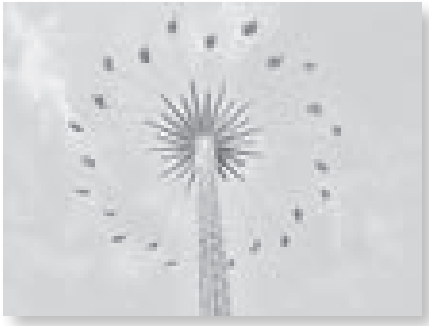
$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \tag{15-23}$$

Esta ecuación se conoce como la *conservación de la cantidad de movimiento angular* y establece que de t_1 a t_2 la cantidad de movimiento angular de la partícula permanece constante. Evidentemente, sin ningún impulso externo aplicado a la partícula, se conservarán tanto la cantidad de movimiento lineal como la cantidad de movimiento angular. En algunos casos, sin embargo, la cantidad de movimiento angular de la partícula se conservará, no así la cantidad de movimiento lineal. Un ejemplo de esto ocurre cuando la partícula se somete *sólo* a una *fuerza central* (vea la sección 13.7). Como se muestra en la figura 15-23, la fuerza central impulsora **F** siempre está dirigida hacia el punto O a medida que la partícula se mueve a lo largo de la trayectoria. Por consiguiente, el impulso (momento) angular creado por **F** con respecto al eje z siempre es cero y, entonces, la cantidad de movimiento angular de la partícula se conserva con respecto a este eje.

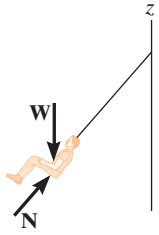
De acuerdo con la ecuación 15-20, también podemos escribir la conservación de la cantidad de movimiento angular para un sistema de partículas como

$$\Sigma(\mathbf{H}_O)_1 = \Sigma(\mathbf{H}_O)_2 \tag{15-24}$$

En este caso la suma debe incluir las cantidades de movimiento angular de todas las partículas del sistema.



(© Petra Hilke/Fotolia)



Siempre que se omita la resistencia del aire, los pasajeros de este juego mecánico se ven sometidos a una conservación del momento angular con respecto al eje de rotación z. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, la línea de acción de la fuerza normal **N** del asiento que actúa en el pasajero pasa por este eje y el peso del pasajero **W** es paralelo a él. Por lo tanto, alrededor del eje z no actúa ningún impulso.

Procedimiento para el análisis

Cuando se aplican los principios de impulso y cantidad de movimiento angulares, o la conservación de la cantidad de movimiento angular, se sugiere que se utilice el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre

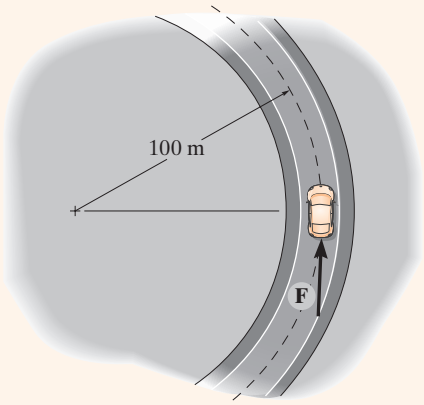
- Trace el diagrama de cuerpo libre de la partícula para determinar cualquier eje con respecto al cual se pueda conservar la cantidad de movimiento angular. Para que esto ocurra, los momentos de todas las fuerzas (o impulsos) deben ser paralelos o pasar a través del eje para crear un momento cero durante todo el periodo t_1 a t_2.
- También deben establecerse la dirección y el sentido de las velocidades inicial y final de la partícula.
- Un procedimiento alternativo sería trazar los diagramas de impulso y cantidad de movimiento de la partícula.

Ecuaciones de cantidad de movimiento

- Aplique el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares, $(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = (\mathbf{H}_O)_2$, o si es apropiado, la conservación de la cantidad de movimiento angular $(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$.

EJEMPLO 15.13

El automóvil de 1.5 Mg se desplaza por la curva como se muestra en la figura 15-24*a*. Si la fuerza de tracción de las ruedas en la carretera es $F = (150t^2)$ N, donde t está en segundos, determine la rapidez del automóvil cuando $t = 5$ s. En un principio el automóvil viaja a una rapidez de 5 m/s. Desprecie el tamaño del automóvil.



(a)

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del automóvil se muestra en la figura 15-24*b*. Si aplicamos el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares con respecto al eje z, entonces se eliminarán el impulso angular creado por el peso, la fuerza normal y la fuerza de fricción radial, ya que actúan paralelas al eje o pasan a través de él.

Principio de impulso y cantidad de movimiento angulares

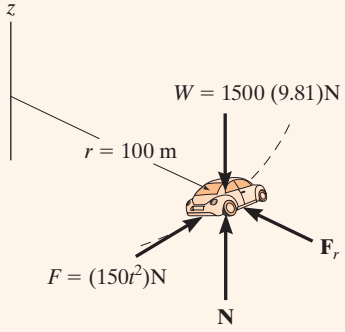
$$(H_z)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_z\, dt = (H_z)_2$$

$$r\, m_c(v_c)_1 + \int_{t_1}^{t_2} r\, F\, dt = r\, m_c(v_c)_2$$

$$(100\text{ m})(1500\text{ kg})(5\text{ m/s}) + \int_0^{5\text{ s}} (100\text{ m})[(150t^2)\text{ N}]\, dt = (100\text{ m})(1500\text{ kg})(v_c)_2$$

$$750(10^3) + 5000t^3\Big|_0^{5\text{ s}} = 150(10^3)(v_c)_2$$

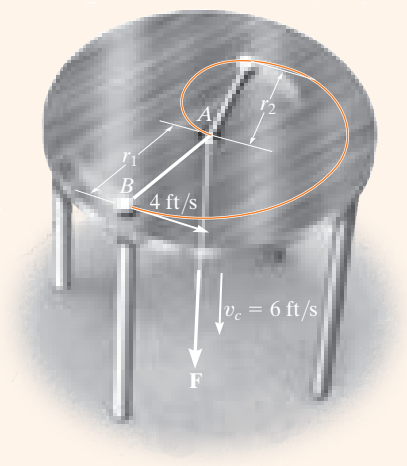
$$(v_c)_2 = 9.17\text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Fig. 15-24

EJEMPLO 15.14



(a)

La bola B de 0.8 lb, que se muestra en la figura 15-25*a*, está sujeta a una cuerda, la cual pasa a través del orificio A en una mesa lisa. Cuando la bola está a $r_1 = 1.75$ ft del orificio, gira alrededor de un círculo de modo que su rapidez es $v_1 = 4$ ft/s. Al aplicar la fuerza **F** la cuerda se jala hacia abajo a través del orificio con una rapidez constante $v_c = 6$ ft/s. Determine (a) la velocidad de la bola en el instante en que está a $r_2 = 0.6$ ft del orificio, y (b) la cantidad de trabajo realizada por **F** al acortarse la distancia radial de r_1 a r_2. Ignore el tamaño de la bola.

SOLUCIÓN

Parte (a) Diagrama de cuerpo libre Conforme la bola se mueve de r_1 a r_2 (fig. 15-25*b*), la fuerza **F** de la cuerda que actúa en la bola siempre pasa a través del eje z y el peso y $\mathbf{N}_B$ son paralelos a ella. De ahí que los momentos, o impulsos angulares creados por estas fuerzas, sean *cero* con respecto a este eje. Por consiguiente, la cantidad de movimiento angular se conserva con respecto al eje z.

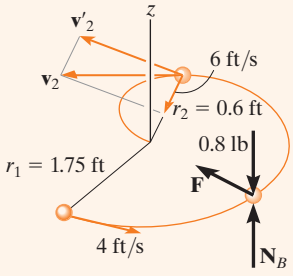
Conservación de la cantidad de movimiento angular. La velocidad de la bola $\mathbf{v}_2$ se divide en dos componentes. Se conoce la componente radial, 6 ft/s; sin embargo, produce una cantidad de movimiento angular cero con respecto al eje z. Por lo tanto,

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$$

$$r_1 m_B v_1 = r_2 m_B v_2'$$

$$1.75 \text{ ft}\left(\frac{0.8 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}\right) 4 \text{ ft/s} = 0.6 \text{ ft}\left(\frac{0.8 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}\right) v_2'$$

$$v_2' = 11.67 \text{ ft/s}$$



(b)

Fig. 15-25

La rapidez de la bola es, por consiguiente,

$$v_2 = \sqrt{(11.67 \text{ ft/s})^2 + (6 \text{ ft/s})^2}$$

$$= 13.1 \text{ ft/s}$$

Parte (b). La única fuerza que realiza trabajo en la bola es **F**. (La fuerza normal y el peso no se desplazan verticalmente.) Las energías cinéticas inicial y final de la bola se determinan, de manera que con el principio del trabajo y energía, tenemos

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

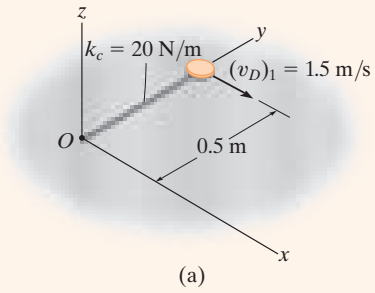
$$\frac{1}{2}\left(\frac{0.8 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}\right)(4 \text{ ft/s})^2 + U_F = \frac{1}{2}\left(\frac{0.8 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}\right)(13.1 \text{ ft/s})^2$$

$$U_F = 1.94 \text{ ft} \cdot \text{lb} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: La fuerza F no es constante porque la componente normal de aceleración, $a_n = v^2/r$, cambia a medida que r cambia.

EJEMPLO 15.15

El disco de 2 kg de la figura 15-26*a* descansa sobre una superficie horizontal lisa y está sujeto a una cuerda elástica, cuya rigidez es $k_c = 20$ N/m, e inicialmente no está estirada. Si al disco se le imparte una velocidad dada $(v_D)_1 = 1.5$ m/s, perpendicular a la cuerda, determine la razón a la cual la cuerda se estira y la rapidez del disco en el instante en que la cuerda se alarga es 0.2 m.



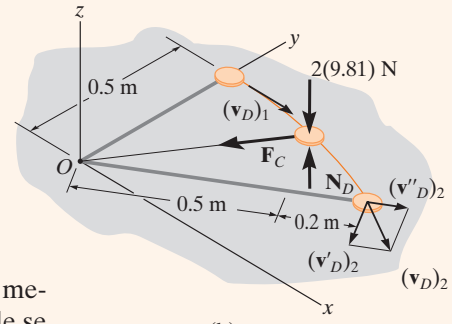
(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Después de que se lanza el disco, se desliza a lo largo de la trayectoria que se muestra en la figura 15-26*b*. Por inspección, se *conserva* la cantidad de movimiento angular con respecto al punto O (o el eje z), ya que ninguna de las fuerzas produce un impulso angular con respecto a este eje. Además, cuando la distancia es de 0.7 m, sólo la componente transversal $(\mathbf{v}'_D)_2$ produce cantidad de movimiento angular del disco con respecto a O.

Conservación de la cantidad de movimiento angular. La componente $(\mathbf{v}'_D)_2$ se obtiene aplicando la conservación de la cantidad de movimiento angular con respecto al eje O (el eje z).

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$$
$$r_1 m_D (v_D)_1 = r_2 m_D (v'_D)_2$$
$$0.5\text{ m}\,(2\text{ kg})(1.5\text{ m/s}) = 0.7\text{ m}(2\text{ kg})(v'_D)_2$$
$$(v'_D)_2 = 1.071\text{ m/s}$$



(b)

Fig. 15-26

Conservación de la energía. La rapidez del disco se obtiene mediante la ecuación de conservación de la energía en el punto donde se lanzó el disco y en el punto donde la cuerda se alargó 0.2 m.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$\tfrac{1}{2} m_D (v_D)_1^2 + \tfrac{1}{2} k x_1^2 = \tfrac{1}{2} m_D (v_D)_2^2 + \tfrac{1}{2} k x_2^2$$
$$\tfrac{1}{2}(2\text{ kg})(1.5\text{ m/s})^2 + 0 = \tfrac{1}{2}(2\text{ kg})(v_D)_2^2 + \tfrac{1}{2}(20\text{ N/m})(0.2\text{ m})^2$$
$$(v_D)_2 = 1.360\text{ m/s} = 1.36\text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

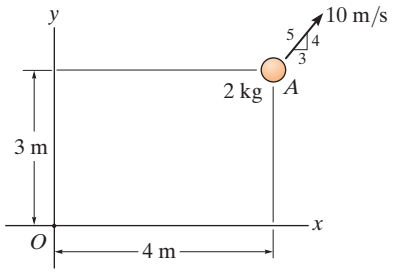
Ya determinado $(v_D)_2$ y su componente $(v'_D)_2$, la tasa de alargamiento de la cuerda, o componente radial, $(v''_D)_2$ se determina con el teorema de Pitágoras,

$$(v''_D)_2 = \sqrt{(v_D)_2^2 - (v'_D)_2^2}$$
$$= \sqrt{(1.360\text{ m/s})^2 - (1.071\text{ m/s})^2}$$
$$= 0.838\text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

15

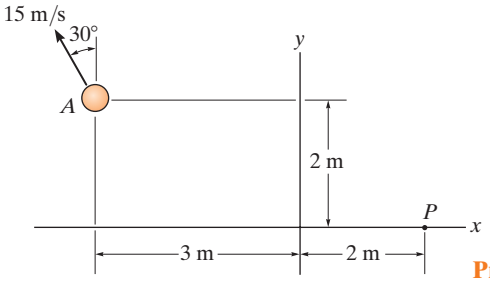
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F15-19. La partícula A de 2 kg tiene la velocidad que se muestra. Determine su cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ con respecto al punto O.



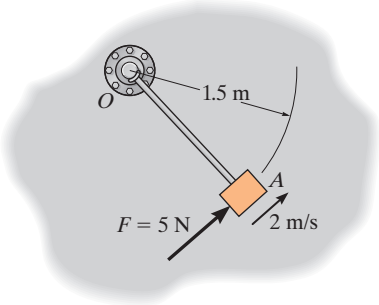
Prob. F15-19

F15-20. La partícula A de 2 kg tiene la velocidad que se muestra. Determine su cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_P$ con respecto al punto P.



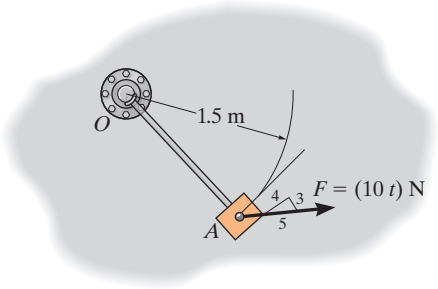
Prob. F15-20

F15-21. Inicialmente, el bloque de 5 kg gira con una velocidad constante de 2 m/s alrededor de la trayectoria circular con centro en O sobre el plano horizontal liso. Si se aplica una fuerza tangencial constante $F = 5$ N al bloque, determine su rapidez cuando $t = 3$ s. Ignore el tamaño del bloque.



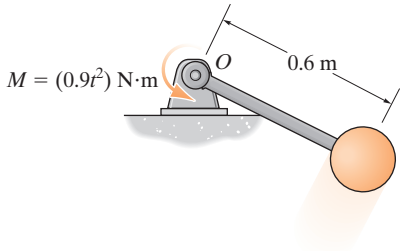
Prob. F15-21

F15-22. El bloque de 5 kg se mueve alrededor de la trayectoria circular con centro en O sobre el plano horizontal liso, cuando se somete a la fuerza $F = (10t)$N, donde t está en segundos. Si el bloque comienza a moverse a partir del punto de reposo, determine su rapidez cuando $t = 4$ s. Ignore el tamaño del bloque. La fuerza mantiene el mismo ángulo constante tangente a la trayectoria.



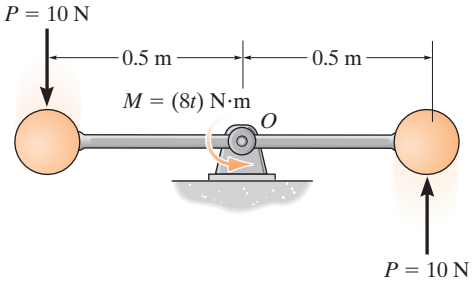
Prob. F15-22

F15-23. La esfera de 2 kg está unida a la varilla rígida ligera, la cual gira en el *plano horizontal* con centro en O. Si el sistema se somete a un momento de par $M = (0.9t^2)$ N · m, donde t está en segundos, determine la rapidez de la esfera en el instante $t = 5$ s a partir del punto de reposo.



Prob. F15-23

F15-24. Dos esferas idénticas de 10 kg están unidas a la varilla rígida ligera, la cual gira en el *plano horizontal* con centro en O. Si las esferas se someten a fuerzas tangenciales de $P = 10$ N y la varilla se somete a un momento de par $M = (0.8t)$ N · m, donde t está en segundos, determine la rapidez de las esferas en el instante $t = 4$ s. El sistema comienza a moverse a partir del punto de reposo. Ignore el tamaño de las esferas.

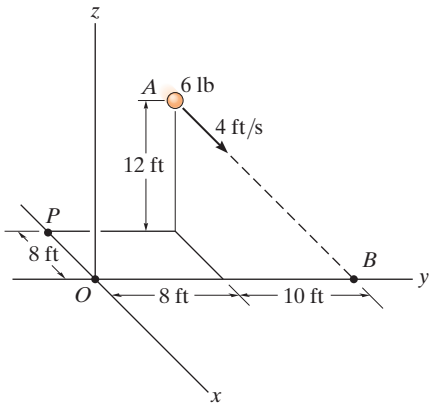


Prob. F15-24

PROBLEMAS

15-94. Determine el momento angular $\mathbf{H}_O$ de la partícula de 6 lb con respecto al punto O.

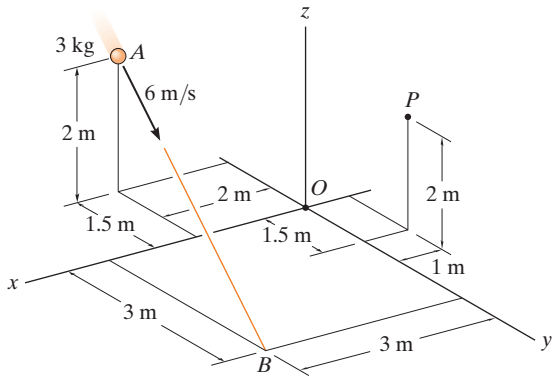
15-95. Determine el momento angular $\mathbf{H}_P$ de la partícula de 6 lb con respecto al punto P.



Probs. 15-94/95

15-98. Determine el momento angular $\mathbf{H}_O$ de la partícula de 3 kg con respecto al punto O.

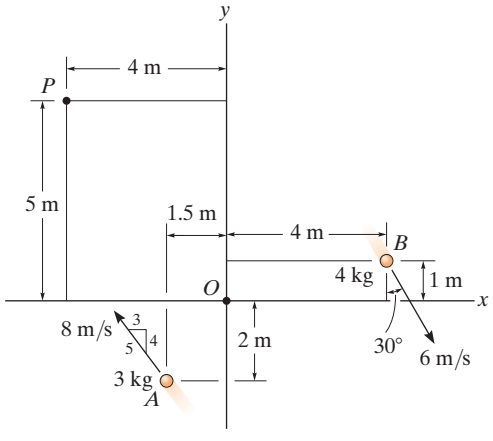
15-99. Determine el momento angular $\mathbf{H}_P$ de la partícula de 3 kg con respecto al punto P.



Probs. 15-98/99

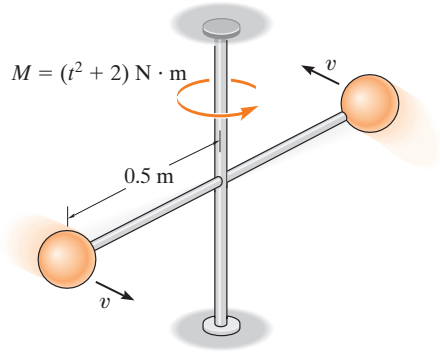
***15-96.** Determine el momento angular $\mathbf{H}_O$ de cada una de las dos partículas con respecto al punto O.

15-97. Determine el momento angular $\mathbf{H}_P$ de cada una de las dos partículas con respecto al punto P.



Probs. 15-96/97

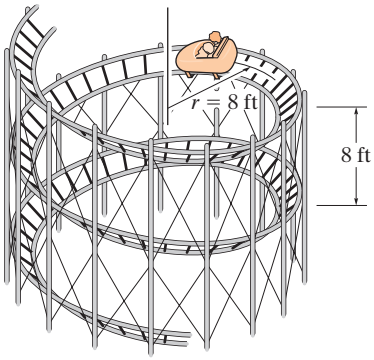
***15-100.** Cada una de las bolas tiene un tamaño insignificante y una masa de 10 kg, y está unida al extremo de una varilla cuya masa puede considerarse insignificante. Si la varilla se somete a un par de torsión $M = (t^2 + 2)$ N · m, donde t se da en segundos, determine la rapidez de cada bola cuando $t = 3$ s. Cada bola tiene una rapidez $v = 2$ m/s cuando $t = 0$.



Prob. 15-100

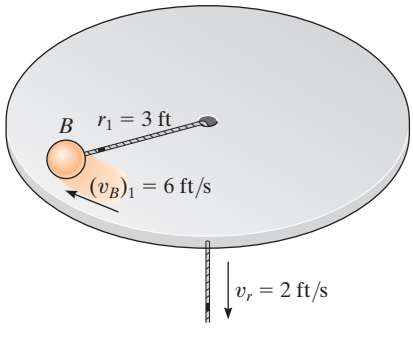
15-101. El carro de montaña rusa de 800 lb parte del reposo sobre la pista, que tiene la forma de una hélice cilíndrica. Si la hélice desciende 8 ft por cada vuelta, determine la rapidez del carro cuando $t = 4$ s. Además, ¿hasta qué punto ha descendido el carro en este instante? Desprecie la fricción y el tamaño del carro.

15-102. El carro de montaña rusa de 800 lb parte del reposo sobre la pista, que tiene la forma de una hélice cilíndrica. Si la hélice desciende 8 ft por cada vuelta, determine el tiempo requerido para que el carro alcance una rapidez de 60 ft/s. Desprecie la fricción y el tamaño del carro.



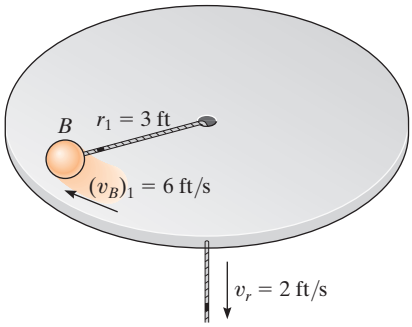
Probs. 15-101/102

15-103. Una bola B de 4 lb se desplaza formando un círculo de radio $r_1 = 3$ ft con una rapidez $(v_B)_t = 6$ ft/s. Si el cable adjunto se jala hacia abajo a través del orificio con una rapidez constante $v_r = 2$ ft/s, determine la rapidez de la bola en el instante $r_2 = 2$ ft. ¿Cuánto trabajo se debe hacer para jalar el cable hacia abajo? Desprecie la fricción y el tamaño de la bola.



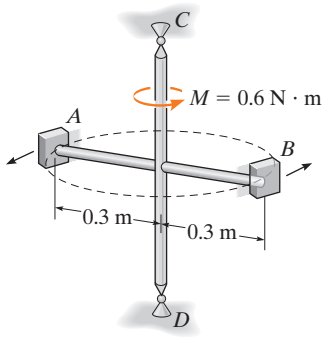
Prob. 15-103

***15-104.** Una bola B de 4 lb se desplaza formando un círculo de radio $r_1 = 3$ ft con una rapidez $(v_B)_t = 6$ ft/s. Si el cable adjunto se jala hacia abajo a través del orificio con una rapidez constante $v_r = 2$ ft/s, determine cuánto tiempo se requiere para que la bola alcance una rapidez de 12 ft/s. ¿A qué distancia r_2 está la bola del orificio cuando esto ocurre? Desprecie la fricción y el tamaño de la bola.



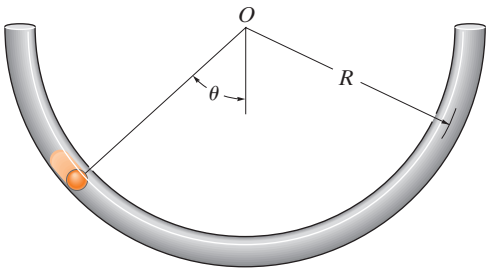
Prob. 15-104

15-105. Cada uno de los dos bloques A y B tiene una masa de 400 g. Los bloques están fijos a las varillas horizontales, y su velocidad inicial a lo largo de la trayectoria circular es de 2 m/s. Si se aplica un momento de par $M = (0.6)$ N · m con respecto a la varilla CD de la estructura, determine la rapidez de los bloques cuando $t = 3$ s. La masa de la estructura es despreciable y gira libremente alrededor de CD. No tome en cuenta el tamaño de los bloques.



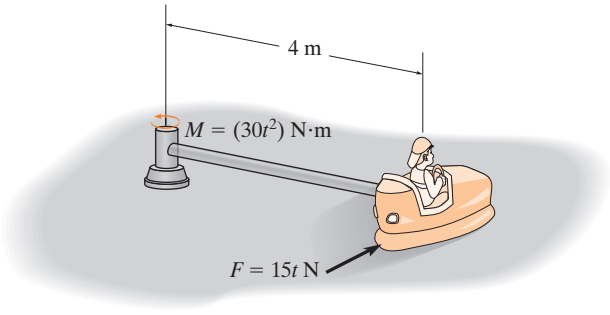
Prob. 15-105

15-106. Una partícula pequeña que tiene una masa m se coloca dentro del tubo semicircular. La partícula se ubica en la posición mostrada y se libera. Aplique el principio de la cantidad de movimiento angular con respecto al punto O ($\Sigma M_O = H_O$) y demuestre que el movimiento de la partícula se rige por la ecuación diferencial $\ddot{\theta} + (g/R)\operatorname{sen}\theta = 0$.



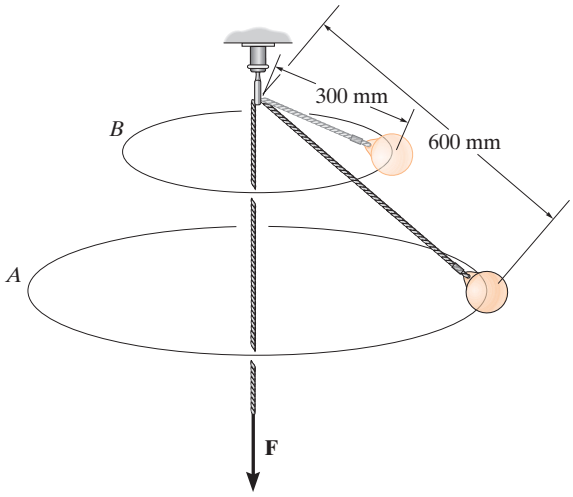
Prob. 15-106

15-107. Si la varilla de masa despreciable se somete a un momento de par de $M = (30t^2)$ N · m, y el motor del automóvil suministra una fuerza de tracción de $F = (15t)$ N a las ruedas, donde t se da en segundos, determine la rapidez del auto en el instante $t = 5$ s. El auto parte del reposo. La masa total del auto y el piloto es de 150 kg. No tome en cuenta el tamaño del automóvil.



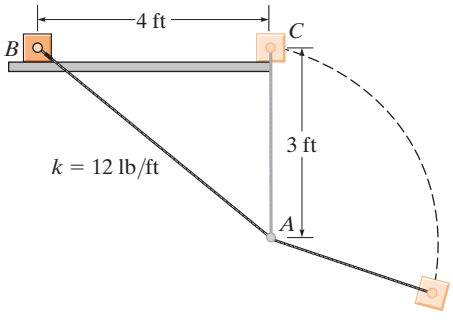
Prob. 15-107

***15-108.** Cuando a la bola de 2 kg se le da una rapidez horizontal de 1.5 m/s, comienza a moverse sobre la trayectoria circular horizontal A. Si se incrementa la fuerza **F** sobre la cuerda, la bola se eleva y luego se mueve alrededor de la trayectoria circular horizontal B. Determine la rapidez de la bola alrededor de la trayectoria B. Además, encuentre el trabajo realizado por la fuerza **F**.



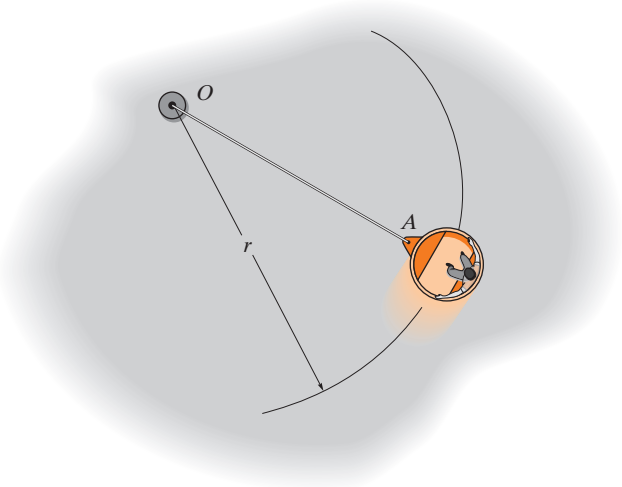
Prob. 15-108

15-109. La cuerda elástica tiene una longitud no estirada $l_0 = 1.5$ ft y una rigidez $k = 12$ lb/ft. Está conectada en A a un punto fijo y en B a un bloque, que tiene un peso de 2 lb. Si el bloque se libera del reposo desde la posición mostrada, determine su rapidez cuando alcanza el punto C luego de deslizase a lo largo de la guía lisa. Después de salir de la guía, se desplaza sobre el plano *horizontal* liso. Determine si la cuerda llega a su longitud no estirada. Además, calcule la cantidad de movimiento angular del bloque sobre el punto A, en cualquier instante después de pasar el punto C.



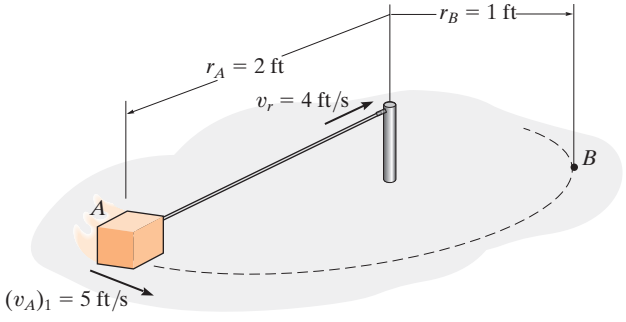
Prob. 15-109

15-110. La atracción del parque de diversiones consta de un carro de 200 kg y de pasajeros que viajan a 3 m/s en una trayectoria circular con un radio de 8 m. Si en $t = 0$, el cable OA es jalado hacia O a 0.5 m/s, determine la rapidez del carro cuando $t = 4$ s. Además, determine el trabajo realizado para jalar el cable.



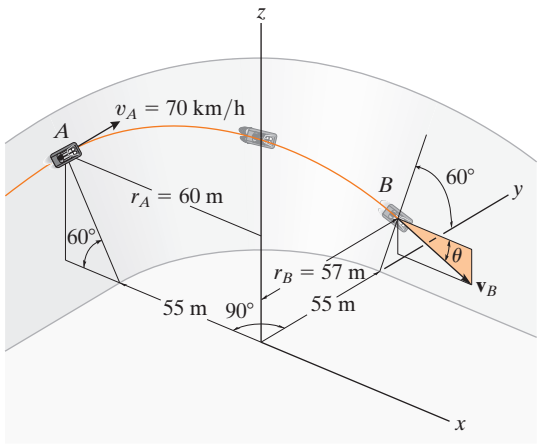
Prob. 15-110

15-111. Una caja con un peso de 8 lb se mueve alrededor de un círculo con radio $r_A = 2$ ft con una rapidez de $(v_A)_1 = 5$ ft/s mientras está conectado al extremo de una cuerda. Si la cuerda se jala hacia adentro con una rapidez constante de $v_r = 4$ ft/s, determine la rapidez de la caja en el instante $r_B = 1$ ft. ¿Cuánto trabajo se realiza después de jalar la cuerda desde A hasta B? Desprecie la fricción y el tamaño de la caja.



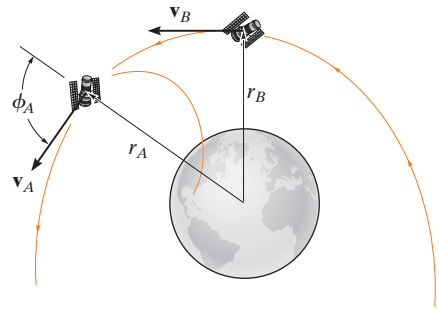
Prob. 15-111

***15-112.** Un trineo y su tripulante, con una masa total de 150 kg, entran en tangente horizontal a una curva circular de 90° con una velocidad de $v_A = 70$ km/h. Si la pista es plana y se inclina en un ángulo de 60°, determine la rapidez v_B y el ángulo θ de "descenso", medido desde la horizontal en un plano vertical x-z, al que existe el trineo en B. Para el cálculo, desprecie la fricción.



Prob. 15-112

15-113. Se lanza un satélite de 700 kg de masa a una trayectoria de vuelo libre alrededor de la Tierra con una rapidez inicial de $v_A = 10$ km/s, cuando la distancia al centro de la Tierra es $r_A = 15$ Mm. Si el ángulo de lanzamiento en esta posición es $\phi_A = 70°$, determine la rapidez v_B del satélite y su distancia más cercana r_B al centro de la tierra. La masa de ésta es $M_e = 5.976(10^{24})$kg. *Sugerencia:* En estas condiciones, el satélite se somete sólo a la fuerza gravitacional terrestre, $F = GM_e m_s/r^2$, ecuación 13-1. En una parte de la solución, use la conservación de la energía.

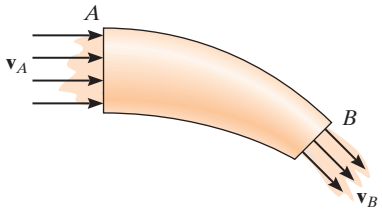


Prob. 15-113

15.8 Flujo continuo de una corriente de fluido

Hasta este punto hemos limitado nuestro estudio de los principios de impulso y cantidad de movimiento a un sistema de partículas contenidas dentro de un *volumen cerrado*. En esta sección, sin embargo, aplicaremos el principio de impulso y cantidad de movimiento al flujo de masa constante de partículas de fluido que entran a un *volumen de control* y salen de éste, el cual se define como una región en el espacio donde partículas de fluido pueden fluir hacia dentro o hacia afuera de la región. Con frecuencia se hace que el tamaño y la forma del volumen de control coincidan con los límites sólidos y aberturas de un tubo, turbina o bomba. Siempre que el flujo del fluido hacia dentro del volumen de control sea igual al de salida, entonces el flujo puede clasificarse como *flujo continuo*.

Principio de impulso y cantidad de movimiento. Considere el flujo continuo de una corriente de fluido en la figura 15-27*a* que circula a través de un tubo. La región dentro del tubo y sus aberturas se considerarán como el volumen de control. Como se indica, el fluido fluye hacia dentro y hacia afuera del volumen de control con velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$, respectivamente. El cambio de la dirección del fluido dentro del volumen de control lo provoca el impulso de la fuerza externa resultante ejercida en la superficie de control por la pared del tubo. Esta fuerza resultante se determina al aplicar el principio de impulso y cantidad de movimiento al volumen de control.

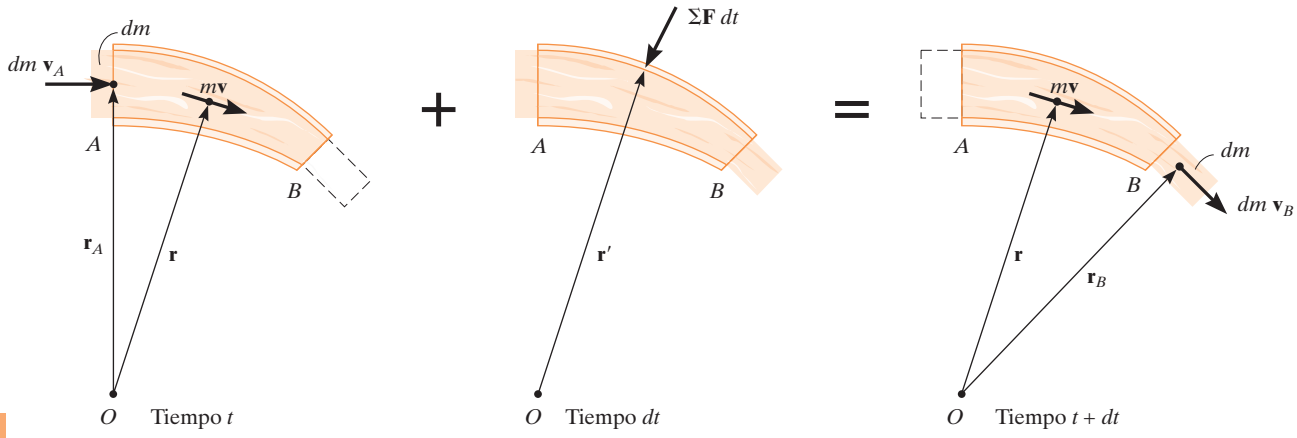


(a)

Fig. 15-27

La banda transportadora debe suministrar fuerzas de fricción a la grava que cae sobre ella para cambiar la cantidad de movimiento de la corriente de grava, de modo que comience a desplazarse a lo largo de la banda. (© R. C. Hibbeler)

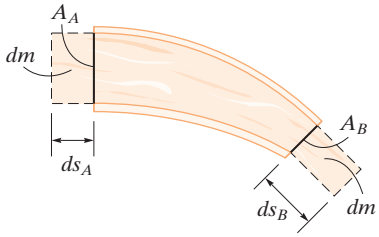
En principio, el aire de un lado de este ventilador está en reposo y conforme pasa a través de las aspas se incrementa su cantidad de movimiento. Para cambiar la cantidad de movimiento del flujo de aire de esta manera, las aspas deben ejercer un empuje horizontal en la corriente de aire. A medida que las aspas giran más rápido, el empuje igual pero opuesto del aire en las aspas podría vencer la resistencia al rodamiento de las ruedas en el suelo y comenzar a mover la estructura del ventilador. (© R. C. Hibbeler)



(b)

Como se indica en la figura 15-27*b*, una pequeña cantidad de flujo de masa *dm* está a punto de entrar al volumen de control por la abertura *A* a una velocidad de $\mathbf{v}_A$ en el instante *t*. Como el flujo se considera continuo, en el instante $t + dt$, la misma cantidad de fluido saldrá del volumen de control por la abertura *B* a una velocidad $\mathbf{v}_B$. Las cantidades de movimiento de fluido que entran al volumen de control y salen de éste son, por consiguiente, $dm\,\mathbf{v}_A$ y $dm\,\mathbf{v}_B$, respectivamente. Además, durante el instante *dt*, la cantidad de movimiento de la masa de fluido dentro del volumen de control permanece constante y se denota como $m\mathbf{v}$. Como se muestra en el diagrama central, la fuerza externa resultante ejercida en el volumen de control produce el impulso $\Sigma\mathbf{F}\,dt$. Si aplicamos el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales, tenemos

$$dm\,\mathbf{v}_A + m\mathbf{v} + \Sigma\mathbf{F}\,dt = dm\,\mathbf{v}_B + m\mathbf{v}$$



(c)

Fig. 15-27 (cont.)

Si $\mathbf{r}, \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ son vectores de posición medidos desde el punto *O* a los centros geométricos del volumen de control y las aberturas en *A* y *B* (fig. 15-27*b*), entonces el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares con respecto a *O* se vuelve

$$\mathbf{r}_A \times dm\,\mathbf{v}_A + \mathbf{r} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r}' \times \Sigma\mathbf{F}\,dt = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r}_B \times dm\,\mathbf{v}_B$$

Si dividimos ambos lados de las dos ecuaciones anteriores entre *dt* y simplificamos, tenemos

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \tag{15-25}$$

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \frac{dm}{dt}(\mathbf{r}_B \times \mathbf{v}_B - \mathbf{r}_A \times \mathbf{v}_A) \tag{15-26}$$

El término dm/dt se llama *flujo de masa* e indica la cantidad constante de fluido que se dirige hacia dentro o hacia fuera del volumen de control por unidad de tiempo. Si las áreas de sección transversal y densidades del fluido a la entrada A son A_A, ρ_A y a la salida B, A_B y ρ_B (fig. 15-27*c*), entonces, para un fluido incompresible, la *continuidad de masa* requiere que $dm = \rho dV = \rho_A(ds_A A_A) = \rho_B(ds_B A_B)$. Por lo tanto, durante el instante dt, como $v_A = ds_A/dt$ y $v_B = ds_B/dt$, tenemos $dm/dt = \rho_A v_A A_A = \rho_B v_B A_B$ o, por lo general,

$$\frac{dm}{dt} = \rho v A = \rho Q \tag{15-27}$$

El término $Q = vA$ mide el volumen de fluido por unidad de tiempo y se conoce como *descarga* o *flujo volumétrico*.

15

Procedimiento para el análisis

Los problemas que implican flujo continuo se resuelven por el siguiente procedimiento.

Diagrama cinemático

- Identifique el volumen de control. Si está en *movimiento*, un *diagrama cinemático* puede ayudar a determinar las velocidades de entrada y salida del fluido que va hacia dentro y hacia fuera de sus aberturas, puesto que se realizará un *análisis de movimiento relativo*.
- Un observador fijo debe medir las velocidades v_A y v_B en un marco de referencia inercial.
- Una vez que se determina la velocidad del fluido que entra al volumen de control, el flujo de masa se calcula con la ecuación 15-27.

Diagrama de cuerpo libre

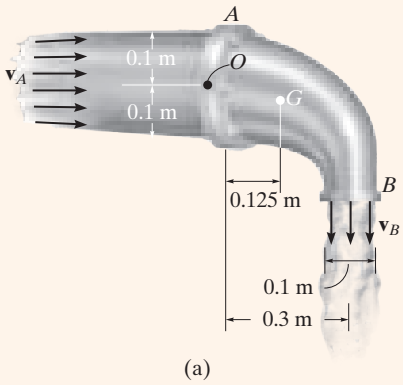
- Trace el diagrama de cuerpo libre del volumen de control para establecer las fuerzas $\Sigma\mathbf{F}$ que actúan en él. Estas fuerzas incluirán las reacciones de los apoyos, el peso de todas las partes sólidas y del fluido contenido en el volumen de control, y las fuerzas producidas por la presión manométrica estática del fluido en las secciones de entrada y salida*. La presión manométrica es la presión medida por encima de la presión atmosférica y, por lo tanto, si una abertura se expone a la atmósfera, en ésta la presión manométrica será cero.

Ecuaciones de flujo continuo

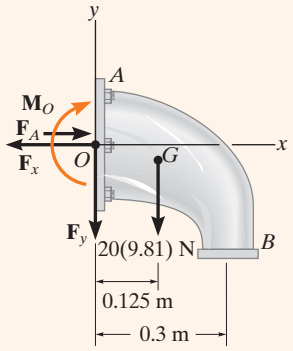
- Aplique las ecuaciones de flujo continuo, ecuaciones 15-25 y 15-26, usando las componentes de velocidad y fuerza apropiadas, las cuales se muestran en los diagramas de cuerpo libre y cinemática.

*En el sistema SI, la presión se mide con el pascal (Pa), donde $1\text{Pa} = 1\ \text{N/m}^2$.

EJEMPLO 15.16



(a)



(b)

Fig. 15-28

Determine las componentes de reacción que la junta A fija del tubo ejerce en el codo en la figura 15-28*a*, si el agua que fluye por el tubo se somete a una presión manométrica estática de 100 kPa en A. La descarga en B es $Q_B = 0.2\ \text{m}^3/\text{s}$. La densidad del agua es $\rho_w = 1000\ \text{kg/m}^3$ y la masa del codo lleno de agua es de 20 kg con su centro de masa en G.

SOLUCIÓN

Consideraremos que el volumen de control es la superficie externa del codo. Con un sistema de coordenadas inercial fijo, la velocidad de flujo en A y B y la velocidad de flujo de masa se calculan con la ecuación 15-27. Como la densidad del agua es constante, $Q_B = Q_A = Q$. Por consiguiente,

$$\frac{dm}{dt} = \rho_w Q = (1000\ \text{kg/m}^3)(0.2\ \text{m}^3/\text{s}) = 200\ \text{kg/s}$$

$$v_B = \frac{Q}{A_B} = \frac{0.2\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(0.05\ \text{m})^2} = 25.46\ \text{m/s} \downarrow$$

$$v_A = \frac{Q}{A_A} = \frac{0.2\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(0.1\ \text{m})^2} = 6.37\ \text{m/s} \rightarrow$$

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre del volumen de control (codo) (fig. 15-28*b*), la conexión *fija* en A ejerce un momento de par resultante $\mathbf{M}_O$ y componentes de fuerza $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ en el codo. Debido a la presión estática del agua en el tubo, la fuerza producida por la presión que actúa en la superficie de control abierta en A es $F_A = p_A A_A$. Como $1\ \text{kPa} = 1000\ \text{N/m}^2$,

$$F_A = p_A A_A = [100(10^3)\ \text{N/m}^2][\pi(0.1\ \text{m})^2] = 3141.6\ \text{N}$$

En B no actúa ninguna presión estática, puesto que el agua se descarga a la presión atmosférica, es decir, la presión medida por un manómetro en B es igual a cero, $p_B = 0$.

Ecuaciones de flujo continuo

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = \frac{dm}{dt}(v_{Bx} - v_{Ax});\ -F_x + 3141.6\ \text{N} = 200\ \text{kg/s}(0 - 6.37\ \text{m/s})$$

$$F_x = 4.41\ \text{kN} \qquad \textit{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = \frac{dm}{dt}(v_{By} - v_{Ay});\ -F_y - 20(9.81)\ \text{N} = 200\ \text{kg/s}(-25.46\ \text{m/s} - 0)$$

$$F_y = 4.90\ \text{kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Si se suman los momentos con respecto al punto O (fig. 15-28*b*), entonces $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y la presión estática $\mathbf{F}_A$ se eliminan, así como el momento de la cantidad de movimiento del agua que entra por A (fig. 15-28*a*). Por consiguiente,

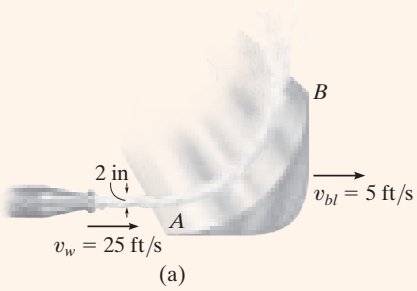
$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = \frac{dm}{dt}(d_{OB} v_B - d_{OA} v_A)$$

$$M_O + 20(9.81)\ \text{N}\,(0.125\ \text{m}) = 200\ \text{kg/s}[(0.3\ \text{m})(25.46\ \text{m/s}) - 0]$$

$$M_O = 1.50\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 15.17

Un chorro de agua de 2 in de diámetro que sale con una velocidad de 25 ft/s choca con una aspa en movimiento (fig. 15-29*a*). Si el aspa se aleja del chorro a una velocidad constante de 5 ft/s, determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que el aspa ejerce en el agua. ¿Qué potencia genera el agua en el aspa? El peso específico del agua es $\gamma_w = 62.4 \text{ lb/ft}^3$.



(a)

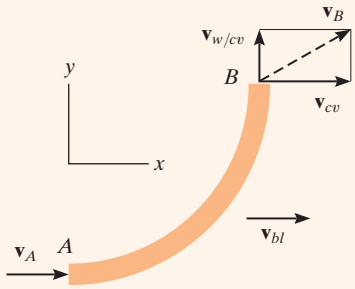
SOLUCIÓN

Diagrama cinemático. En este caso, el volumen de control es la corriente de agua sobre el aspa. Con respecto a un sistema de coordenadas inercial fijo (fig. 15-29*b*), la velocidad a la cual entra el agua al volumen de control por A es

$$\mathbf{v}_A = \{25\mathbf{i}\} \text{ ft/s}$$

La *velocidad de flujo relativa* dentro del volumen de control es $\mathbf{v}_{w/cv} = \mathbf{v}_w - \mathbf{v}_{cv} = 25\mathbf{i} - 5\mathbf{i} = \{20\mathbf{i}\}$ ft/s. Como el volumen de control se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_{cv} = \{5\mathbf{i}\}$ ft/s, la velocidad de flujo en B medida con respecto a los ejes x, y fijos es la suma vectorial, mostrada en la figura 15-29*b*. Donde,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_{cv} + \mathbf{v}_{w/cv} \\ &= \{5\mathbf{i} + 20\mathbf{j}\} \text{ ft/s}\end{aligned}$$

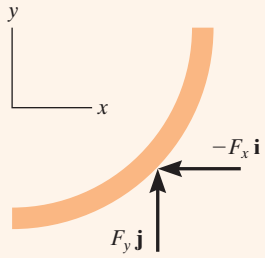


(b)

Por lo tanto, la masa del flujo de agua *sobre* el volumen de control que experimenta un cambio de cantidad de movimiento es

$$\frac{dm}{dt} = \rho_w(v_{w/cv})A_A = \left(\frac{62.4}{32.2}\right)(20)\left[\pi\left(\frac{1}{12}\right)^2\right] = 0.8456 \text{ slug/s}$$

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del volumen de control se muestra en la figura 15-29*c*. El peso del agua se omitirá en el cálculo, ya que esta fuerza es mínima comparada con las componentes de reacción $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$.



(c)

Fig. 15-29

Ecuaciones de flujo continuo

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)$$

$$-F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} = 0.8456(5\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 25\mathbf{i})$$

Poner en la ecuación las componentes **i** y **j** respectivas resulta

$$F_x = 0.8456(20) = 16.9 \text{ lb} \leftarrow \qquad \textit{Resp.}$$

$$F_y = 0.8456(20) = 16.9 \text{ lb} \uparrow \qquad \textit{Resp.}$$

El agua ejerce fuerzas iguales pero opuestas en el aspa.

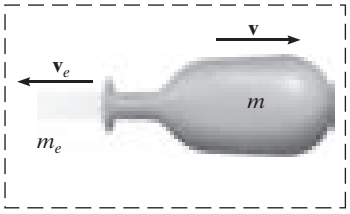
Como la fuerza del agua que hace que el aspa se mueva hacia delante en sentido horizontal con una velocidad de 5 ft/s es $F_X = 16.9$ lb, entonces, de acuerdo con la ecuación 14-10, la potencia es

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}; \qquad P = \frac{16.9 \text{ lb}(5 \text{ ft/s})}{550 \text{ hp/(ft} \cdot \text{lb/s)}} = 0.154 \text{ hp}$$

15

*15.9 Propulsión con masa variable

Un volumen de control que pierde masa. Considere un dispositivo, un cohete, por ejemplo, que en un momento dado tiene una masa m y que se desplaza hacia delante con una velocidad $\mathbf{v}$ (fig. 15-30*a*). En ese mismo instante, el dispositivo expele la cantidad de masa m_e con una velocidad de flujo $\mathbf{v}_e$. Para el análisis, el volumen de control incluirá *tanto la masa m del dispositivo como la masa expelida* m_e. Los diagramas de impulso y cantidad de movimiento del volumen de control se muestran en la figura 15-30*b*. Durante el tiempo dt, su velocidad se incrementa de $\mathbf{v}$ a $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ puesto que se expulsó una cantidad de masa dm_e y, por lo tanto, se incrementó el escape. Este incremento de la velocidad hacia delante, sin embargo, no cambia con la velocidad $\mathbf{v}_e$ de la masa expelida, como lo vería un observador fijo, ya que la masa se mueve a una velocidad constante una vez que ha sido expulsada. Los impulsos son creados por $\Sigma\mathbf{F}_{cv}$, que representa la resultante de todas las fuerzas externas, como resistencia al avance y peso, que *actúan en el volumen de control* en la dirección del movimiento. Esta resultante de fuerzas *no incluye* la fuerza que impulsa al volumen de control hacia delante, pues esta fuerza (llamada *empuje)* es *interna al volumen de control*; es decir, el empuje actúa con magnitud igual pero dirección opuesta en la masa m del dispositivo y la masa expelida m_e.* Al aplicar el principio de impulso y cantidad de movimiento al volumen de control (fig. 15-30*b*), tenemos

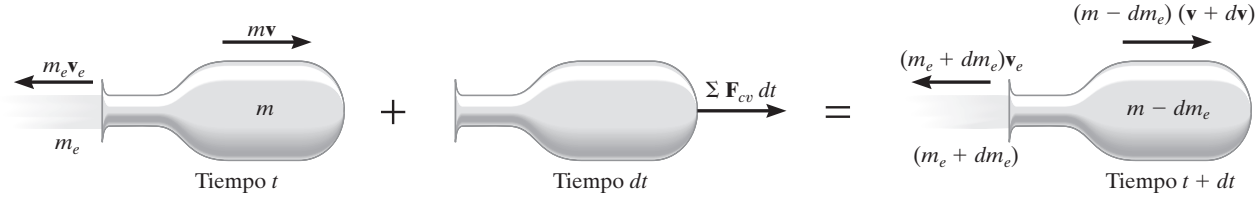


(a)

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad mv - m_e v_e + \Sigma F_{cv}\, dt = (m - dm_e)(v + dv) - (m_e + dm_e)v_e$$

o

$$\Sigma F_{cv}\, dt = -v\, dm_e + m\, dv - dm_e\, dv - v_e\, dm_e$$



(b)

Fig. 15-30

*$\Sigma\mathbf{F}$ representa la fuerza resultante externa que *actúa en el volumen de control*, el cual es diferente de $\mathbf{F}$, la fuerza resultante que actúa sólo en el dispositivo.

Sin perder precisión, se puede omitir el tercer término del lado derecho, ya que es una diferencial de "segundo grado". Al dividir entre dt se obtiene

$$\Sigma F_{cv} = m\frac{dv}{dt} - (v - v_e)\frac{dm_e}{dt}$$

La velocidad del dispositivo vista por un observador que se mueve junto con las partículas de la masa expulsada es $v_{D/e} = (v + v_e)$ y, por lo tanto, el resultado final puede escribirse como

$$\Sigma F_{cv} = m\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt} \tag{15-28}$$

Aquí el término dm_e/dt representa la tasa a la cual se expulsará la masa.

Para ilustrar una aplicación de la ecuación 15-28, considere el cohete en la figura 15-31 cuyo peso es **W** y que asciende contra una fuerza de resistencia atmosférica $\mathbf{F}_D$. El control de volumen que se considerará se compone de la masa del cohete y de la masa del gas expulsado, m_e. Al aplicar la ecuación 15-28 se obtiene

$$(+\uparrow) \qquad -F_D - W = \frac{W}{g}\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt}$$

El último término de esta ecuación representa el *empuje* **T** que el escape del motor ejerce en el cohete (fig. 15-31). Si reconocemos que $dv/dt = a$, entonces escribimos

$$(+\uparrow) \qquad T - F_D - W = \frac{W}{g}a$$

Si se traza un diagrama de cuerpo libre del cohete, es evidente que esta ecuación representa una aplicación de $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para el cohete.

Un volumen de control que gana masa. Un dispositivo, como un cucharón o una pala, pueden ganar masa al moverse hacia delante. Por ejemplo, el dispositivo que se ilustra en la figura 15-32*a* tiene una masa m y se mueve hacia delante con una velocidad **v**. En este momento, el dispositivo recopila una corriente de partículas de masa m_i. La velocidad de flujo $\mathbf{v}_i$ de esta masa inyectada es constante e independiente de la velocidad **v** de modo que $v > v_i$. El volumen de control que se considerará aquí incluye tanto la masa del dispositivo como la masa de las partículas inyectadas.

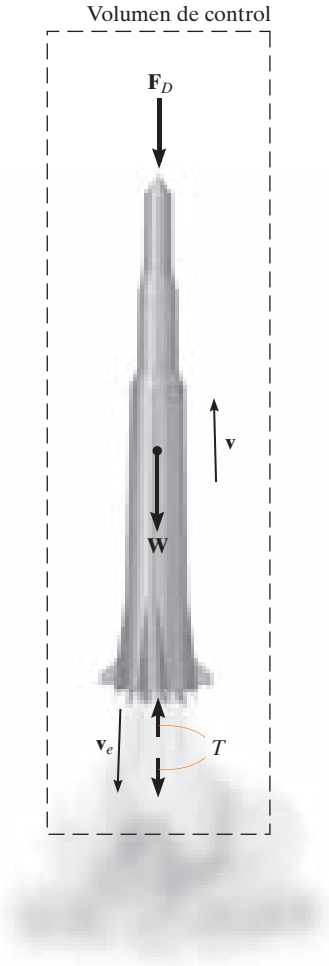
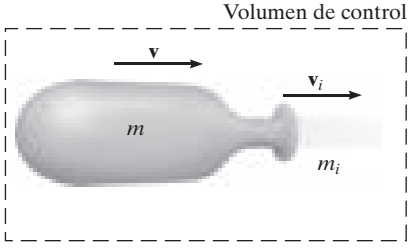


Fig. 15-31

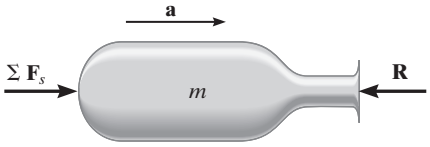


(a)

Fig. 15-32

Fig. 15-32 (cont.)

15



(c)

Los diagramas de impulso y cantidad de movimiento se muestran en la figura 15-32*b*. Junto con un incremento de masa dm_i adquirido por el dispositivo, existe un supuesto incremento de la velocidad $d\mathbf{v}$ durante el intervalo de tiempo dt. Este incremento lo causa el impulso creado por $\Sigma\mathbf{F}_{cv}$, la resultante de todas las fuerzas externas *que actúan en el volumen de control* en la dirección del movimiento. La suma de las fuerzas no incluye la fuerza de retardo de la masa inyectada que actúa en el dispositivo. ¿Por qué? Al aplicar el principio de impulso y cantidad de movimiento al volumen de control, tenemos

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad mv + m_i v_i + \Sigma F_{cv}\, dt = (m + dm_i)(v + dv) + (m_i - dm_i)v_i$$

Si utilizamos el mismo procedimiento que en el caso anterior, podemos escribir esta ecuación como

$$\Sigma F_{cv} = m\frac{dv}{dt} + (v - v_i)\frac{dm_i}{dt}$$

Como la velocidad del dispositivo vista por un observador que se mueve junto con las partículas de la masa inyectada es $v_{D/i} = (v - v_i)$, el resultado final puede escribirse como

$$\Sigma F_{cv} = m\frac{dv}{dt} + v_{D/i}\frac{dm_i}{dt} \tag{15-29}$$

donde dm_i/dt es la proporción de masa inyectada al dispositivo. El último término de esta ecuación representa la magnitud de la fuerza $\mathbf{R}$, que la masa inyectada *ejerce en el dispositivo* (fig. 15-32*c*). Como $dv/dt = a$, la ecuación 15-29 se escribe

$$\Sigma F_{cv} - R = ma$$

Ésta es la aplicación de $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Como en el caso de problemas de flujo continuo que se resuelven con las ecuaciones 15-28 y 15-29 deberían ir acompañados por un volumen de control identificado y el diagrama de cuerpo libre necesario. Con el diagrama podemos determinar entonces ΣF_{cv} y aislar la fuerza ejercida en el dispositivo por la corriente de partículas.

El cajón rascador detrás de este tractor representa un dispositivo que gana masa. Si el tractor mantiene una velocidad constante v, entonces $dv/dt = 0$ y, como la tierra originalmente está en reposo, $v_{D/i} = v$. Al aplicar la ecuación 15-29, la fuerza de remolque horizontal en el cajón rascador es por ende $T = 0 + v(dm/dt)$, donde dm/dt es la cantidad de tierra acumulada en el cajón. (© R. C. Hibbeler)

EJEMPLO 15.18

La masa inicial combinada de un cohete y su combustible es m_0. Una masa total m_f de combustible se consume a una proporción constante de $dm_e/dt = c$ y se expele a una tasa constante de u con respecto al cohete. Determine la velocidad máxima de éste, es decir, en el instante en que el combustible se agota. Ignore el cambio del peso del cohete con la altitud y la resistencia al avance del aire. El cohete se lanza verticalmente desde el punto de reposo.

(© NASA)

SOLUCIÓN

Como el cohete pierde masa al ascender, para la solución puede utilizarse la ecuación 15-28. La única *fuerza externa* que actúa en el *volumen de control* compuesto del cohete y una parte de la masa expelida es el peso **W** (fig. 15-33). Por consiguiente,

$$+\uparrow \Sigma F_{cv} = m\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt}; \qquad -W = m\frac{dv}{dt} - uc \qquad (1)$$

La velocidad del cohete se obtiene integrando esta ecuación.

En cualquier momento dado t durante el vuelo, la masa de cohete puede expresarse como $m = m_0 - (dm_e/dt)t = m_0 - ct$. Si $W = mg$, la ecuación 1 se escribe de la siguiente manera:

$$-(m_0 - ct)g = (m_0 - ct)\frac{dv}{dt} - uc$$

Al separar las variables e integrarlas, así como al tener en cuenta que $v = 0$ cuando $t = 0$, tenemos

$$\int_0^v dv = \int_0^t \left(\frac{uc}{m_0 - ct} - g\right) dt$$

$$v = -u\ln(m_0 - ct) - gt\Big|_0^t = u\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - ct}\right) - gt \qquad (2)$$

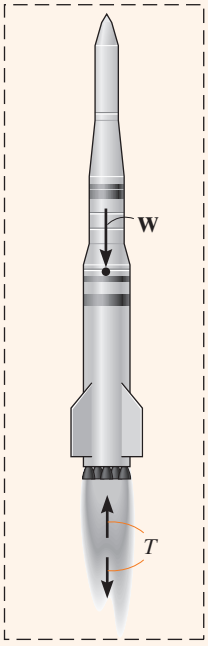


Fig. 15-33

Observe que el despegue requiere que el primer término de la derecha sea mayor que el segundo durante la fase inicial del movimiento. El tiempo t' requerido para consumir todo el combustible es

$$m_f = \left(\frac{dm_e}{dt}\right)t' = ct'$$

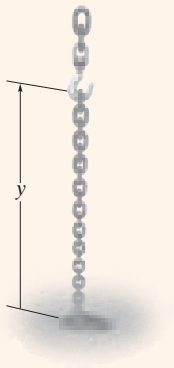
Por consiguiente,

$$t' = m_f/c$$

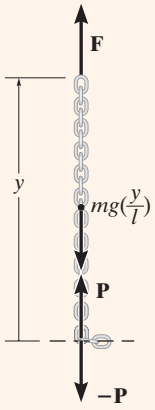
Si sustituimos en la ecuación 2, tenemos

$$v_{\text{máx}} = u\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m_f}\right) - \frac{gm_f}{c} \qquad \textit{Resp.}$$

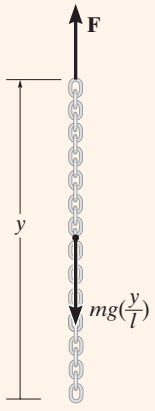
EJEMPLO 15.19



(a)



(b)



(c)

Fig. 15-34

Una cadena de longitud l (fig. 15-34a) tiene una masa m. Determine la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ requerida para (a) subir la cadena con una rapidez constante v_c, a partir del reposo cuando $y = 0$; y (b) bajarla con una rapidez constante v_c, a partir del punto de reposo cuando $y = l$.

SOLUCIÓN

Parte (a). A medida que sube la cadena, todos los eslabones suspendidos experimentan un impulso repentino hacia abajo por cada eslabón adicional que se levanta del suelo. Por lo tanto, la *parte suspendida* de la cadena puede considerarse como un dispositivo que *está ganando masa*. El volumen de control que se considerará es la longitud de la cadena y suspendida por $\mathbf{F}$ en cualquier instante, incluido el siguiente eslabón que está a punto de ser agregado pero que aún está en reposo (fig. 15-34*b*). Las fuerzas que actúan en el volumen de control *excluyen* las fuerzas internas $\mathbf{P}$ y $-\mathbf{P}$, las cuales actúan entre el eslabón agregado y la parte suspendida de la cadena. Por consiguiente, $\Sigma F_{cv} = F - mg(y/l)$.

Para aplicar la ecuación 15-29, también es necesario determinar la razón a la cual se está agregando masa al sistema. La velocidad $\mathbf{v}_c$ de la cadena equivale a $\mathbf{v}_{D/i}$. ¿Por qué? Como v_c es constante, $dv_c/dt = 0$ y $dy/dt = v_c$. Hay que integrar, con la condición inicial de que $y = 0$ cuando $t = 0$, con lo que se obtiene $y = v_c t$. Por lo tanto, la masa del volumen de control en cualquier instante es $m_{cv} = m(y/l) = m(v_c t/l)$ y, por consiguiente, la *razón* a la cual se *agrega* masa a la cadena suspendida es

$$\frac{dm_i}{dt} = m\left(\frac{v_c}{l}\right)$$

Al aplicar la ecuación 15-29 con estos datos, tenemos

$$+\uparrow \Sigma F_{cv} = m\frac{dv_c}{dt} + v_{D/i}\frac{dm_i}{dt}$$

$$F - mg\left(\frac{y}{l}\right) = 0 + v_c m\left(\frac{v_c}{l}\right)$$

Por consiguiente,

$$F = (m/l)(gy + v_c^2) \qquad \textit{Resp.}$$

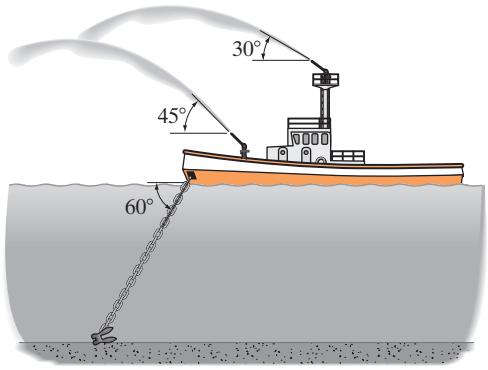
Parte (b). Cuando se baja la cadena, los eslabones expelidos (a los que se imparte una velocidad cero) *no imparten* un impulso a los eslabones suspendidos *restantes*. ¿Por qué? En consecuencia, no se considerará el volumen de control de la parte (a). En su lugar se utilizará la ecuación de movimiento para obtener la solución. En el instante t, la parte de la cadena que aún se va a levantar del suelo es y. El diagrama de cuerpo libre de la parte suspendida de una cadena se muestra en la figura 15-34*c*. Por lo tanto,

$$+\uparrow \Sigma F = ma; \qquad F - mg\left(\frac{y}{l}\right) = 0$$

$$F = mg\left(\frac{y}{l}\right) \qquad \textit{Resp.}$$

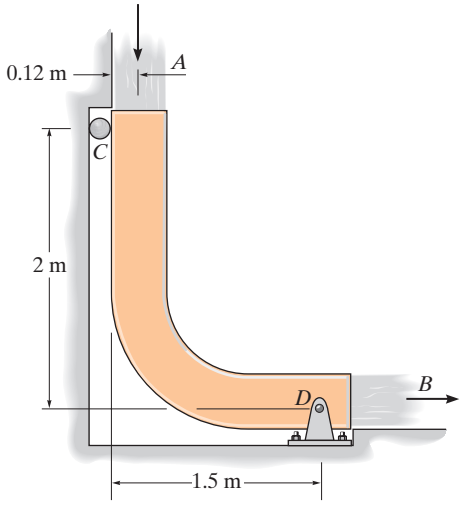
PROBLEMAS

15-114. El buque bomba descarga dos chorros de agua de mar, cada uno con un flujo de 0.25 m^3/s y con una velocidad en la boquilla de 50 m/s. Determine la tensión desarrollada en la cadena del ancla, necesaria para asegurar el buque. La densidad del agua de mar es $\rho_{sw} = 1020\ kg/m^3$.



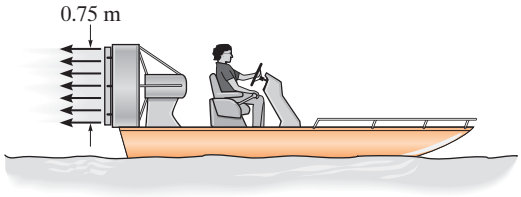
Prob. 15-114

15-115. El conducto se utiliza para desviar el flujo de agua, $Q = 0.6\ m^3/s$. Si el agua tiene una área de sección transversal de 0.05 m^2, determine las componentes de fuerza en el pasador D y el rodillo C necesarias para el equilibrio. Desprecie el peso del conducto y el peso del agua. $\rho_w = 1\ Mg/m^3$.



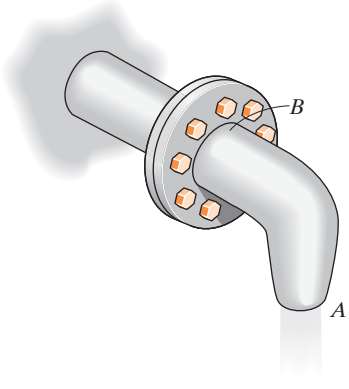
Prob. 15-115

***15-116.** El bote de 200 kg se impulsa mediante el ventilador que desarrolla una corriente deslizante con un diámetro de 0.75 m. Si el ventilador expulsa aire con una rapidez de 14 m/s, medidos con respecto al bote, determine la aceleración inicial de la embarcación, si está inicialmente en reposo. Suponga que el aire tiene una densidad constante de $\rho_w = 1.22\ kg/m^3$ y que el aire entrante está esencialmente en reposo. Desprecie la resistencia de arrastre del agua.



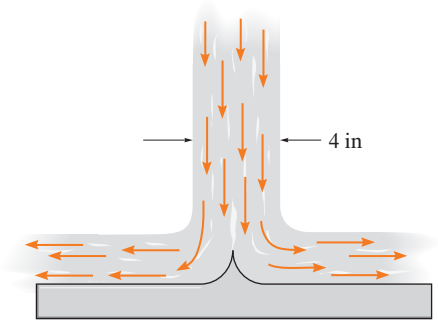
Prob. 15-116

15-117. La boquilla descarga agua a razón constante de 2 ft^3/s. El área de sección transversal de la boquilla en A es 4 in^2, y en B el área de sección transversal es 12 in^2. Si la presión manométrica estática debida al agua en B es 2 lb/in^2, determine la magnitud de la fuerza que debe aplicar el acoplamiento en B para mantener la boquilla en su sitio. Desprecie el peso de la boquilla y el agua dentro de ella. $\gamma_w = 62.4\ lb/ft^3$.



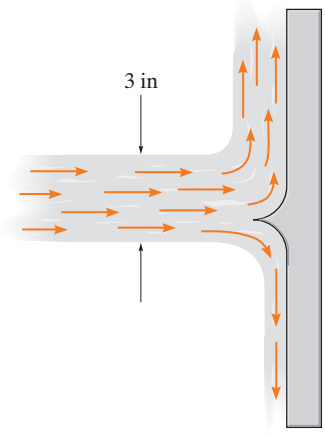
Prob. 15-117

15-118. El aspa divide el chorro de agua de 4 in de diámetro. Si la mitad del agua fluye hacia la derecha, en tanto que la otra mitad lo hace hacia la izquierda, y el flujo total es $Q = 1.5\ \text{ft}^3/\text{s}$, determine la fuerza vertical ejercida en el aspa por el chorro. $\gamma_w = 62.4\ \text{lb}/\text{ft}^3$.



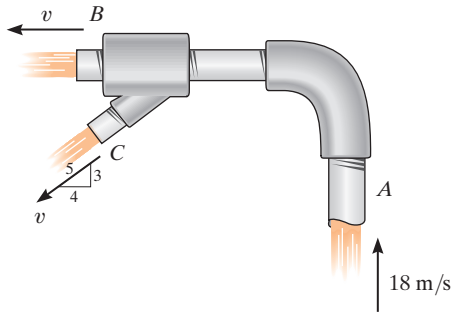
Prob. 15-118

15-119. El aspa divide el chorro de agua de 3 in de diámetro. Si un cuarto del agua fluye hacia abajo en tanto que los otros tres cuartos lo hacen hacia arriba y el flujo total es $Q = 0.5\ \text{ft}^3/\text{s}$, determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida en el aspa por el chorro $\gamma_w = 62.4\ \text{lb}/\text{ft}^3$.



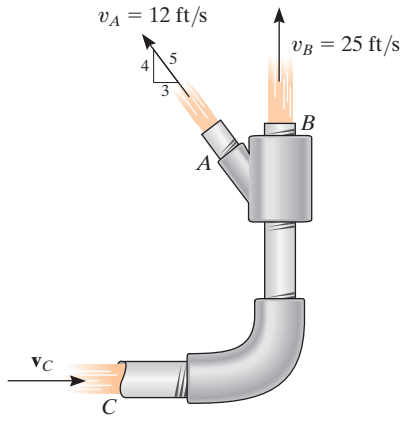
Prob. 15-119

***15-120.** La presión manométrica del agua en A es 150.5 kPa. El agua fluye a través del tubo en A con una velocidad de 18 m/s, y sale de la tubería en B y C con la misma velocidad v. Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre el codo, necesaria para sostener el ensamble de tubos en equilibrio. Desprecie el peso del agua dentro de la tubería y el peso de los tubos. La tubería tiene un diámetro de 50 mm en A, y en B y C el diámetro es de 30 mm. $\rho_w = 1000\ \text{kg}/\text{m}^3$.



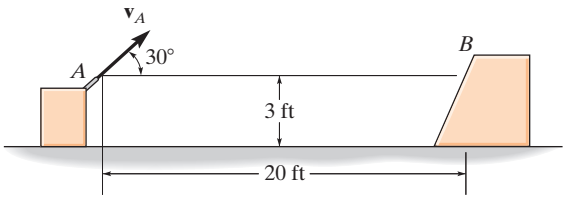
Prob. 15-120

15-121. La presión manométrica del agua en C es $40\ \text{lb}/\text{in}^2$. Si el agua fluye hacia afuera de la tubería en A y B con velocidades $v_A = 12\ \text{ft}/\text{s}$ y $v_B = 25\ \text{ft}/\text{s}$, determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre el codo, necesaria para mantener el ensamble de tubos en equilibrio. Desprecie el peso del agua dentro de la tubería y el peso de los tubos. La tubería tiene un diámetro de 0.75 in en C, y en A y B el diámetro es de 0.5 in. $\gamma_w = 62.4\ \text{lb}/\text{ft}^3$.



Prob. 15-121

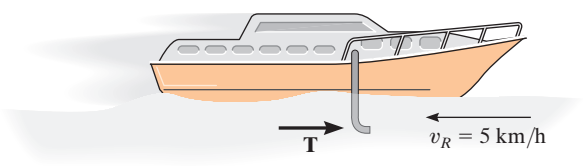
15-122. La fuente dispara agua en la dirección mostrada. Si el agua se descarga a 30° desde la horizontal, y el área de la sección transversal del chorro de agua es aproximadamente de 2 in^2, determine la fuerza que ejerce sobre la pared de concreto en B. $\gamma_w = 62.4\ lb/ft^3$.



Prob. 15-122

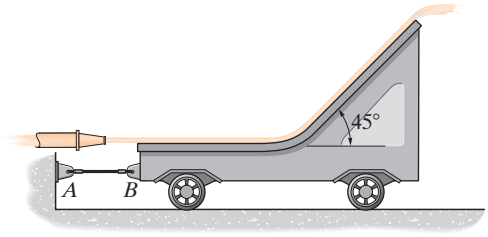
15-123. Una cuchilla situada al frente de una locomotora recoge nieve a razón de 10 ft^3/s y la guarda en el tren. Si la locomotora viaja a una rapidez constante de 12 ft/s, determine la resistencia al movimiento provocada por la acción de traspaleo. El peso específico de la nieve es $\gamma_s = 6\ lb/ft^3$.

***15-124.** La masa del bote es de 180 kg y navega por el río a una velocidad constante de 70 km/h, medida *con respecto* al río. Éste fluye en la dirección opuesta a 5 km/h. Si se coloca un tubo en el agua, como se indica, y recoge 40 kg de agua en 80 s, determine el empuje horizontal T en el tubo requerido para vencer la resistencia provocada por la recolección de agua y aun así mantener la rapidez constante del bote. $\rho_w = 1\ Mg/m^3$.



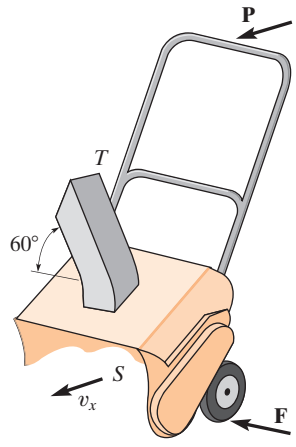
Prob. 15-124

15-125. El agua se descarga desde una boquilla con una velocidad de 12 m/s y golpea el aspa montada en el carro de 20 kg. Determine la tensión desarrollada en la cuerda, necesaria para mantener el carro inmóvil, y la reacción normal de las ruedas en el carro. La boquilla tiene un diámetro de 50 mm y la densidad del agua es $\rho_w = 1000\ kg/m^3$.



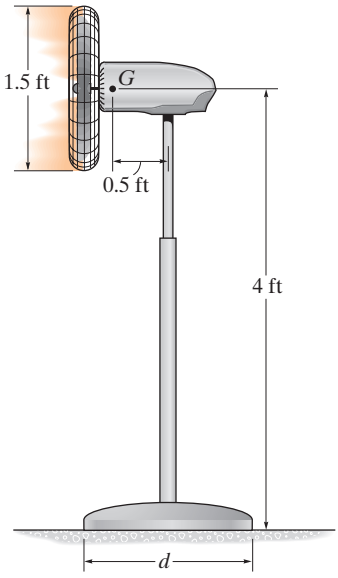
Prob. 15-125

15-126. Un soplador de nieve que tiene un cucharón S, con una área de sección transversal de $A_s = 0.12\ m^3$, es empujado en la nieve con una rapidez de $v_s = 0.5$ m/s. La máquina descarga la nieve a través de un tubo T que tiene una área de sección transversal de $A_T = 0.03\ m^2$ y se dirige a 60° desde la horizontal. Si la densidad de la nieve es $\rho_s = 104\ kg/m^3$, determine la fuerza horizontal P requerida para empujar el soplador hacia adelante, y la fuerza de fricción F resultante de las ruedas sobre el suelo, necesaria para evitar que el soplador se mueva hacia los lados. Las ruedas giran libremente.



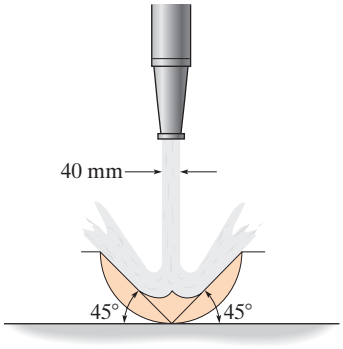
Prob. 15-126

15-127. El ventilador sopla aire a 6000 ft^3/min. Si el ventilador tiene un peso de 30 lb y un centro de gravedad en G, determine el diámetro d mínimo de su base, de modo que no se ladee. El peso específico del aire es $g = 0.076\ lb/ft^3$.



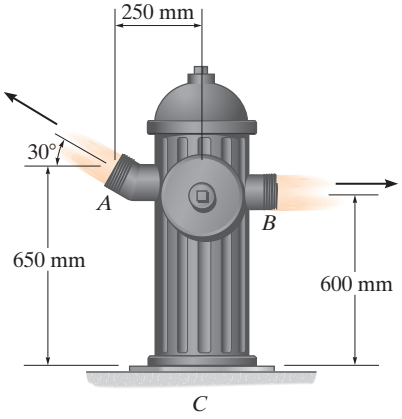
Prob. 15-127

***15-128.** La boquilla tiene un diámetro de 40 mm. Si descarga agua de manera uniforme con una velocidad hacia abajo de 20 m/s contra el aspa fija, determine la fuerza vertical ejercida por el agua sobre el aspa $\rho_w = 1\ Mg/m^3$.



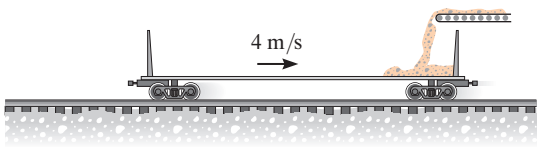
Prob. 15-128

15-129. El flujo de agua entra por debajo del hidrante en C a razón de 0.75 m^3/s. Después, se divide por igual entre las dos salidas en A y B. Si la presión manométrica en C es 300 kPa, determine las reacciones de fuerza horizontal y vertical y la reacción de momento sobre el soporte fijo en C. El diámetro de las dos salidas en A y B es 75 mm, y el diámetro de la tubería de entrada en C es 150 mm. La densidad del agua es $\rho_w = 1000\ kg/m^3$. Desprecie la masa del agua contenida y del hidrante.



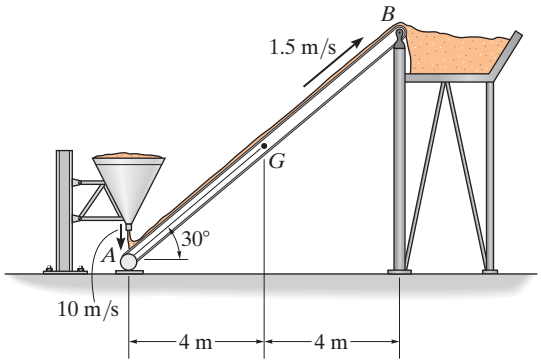
Prob. 15-129

15-130. La arena cae sobre el vagón de ferrocarril vacío de 2 Mg a 50 kg/s desde una banda transportadora. Si el vagón se desplaza inicialmente a 4 m/s, determine la rapidez del vagón en función del tiempo.



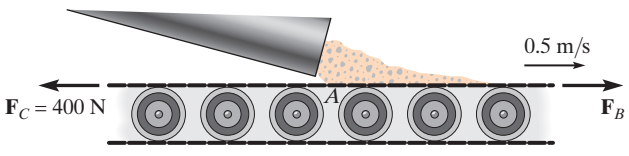
Prob. 15-130

15-131. La arena se descarga desde el silo en A a razón de 50 kg/s, con una velocidad vertical de 10 m/s sobre la banda transportadora, que se está moviendo con una velocidad constante de 1.5 m/s. Si el sistema de transportación y la arena en él tienen una masa total de 750 kg y el centro de masa en el punto G, determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el soporte de pasador B y el soporte de rodillo A. Desprecie el espesor de la banda transportadora.



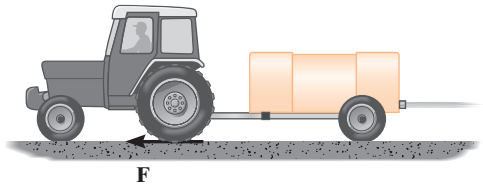
Prob. 15-131

***15-132.** La arena se deposita desde un conducto sobre una banda transportadora que se mueve a 0.5 m/s. Si se supone que la arena cae verticalmente sobre la cinta en A a razón de 4 kg/s, determine la tensión F_B de la banda a la derecha de A. La banda se mueve libremente sobre los rodillos transportadores y su tensión a la izquierda de A es $F_C = 400$ N.



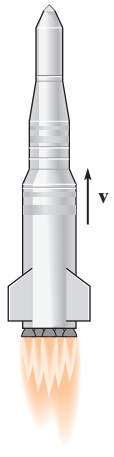
Prob. 15-132

15-133. El tractor junto con el tanque vacío tiene una masa total de 4 Mg. El tanque se llena con 2 Mg de agua. El agua se descarga a una razón constante de 50 kg/s a una velocidad constante de 5 m/s, medida con respecto al tractor. Si éste arranca desde el punto de reposo y las ruedas traseras generan una fuerza de tracción resultante de 250 N, determine la velocidad y aceleración del tractor en el instante que se vacía el tanque.



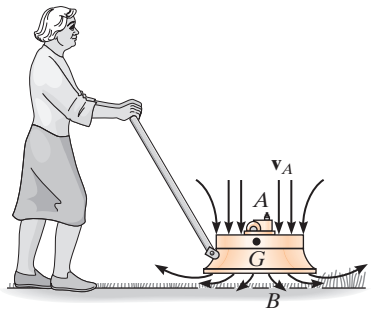
Prob. 15-133

15-134. Un cohete tiene un peso en vacío de 500 lb y carga 300 lb de combustible. Si el combustible se quema a razón de 15 lb/s y se expulsa con una velocidad relativa de 4400 ft/s, determine la rapidez máxima alcanzada por el cohete si parte desde el reposo. Desprecie el efecto de la gravitación sobre el cohete.



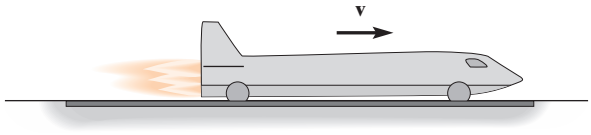
Prob. 15-134

15-135. Una cortadora de césped eléctrica flota muy cerca del suelo. Esto se hace al pasar aire a una rapidez de 6 m/s a través de una unidad de admisión A, que tiene una área en su sección transversal de $A_A = 0.25\ \text{m}^2$ para, luego, descargarlo en el suelo, B, donde el área de sección transversal es $A_B = 0.35\ \text{m}^2$. Si el aire en A está sujeto solamente a la presión atmosférica, determine la presión del aire que ejerce la cortadora de césped sobre el suelo, cuando el peso de la podadora está libremente apoyado y no se coloca ninguna carga en la manija. La cortadora de césped tiene una masa de 15 kg con centro de masa en G. Suponga que el aire tiene una densidad constante de $\rho_a = 1.22\ \text{kg/m}^3$.



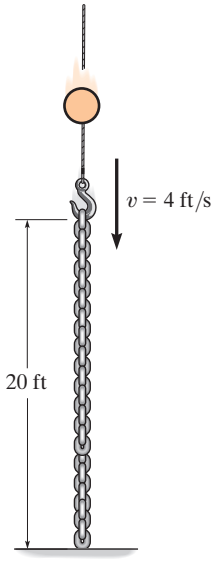
Prob. 15-135

***15-136.** El auto a propulsión tiene una masa de 2 Mg (vacío) y carga 120 kg de combustible. Si el combustible se consume a razón constante de 6 kg/s y es expulsado del auto con una velocidad relativa de 800 m/s, determine la rapidez máxima alcanzada por el auto si parte del reposo. La resistencia a la fricción debida a la atmósfera es $F_D = (6.8v^2)$ N, donde v es la rapidez en m/s.



Prob. 15-136

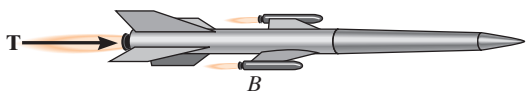
15-137. Si la cadena se baja con una rapidez constante $v = 4$ ft/s, determine la reacción normal ejercida sobre el piso como una función del tiempo. La cadena tiene un peso de 5 lb/ft y una longitud total de 20 ft.



Prob. 15-137

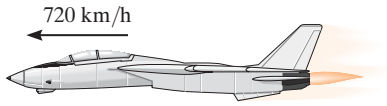
15-138. La segunda etapa de un cohete de dos etapas pesa 2000 lb (vacío) y se lanza desde la primera etapa con una velocidad de 3000 mi/h. El combustible en la segunda etapa pesa 1000 lb. Si se consume a razón de 50 lb/s y es expulsado con una velocidad relativa de 8000 ft/s, determine la aceleración de la segunda etapa justo después de que el motor se enciende. ¿Cuál es la aceleración del cohete justo antes de que se consuma todo el combustible? Desprecie el efecto de la gravitación.

15-139. El misil pesa 40 000 lb. El empuje constante proporcionado por el turborreactor es $T = 15\,000$ lb. Dos cohetes B proporcionan empuje adicional. El combustible en cada refuerzo se quema a razón constante de 150 lb/s, con una velocidad de escape relativa de 3000 ft/s. Si la masa del combustible perdida por el turborreactor es despreciable, determine la velocidad del misil después del tiempo de combustión de 4 s de los propulsores. La velocidad inicial del misil es de 300 mi/h.



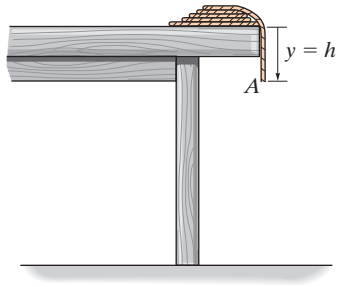
Prob. 15-139

***15-140.** El jet vuela a una rapidez de 720 km/h. Si el combustible se consume a 0.8 kg/s y el motor aspira aire a 200 kg/s, mientras el gas de escape (aire y combustible) tiene una rapidez relativa de 12 000 m/s, determine la aceleración del avión en este instante. La resistencia de arrastre del aire es $F_D = (55\ v^2)$, donde la rapidez se mide en m/s. El jet tiene una masa de 7 Mg.



Prob. 15-140

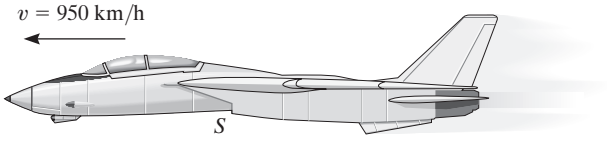
15-141. La cuerda tiene una masa m' por unidad de longitud. Si la longitud final $y = h$ se deja caer del borde de la mesa y se libera, determine la velocidad de su extremo A para cualquier posición y, a medida que la cuerda se desenrolla y comienza a caer.



Prob. 15-141

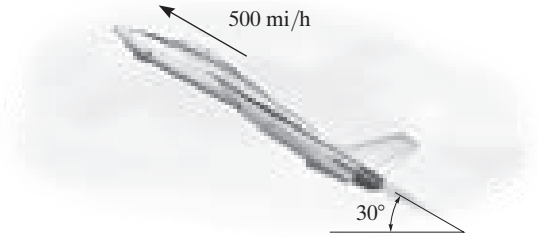
15-142. El avión jet de 12 Mg vuela a una rapidez constante de 950 km/h a lo largo de una línea recta horizontal. El aire entra por las cavidades de admisión S a razón de 50 m^3/s. Si el motor quema el combustible a razón de 0.4 kg/s y el gas (aire y combustible) es expulsado con respecto al avión con una rapidez de 450 m/s, determine la fuerza de resistencia al avance ejercida sobre el avión por el aire. Suponga que éste tiene una densidad constante de 1.22 kg/m^3. *Sugerencia:* Como la masa tanto entra como sale del avión, las ecuaciones 15-28 y 15-29 deben combinarse para obtener

$$\Sigma F_s = m\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt} + v_{D/i}\frac{dm_i}{dt}$$



Prob. 15-142

15-143. El jet vuela a una rapidez de 500 mi/h, con la horizontal a 30°. Si el combustible se consume a 3 lb/s y el motor aspira aire a 400 lb/s, mientras el gas de escape (aire y combustible) tiene una velocidad relativa de 32 800 ft/s, determine la aceleración del avión en este instante. La resistencia al avance del aire es $F_D = (0.7v^2)$ lb, donde la rapidez se mide en ft/s. El jet pesa 15 000 lb. *Sugerencia:* Vea el problema 15-142.

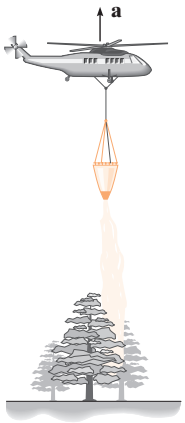


Prob. 15-143

***15-144.** Un jet jumbo comercial de cuatro motores vuela a una rapidez crucero de 800 km/h nivelado cuando los cuatro motores están en operación. Cada uno de los motores es capaz de descargar gases de combustión a una velocidad de 775 m/s con respecto al avión. Si durante una prueba dos de los motores, uno en cada lado del avión, se apagan, determine la nueva velocidad crucero del jet. Suponga que la resistencia (el arrastre) del aire es proporcional al cuadrado de la rapidez, es decir, $F_D = cv^2$, donde c es una constante que debe determinarse. Desprecie la pérdida de masa debida al consumo de combustible.

Prob. 15-144

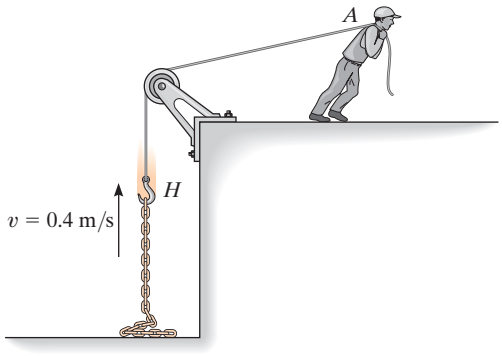
15-145. El helicóptero de 10 Mg carga un balde que contiene 500 kg de agua, la cual se utiliza para apagar incendios. Si se mantiene en una posición fija sobre el terreno y luego descarga 50 kg/s de agua a 10 m/s, medidos con respecto al helicóptero, determine la aceleración inicial hacia arriba que el helicóptero experimenta a medida que descarga el agua.



Prob. 15-145

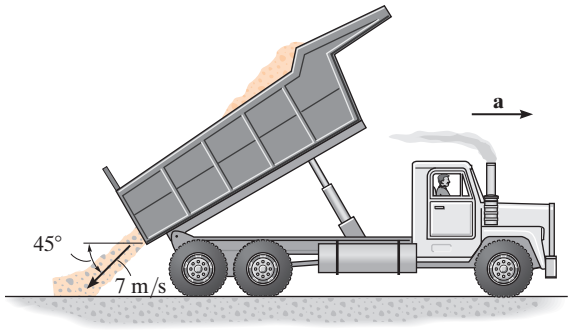
15-146. Un cohete tiene un peso en vacío de 500 lb y carga 300 lb de combustible. Si el combustible se quema a una tasa de 1.5 lb/s y se expulsa con una velocidad de 4400 ft/s en relación con el cohete, determine la rapidez máxima alcanzada por el cohete partiendo desde el reposo. Desprecie el efecto de la gravitación sobre el cohete.

15-147. Determine la magnitud de la fuerza **F** como una función del tiempo, que debe aplicarse al extremo de la cuerda en A para elevar el gancho H con una rapidez constante $v = 0.4$ m/s. Inicialmente la cadena está en reposo en el suelo. Desprecie la masa de la cuerda y el gancho. La cadena tiene una masa de 2 kg/m.



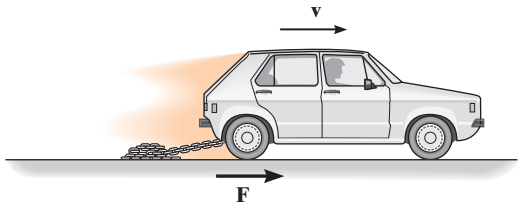
Prob. 15-147

***15-148.** La masa del camión es de 50 Mg cuando está vacío. Al descargar 5 m^3 de arena a una razón constante de 0.8 m^3/s, la arena sale por la parte trasera a una rapidez de 7 m/s, medida con respecto al camión, en la dirección que se muestra. Si el camión rueda libremente, determine su aceleración inicial en el momento en que la arena comienza a caer. Ignore la masa de las ruedas y cualquier resistencia de fricción al movimiento. La densidad de la arena es $\rho_s = 1520$ kg/m^3.



Prob. 15-148

15-149. El automóvil tiene una masa m_0 y se utiliza para remolcar la cadena lisa que tiene una longitud total de l y una masa por unidad de longitud m'. Si en un inicio la cadena está amontonada, determine la fuerza de tracción F que debe ser suministrada por las ruedas traseras del auto, necesaria para mantener una rapidez constante v mientras la cadena es jalada.



Prob. 15-149

PROBLEMAS CONCEPTUALES

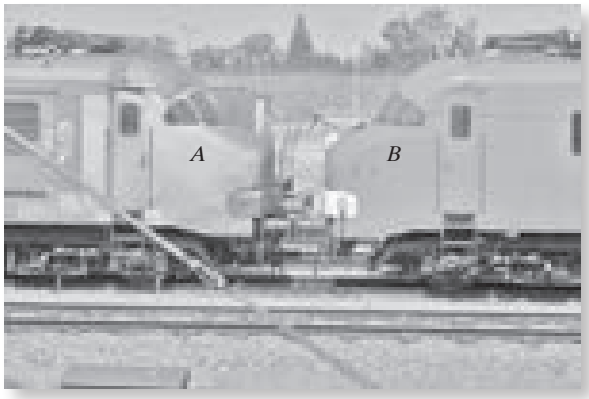
C15-1. La pelota de béisbol viaja a la izquierda cuando el bate la golpea. Si la pelota luego se mueve horizontalmente a la derecha, determine qué mediciones podría hacer para determinar el impulso neto impartido a la pelota. Use valores numéricos para dar un ejemplo de cómo se puede hacer esto.

Prob. C15-1 (© R. C. Hibbeler)

C15-2. La "bola" de demolición de acero cuelga de la pluma por medio de un neumático viejo *A*. El operador de la grúa alza la bola y luego la deja caer libremente para romper el concreto. Explique, con datos numéricos apropiados, por qué es una buena idea utilizar el neumático de caucho en este trabajo.

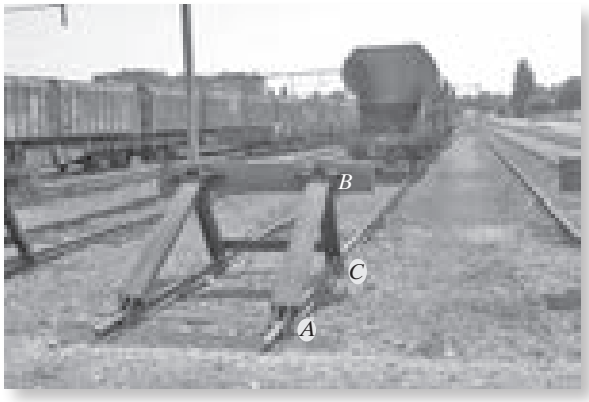
Prob. C15-2 (© R. C. Hibbeler)

C15-3. La máquina de tren del lado izquierdo, *A*, está en reposo y la del lado derecho, *B*, rueda libremente hacia la izquierda. Si las máquinas son idénticas, use valores numéricos para demostrar cómo se determina la compresión máxima en cada uno de los parachoques de resorte montados en el frente de las máquinas. Cada máquina rueda libremente.



Prob. C15-3 (© R. C. Hibbeler)

C15-4. Tres carros de ferrocarril tienen la misma masa y ruedan libremente cuando chocan en el parachoques fijo. Las patas *AB* y *BC* del parachoques están conectadas con pasador en sus extremos; el ángulo *BAC* es de 30° y el *BCA* es de 60°. Compare el impulso promedio en cada pata necesario para detener los carros si éstos no tienen parachoques o si tienen uno de resorte. Use valores numéricos apropiados para explicar su respuesta.

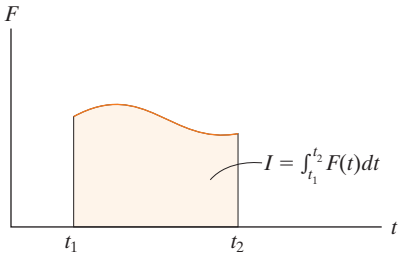


Prob. C15-4 (© R. C. Hibbeler)

REPASO DEL CAPÍTULO

Impulso

Un impulso se define como el producto de fuerza por tiempo. Gráficamente representa el área bajo el diagrama *F*-*t*. Si la fuerza es constante, entonces el impulso es $I = F_c(t_2 - t_1)$.



Principio de impulso y cantidad de movimiento

Cuando combinamos las ecuación de movimiento $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ y la ecuación cinemática, $a = dv/dt$, obtenemos el principio de impulso y cantidad de movimiento. Ésta es una ecuación vectorial que puede descomponerse en componentes rectangulares y utilizarse para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo. Para su aplicación, debería trazarse el diagrama de cuerpo libre para que cuente con todos los impulsos que actúan sobre la partícula.

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2$$

Conservación de la cantidad de movimiento lineal

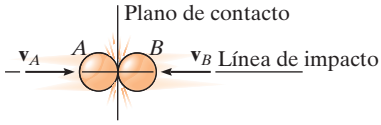
Si se aplica el principio de impulso y cantidad de movimiento a un *sistema de partículas*, entonces las colisiones entre ellas producen impulsos internos que son iguales, opuestos y colineales y, por consiguiente, desaparecen de la ecuación. Además, si un impulso externo es mínimo, es decir, la fuerza es mínima y el tiempo es corto, entonces el impulso puede clasificarse como no impulsor y omitirse. Por consiguiente, se conserva la cantidad de movimiento del sistema de partículas.

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento es útil para determinar la velocidad final de una partícula, cuando entre dos partículas se ejercen impulsos internos y se conocen las velocidades iniciales de ellas. Si se va a determinar el impulso interno, entonces se aísla una de las partículas y el principio de impulso y cantidad de movimiento se aplica a esta partícula.

$$\Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_1 = \Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_2$$

Impacto

Cuando dos partículas *A* y *B* experimentan un impacto directo, el impulso interno entre ellas es igual, opuesto y colineal. Por consiguiente, la conservación de la cantidad de movimiento para este sistema se aplica a lo largo de la línea de impacto.

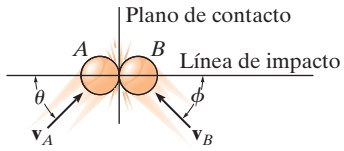


$$m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2$$

Si se desconocen las velocidades finales, para la solución se requiere una segunda ecuación. Debemos utilizar el coeficiente de restitución e. Este coeficiente determinado experimentalmente depende de las propiedades físicas de las partículas que chocan. Puede expresarse como la relación entre su velocidad relativa después de la colisión y su velocidad relativa antes de la colisión. Si la colisión es elástica, no se pierde energía y $e = 1$. Para una colisión plástica $e = 0$.

$$e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$$

Si el impacto es oblicuo, entonces la conservación de la cantidad de movimiento del sistema y la ecuación del coeficiente de restitución se aplican a lo largo de la línea de impacto. También la conservación de la cantidad de movimiento de cada partícula se aplica perpendicular a esta línea (plano de impacto), porque en esta dirección no actúa ningún impulso en las partículas.



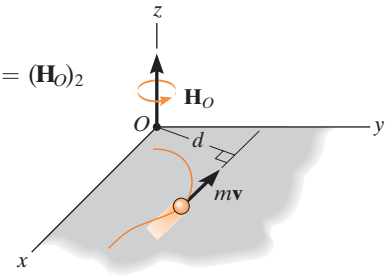
Principio de impulso y cantidad de movimiento angulares

El momento de la cantidad de movimiento lineal con respecto a un eje (z) se llama cantidad de movimiento angular.

El principio de impulso y cantidad de movimiento angulares se suele utilizar para eliminar impulsos desconocidos, al sumar los momentos con respecto a un eje a través del cual las líneas de acción de estos impulsos no producen ningún momento. Por tal razón, un diagrama de cuerpo libre deberá acompañar a la solución.

$$(H_O)_z = (d)(mv)$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2$$



Corrientes de fluido continuas

Con frecuencia se utilizan métodos de impulso y cantidad de movimiento para determinar las fuerzas que un dispositivo ejerce en el flujo de masa de un fluido (líquido o gas). Para hacerlo, se traza un diagrama de cuerpo libre de la masa de fluido en contacto con el dispositivo para identificar dichas fuerzas. Además, se calcula la velocidad del fluido cuando entra al volumen de control del dispositivo y cuando sale de éste. Las ecuaciones de flujo continuo implican sumar las fuerzas y los momentos para determinar estas reacciones.

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \frac{dm}{dt}(\mathbf{r}_B \times \mathbf{v}_B - \mathbf{r}_A \times \mathbf{v}_A)$$

Propulsión con masa variable

Algunos dispositivos, como un cohete, pierden masa cuando se impulsan hacia delante. Otros ganan masa, por ejemplo, una pala. Podemos tener en cuenta esta pérdida o ganancia de masa si aplicamos el principio de impulso y cantidad de movimiento a un volumen de control del dispositivo. A partir de esta ecuación puede determinarse la fuerza que el flujo de masa ejerce en el dispositivo.

$$\Sigma F_{cv} = m\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt}$$

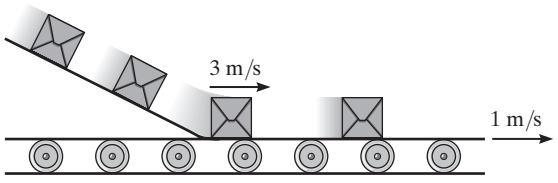
Pierde masa

$$\Sigma F_{cv} = m\frac{dv}{dt} + v_{D/i}\frac{dm_i}{dt}$$

Gana masa

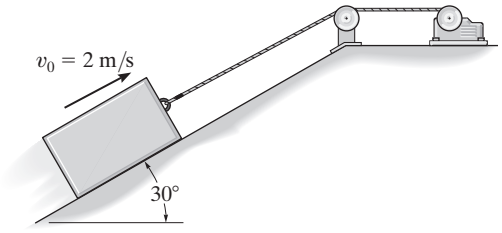
PROBLEMAS DE REPASO FUNDAMENTALES

R15-1. Los paquetes que tienen una masa de 6 kg se deslizan hacia abajo sobre una rampa suave y caen horizontalmente con una velocidad de 3 m/s sobre la superficie de una banda transportadora. Si el coeficiente de fricción cinética entre la banda y un paquete es $\mu_k = 0.2$, determine el tiempo necesario para llevar el paquete al reposo sobre la banda, si ésta se mueve en la misma dirección que el paquete con una rapidez de $v = 1$ m/s.



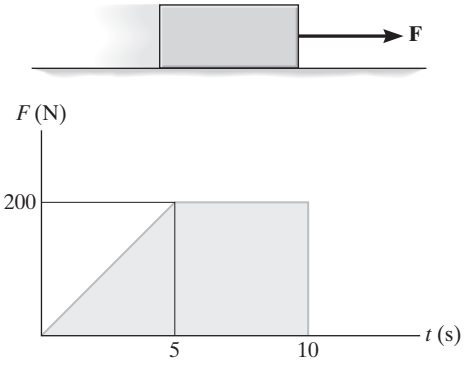
Prob. R15-1

R15-2. El bloque de 50 kg se eleva por el plano inclinado utilizando el arreglo de cable y motor indicado. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es $\mu_k = 0.4$. Si el bloque se mueve inicialmente hacia arriba sobre el plano a $v_0 = 2$ m/s, y en este instante ($t = 0$) el motor desarrolla una tensión en la cuerda de $T = (300 + 120\sqrt{t})$ N donde t se da en segundos, determine la velocidad del bloque cuando $t = 2$ s.



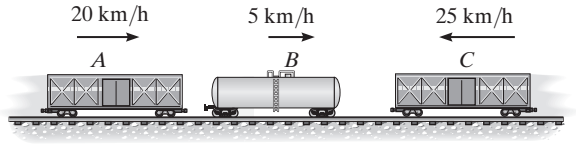
Prob. R15-2

R15-3. Un bloque de 20 kg está originalmente en reposo sobre una superficie horizontal cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.6$ y el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.5$. Si se aplica una fuerza horizontal F tal que varía con el tiempo de la manera indicada, determine la rapidez del bloque en 10 s. *Sugerencia:* Primero determine el tiempo necesario para vencer la fricción e iniciar el movimiento del bloque.



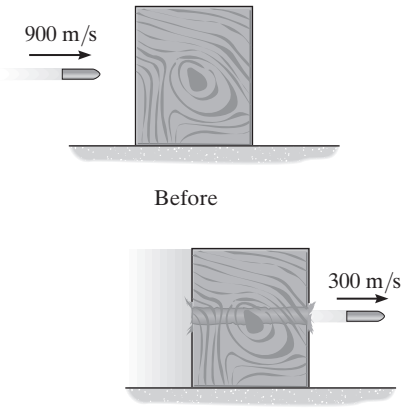
Prob. R15-3

R15-4. Los tres vagones de carga A, B y C tienen masas de 10 Mg, 5 Mg y 20 Mg, respectivamente. Viajan a lo largo de la vía con las velocidades indicadas. El vagón A choca primero contra el vagón B, seguido por el vagón C. Si los tres vagones se acoplan después de la colisión, determine la velocidad común de los vagones después de ocurridas las dos colisiones.



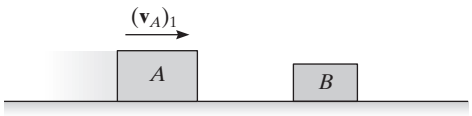
Prob. R15-4

R15-5. El proyectil de 200 g se dispara con una velocidad de 900 m/s hacia el centro del bloque de madera de 15 kg, que descansa sobre una superficie rugosa. Si el proyectil penetra al bloque y emerge de éste con una velocidad de 300 m/s, determine la velocidad del bloque justo después de que sale el proyectil. ¿Cuánto tiempo se desliza el bloque sobre la superficie rugosa, después de que sale el proyectil y antes de llegar al reposo? El coeficiente de fricción cinética entre la superficie y el bloque es $\mu_k = 0.2$.



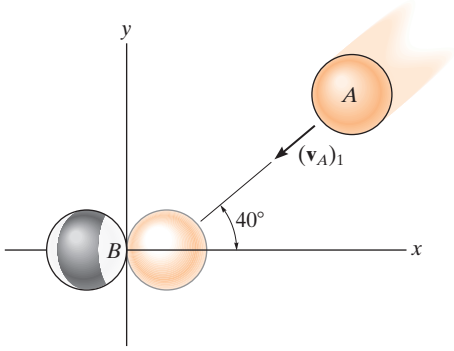
Prob. R15-5

R15-6. El bloque A tiene una masa de 3 kg y se desliza sobre una superficie horizontal rugosa con una velocidad $(v_A)_1 = 2\text{m/s}$ cuando ocurre una colisión directa contra el bloque B, que tiene una masa de 2 kg y está originalmente en reposo. Si el choque es perfectamente elástico ($e = 1$), determine la velocidad de cada bloque justo después de la colisión y la distancia entre los bloques cuando dejan de deslizarse. El coeficiente de fricción cinética entre los bloques y el plano es $\mu_k = 0.3$.



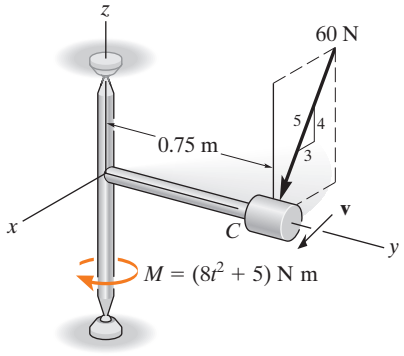
Prob. R15-6

R15-7. Dos bolas de billar lisas A y B tienen la misma masa $m = 200$ g. Si A golpea a B con una velocidad de $(v_A)_1 = 2$ m/s como se muestra, determine sus velocidades finales justo después de la colisión. La bola B está originalmente en reposo y el coeficiente de restitución es $e = 0.75$.



Prob. R15-7

R15-8. El pequeño cilindro C tiene una masa de 10 kg y está unido al extremo de una varilla con masa insignificante. Si la estructura se somete a un par $M = (8t^2 + 5)$ N · m, donde t se da en segundos, y el cilindro se somete a una fuerza de 60 N, que siempre se dirige de la manera indicada, determine la rapidez del cilindro cuando $t = 2$ s. El cilindro tiene una rapidez $v_0 = 2$ m/s cuando $t = 0$.



Prob. R15-8

Capítulo 16

(© TFoxFoto/Shutterstock)

La cinemática es importante para el diseño del mecanismo utilizado en este camión de volteo.

Cinemática plana de un cuerpo rígido

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Clasificar los diversos tipos del movimiento plano de un cuerpo rígido.
- Investigar la traslación y el movimiento angular de un cuerpo rígido con respecto a un eje fijo.
- Estudiar el movimiento plano mediante un análisis del movimiento absoluto.
- Analizar la velocidad y aceleración del movimiento relativo mediante un marco de referencia trasladante.
- Demostrar cómo encontrar el centro instantáneo de velocidad cero y determinar la velocidad de un punto de un cuerpo con este método.
- Analizar la velocidad y aceleración del movimiento relativo mediante un marco de referencia rotatorio.

16.1 Movimiento plano de un cuerpo rígido

En este capítulo se analizará la cinemática plana de un cuerpo rígido, cuyo estudio es importante en el diseño de engranes, levas y mecanismos utilizados en muchas operaciones mecánicas. Una vez que entendamos bien la cinemática, podremos aplicar las ecuaciones de movimiento, las cuales relacionan las fuerzas que actúan en el cuerpo con el movimiento de éste.

El *movimiento plano* de un cuerpo rígido ocurre cuando todas sus partículas se desplazan a lo largo de trayectorias equidistantes de un plano fijo. Existen tres tipos de movimiento plano de un cuerpo rígido, los cuales son, en orden de complejidad creciente,

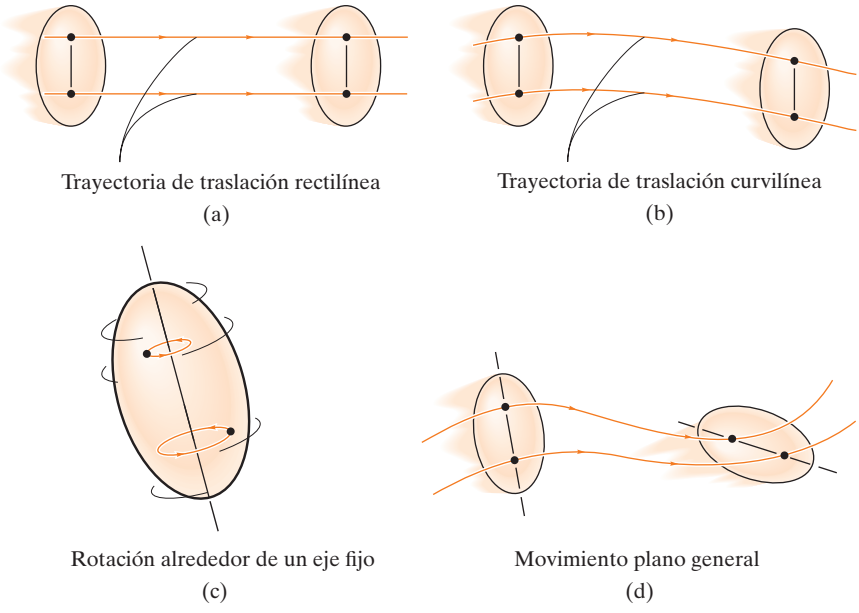


Fig. 16-1

- *Traslación*. Este tipo de movimiento ocurre cuando una línea en el cuerpo permanece paralela a su orientación original durante todo el movimiento. Si las trayectorias del movimiento de dos puntos cualesquiera del cuerpo son líneas paralelas, el movimiento se llama *traslación rectilínea* (fig. 16-1*a*). Cuando las trayectorias del movimiento se desarrollan a lo largo de líneas curvas, el movimiento se llama *traslación curvilínea* (fig. 16-1*b*).
- *Rotación alrededor de un eje fijo*. Si un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, todas sus partículas, excepto aquellas que quedan en el eje de rotación, se mueven a lo largo de trayectorias circulares (fig. 16-1*c*).
- *Movimiento plano general*. Cuando un cuerpo se somete a un movimiento plano general, experimenta una combinación de traslación *y* rotación (fig. 16-1*d*). La traslación se presenta en un plano de referencia y la rotación ocurre alrededor de un eje perpendicular al plano de referencia.

En las secciones siguientes consideraremos, en detalles, cada uno de estos movimientos. En la figura 16-2 se muestran ejemplos de cuerpos sometidos a estos movimientos.

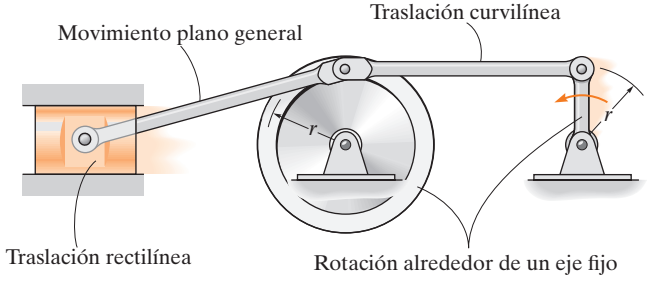


Fig. 16-2

16.2 Traslación

Considere un cuerpo rígido sometido a traslación rectilínea o a traslación curvilínea en el plano x-y (fig. 16-3).

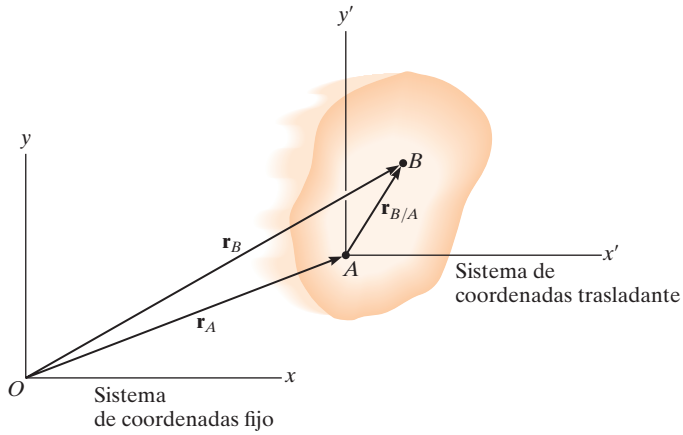


Fig. 16-3

Posición. Las ubicaciones de los puntos A y B en el cuerpo se definen con respecto a un marco de referencia fijo x, y por medio de *vectores de posición* $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$. El sistema de coordenadas x', y' trasladante permanece *fijo en el cuerpo* con su origen en A, en lo sucesivo conocido como *punto base*. La posición de B con respecto a A se denota mediante el *vector de posición relativa* $\mathbf{r}_{B/A}$ ("$\mathbf{r}$ de B con respecto a A"). Por suma vectorial,

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

Velocidad. Una relación entre las velocidades instantáneas de A y B se obtiene mediante la derivada con respecto al tiempo de esta ecuación, de la cual resulta $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + d\mathbf{r}_{B/A}/dt$. En este caso, $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ denotan *velocidades absolutas*, ya que estos vectores se miden con respecto a los ejes x, y. El término $d\mathbf{r}_{B/A}/dt = \mathbf{0}$, pues la *magnitud* de $\mathbf{r}_{B/A}$ es *constante* por definición de un cuerpo rígido y como éste traslada la *dirección* de $\mathbf{r}_{B/A}$ también es *constante*. Por consiguiente,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$$

Aceleración. Al considerar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación de velocidad, se obtiene una relación similar entre las aceleraciones instantáneas de A y B:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$$

Las dos ecuaciones anteriores indican que *todos los puntos en un cuerpo rígido sometidos a traslación rectilínea o curvilínea se mueven con las mismas velocidad y aceleración.* Por lo tanto, la cinemática del movimiento de una partícula, analizada en el capítulo 12, también puede utilizarse para especificar la cinemática de puntos localizados en un cuerpo rígido trasladante.

Los usuarios de esta rueda de la fortuna se someten a traslación curvilínea, ya que las góndolas describen una trayectoria circular aunque siempre permanecen en posición vertical. (© R. C. Hibbeler)

16.3 Rotación alrededor de un eje fijo

Cuando un cuerpo gira alrededor de un eje fijo, cualquier punto P localizado en él se desplaza a lo largo de una *trayectoria circular*. Para estudiar este movimiento, es necesario analizar primero el movimiento angular del cuerpo alrededor del eje.

Movimiento angular. Como un punto no tiene dimensiones, no puede tener movimiento angular. *Solamente las líneas o los cuerpos experimentan movimiento angular.* Por ejemplo, considere el cuerpo de la figura 16-4*a* y el movimiento angular de una línea radial r ubicada en el plano sombreado.

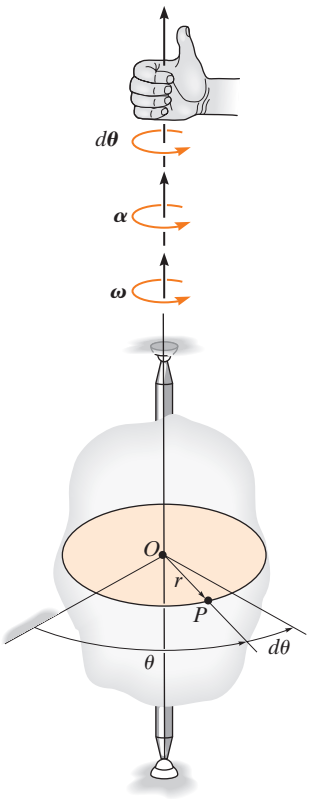
Posición angular. En el instante que se muestra, la *posición angular* de r está definida por el ángulo θ, medido desde una línea de referencia *fija* hasta r.

Desplazamiento angular. El cambio de la posición angular, el cual puede medirse como una diferencial $d\boldsymbol{\theta}$, se llama *desplazamiento angular*.* La *magnitud* de este vector es $d\boldsymbol{\theta}$, medida en grados, radianes o revoluciones, donde 1 rev $= 2\pi$ rad. Como el movimiento es en torno a un *eje fijo*, la dirección de $d\boldsymbol{\theta}$ es *siempre* a lo largo de este eje. Específicamente, la *dirección* se determina con la regla de la mano derecha; es decir, los dedos de la mano derecha se curvan en el sentido de rotación, de modo que en este caso el pulgar, o $d\boldsymbol{\theta}$, apunta hacia arriba (fig. 16-4*a*). En dos dimensiones, como se muestra en la vista desde arriba del plano sombreado (fig. 16-4*b*) tanto θ como $d\theta$ están en sentido antihorario y, por ende, el pulgar apunta hacia fuera de la página.

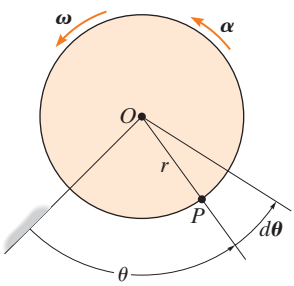
Velocidad angular. El cambio con respecto al tiempo de la posición angular se conoce como *velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$ (omega). Como $d\boldsymbol{\theta}$ ocurre durante un instante de tiempo dt, entonces,

$$(\circlearrowleft +) \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad (16\text{-}1)$$

La *magnitud* de este vector se suele medir en rad/s. Aquí está expresado en forma escalar, ya que su *dirección* también va a lo largo del eje de rotación (fig. 16-4*a*). Cuando se indica el movimiento angular en el plano sombreado (fig. 16-4*b*), podemos referirnos al sentido de rotación como en sentido horario o antihorario. En este caso, elegimos *arbitrariamente* las rotaciones en sentido antihorario como *positivas* y esto se indica por medio del bucle que aparece entre paréntesis al lado de la ecuación 16-1. Dese cuenta, sin embargo, que el sentido direccional de $\boldsymbol{\omega}$ en realidad es hacia fuera de la página.



(a)



(b)

Fig. 16-4

*En la sección 20.1 se demuestra que las rotaciones finitas o los desplazamientos angulares finitos *no* son cantidades vectoriales, aun cuando las rotaciones diferenciales $d\boldsymbol{\theta}$ sean vectores.

Aceleración angular. La *aceleración angular* $\boldsymbol{\alpha}$ (alfa) mide el cambio con respecto al tiempo de la velocidad angular. La *magnitud* de este vector es

$$(\circlearrowleft+) \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{16-2}$$

Con la ecuación 16-1, también es posible expresar α como

$$(\circlearrowleft+) \qquad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{16-3}$$

La línea de acción de $\boldsymbol{\alpha}$ es la misma que la de $\boldsymbol{\omega}$ (fig. 16-4*a*); sin embargo, su sentido de *dirección* depende de si $\boldsymbol{\omega}$ se incrementa o decrece. Si decrece, entonces $\boldsymbol{\alpha}$ se llama *desaceleración angular* y, por consiguiente, su dirección se opone a $\boldsymbol{\omega}$.

Al eliminar dt de las ecuaciones 16-1 y 16-2, obtenemos una relación diferencial entre la aceleración angular, la velocidad angular y el desplazamiento angular, es decir,

$$(\circlearrowleft+) \qquad \alpha\, d\theta = \omega\, d\omega \tag{16-4}$$

La similitud entre las relaciones diferenciales del movimiento angular y las desarrolladas para movimiento rectilíneo de una partícula ($v = ds/dt$, $a = dv/dt$, y $a\, ds = v\, dv$) debería ser evidente.

Aceleración angular constante. Si la aceleración angular del cuerpo es *constante*, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_c$, entonces, cuando se integran las ecuaciones 16-1, 16-2 y 16-4, se obtiene un conjunto de fórmulas que relacionan la velocidad angular, la posición angular y el tiempo de un cuerpo. Estas ecuaciones son semejantes a las ecuaciones 12-4 a 12-6 que se utilizaron para movimiento rectilíneo. Los resultados son

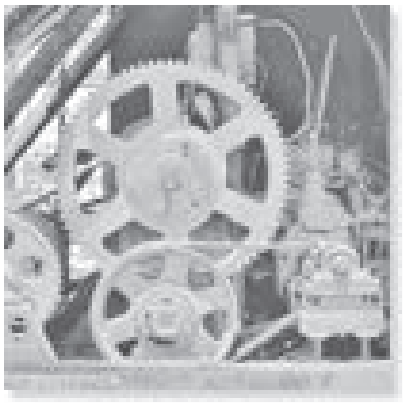
$$(\circlearrowleft+) \qquad \omega = \omega_0 + \alpha_c t \tag{16-5}$$

$$(\circlearrowleft+) \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2 \tag{16-6}$$

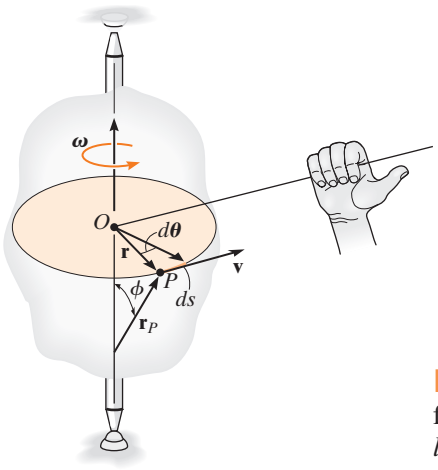
$$(\circlearrowleft+) \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0) \tag{16-7}$$

Aceleración angular constante

En este caso, θ_0 y ω_0 son los valores iniciales de la posición angular y la velocidad angular del cuerpo, respectivamente.

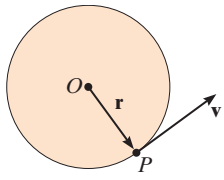


Todos los engranes usados en la operación de una grúa giran alrededor de ejes fijos. Los ingenieros deben ser capaces de relacionar sus movimientos angulares a fin de diseñar de manera adecuada este sistema de engranes. (© R. C. Hibbeler)



(c)

Fig. 16-4 (*cont.*)



(d)

Movimiento de un punto *P*. Cuando el cuerpo rígido de la figura 16-4*c* gira, el punto P se desplaza a lo largo de una *trayectoria circular* de radio r con centro en el punto O. Esta trayectoria está contenida en el plano sombreado de la vista superior (fig. 16-4*d*).

Posición y desplazamiento. La posición de P está definida por el vector de posición $\mathbf{r}$, el cual se extiende desde O hasta P. Si el cuerpo gira $d\theta$ entonces P se desplazará $ds = r\,d\theta$.

Velocidad. La magnitud de la velocidad de P se calcula dividiendo $ds = rd\theta$ entre dt, de modo que

$$v = \omega r \tag{16-8}$$

Como se muestra en las figuras 16-4*c* y 16-4*d*, la *dirección de* $\mathbf{v}$ *es tangente* a la trayectoria circular.

Tanto la magnitud como la dirección de $\mathbf{v}$ también pueden tenerse en cuenta, si se utiliza el producto vectorial de $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{r}_P$ (vea el apéndice B). En este caso, la dirección $\mathbf{r}_P$ es de *cualquier punto* sobre el eje de rotación a cualquier punto P (fig. 16-4*c*). Tenemos

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P \tag{16-9}$$

El orden de los vectores en esta formulación es importante, ya que el producto vectorial no es conmutativo, es decir, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P \neq \mathbf{r}_P \times \boldsymbol{\omega}$. Observe en la figura 16-4*c* cómo se establece la dirección correcta de $\mathbf{v}$ con la regla de la mano derecha. Los dedos de la mano derecha se enroscan de $\boldsymbol{\omega}$ hacia $\mathbf{r}_P$ ($\boldsymbol{\omega}$ "cruz" $\mathbf{r}_P$). El pulgar indica la dirección correcta de $\mathbf{v}$, la cual es tangente a la trayectoria en la dirección del movimiento. De acuerdo con la ecuación B-8, la magnitud de $\mathbf{v}$ en la ecuación 16-9 es $v = \omega r_P \operatorname{sen} \phi$, y puesto que $r = r_P \operatorname{sen} \phi$ (fig. 16-4*c*), entonces $v = \omega r$, la cual concuerda con la ecuación 16-8. Como un caso especial, el vector de posición $\mathbf{r}$ puede elegirse para $\mathbf{r}_P$. Aquí, $\mathbf{r}$ queda en el plano del movimiento y de nueva cuenta la velocidad del punto P es

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{16-10}$$

Aceleración. La aceleración de P puede expresarse en función de sus componentes normal y tangencial. Al aplicar las ecuaciones 12-19 y 12-20, $a_t = dv/dt$ y $a_n = v^2/\rho$, donde $\rho = r$, $v = \omega r$ y $\alpha = d\omega/dt$, obtenemos

$$a_t = \alpha r \tag{16-11}$$

$$a_n = \omega^2 r \tag{16-12}$$

La *componente tangencial de la aceleración*, figuras 16-4*e* y 16-4*f*, representa el cambio con respecto al tiempo de la magnitud de la velocidad. Si aumenta la rapidez de P, entonces $\mathbf{a}_t$ actúa en la misma dirección que $\mathbf{v}$; si se reduce, $\mathbf{a}_t$ actúa en la dirección opuesta de $\mathbf{v}$; y finalmente, si permanece constante, $\mathbf{a}_t$ es cero.

La *componente normal de la aceleración* representa el cambio con respecto al tiempo de la dirección de la velocidad. La *dirección* de $\mathbf{a}_n$ siempre es hacia O, el centro de la trayectoria circular, figuras 16-4*e* y 16-4*f*.

Al igual que la velocidad, la aceleración del punto P puede expresarse en función del producto vectorial (producto cruz). Si consideramos la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 16-9, tenemos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_P}{dt}$$

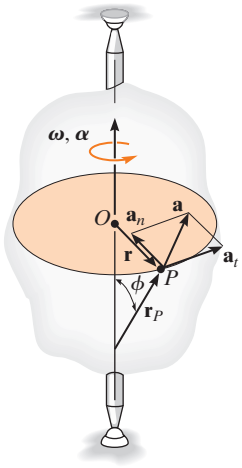
Si se recuerda que $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ y se utiliza la ecuación 16-9 ($d\mathbf{r}_P/dt = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$), se obtiene

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) \tag{16-13}$$

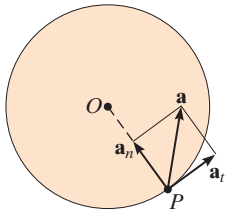
Por la definición del producto vectorial, la magnitud del primer término de la derecha es $a_t = \alpha r_P \operatorname{sen} \phi = \alpha r$ y, por la regla de la mano derecha, $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P$ está en la dirección de $\mathbf{a}_t$ (fig. 16-4*e*). Asimismo, la magnitud del segundo término es $a_n = \omega^2 r_P \operatorname{sen} \phi = \omega^2 r$, y al aplicar dos veces la regla de la mano derecha, primero para determinar el resultado $\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$ y después $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_P$, se observa que este resultado tiene la misma dirección que $\mathbf{a}_n$, como se muestra en la figura 16-4*e*. Si nos damos cuenta de que ésta también es la *misma* dirección que $-\mathbf{r}$, la cual queda en el plano del movimiento, podemos expresar $\mathbf{a}_n$ en una forma mucho más sencilla que $\mathbf{a}_n = -\omega^2 \mathbf{r}$. Por consiguiente, la ecuación 16-13 se identifica mediante sus dos componentes como

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \\ &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r} \end{aligned} \tag{16-14}$$

Puesto que $\mathbf{a}_t$ y $\mathbf{a}_n$ son perpendiculares entre sí, si se requiere, la magnitud de la aceleración puede determinarse con el teorema de Pitágoras, es decir, $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$, (fig. 16-4*f*).



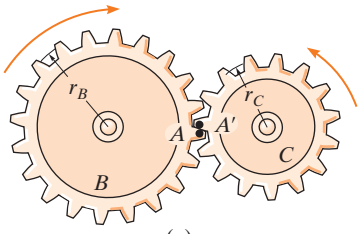
(e)



(f)

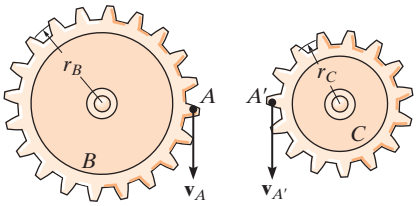
Fig. 16-4 (cont.)

16

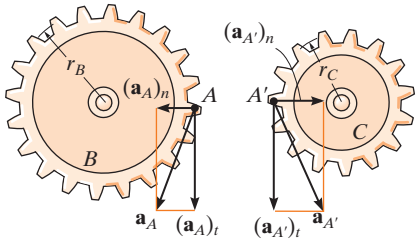


(a)

Si dos cuerpos giratorios tienen contacto entre sí, entonces los *puntos en contacto* se mueven a lo largo de *trayectorias circulares diferentes*, y la velocidad y las *componentes tangenciales* de la aceleración de los puntos serán la *mismas*; sin embargo, las *componentes normales* de la aceleración *no* serán iguales. Por ejemplo, considere los dos engranes acoplados de la figura 16-5*a*. El punto A se localiza sobre el engrane B y un punto coincidente A' está situado sobre el engrane C. Debido al movimiento de rotación, $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{A'}$ (fig. 16-5*b*), y como resultado, $\omega_B r_B = \omega_C r_C$ o $\omega_B = \omega_C (r_C/r_B)$. Además, a partir de la figura 16-5*c*, $(\mathbf{a}_A)_t = (\mathbf{a}_{A'})_t$, de modo que $\alpha_B = \alpha_C (r_C/r_B)$; sin embargo, como ambos puntos siguen trayectorias circulares diferentes, $(\mathbf{a}_A)_n \neq (\mathbf{a}_{A'})_n$ y, por lo tanto, como se indica, $\mathbf{a}_A \neq \mathbf{a}_{A'}$.



(b)



(c)

Fig. 16-5

Puntos importantes

- Un cuerpo puede experimentar dos tipos de traslación. Durante la traslación rectilínea todos los puntos siguen trayectorias de línea recta paralelas y, durante la traslación curvilínea, los puntos siguen trayectorias curvas que tienen la misma forma.
- Todos los puntos de un cuerpo que se traslada se mueven con las mismas velocidad y aceleración.
- Los puntos ubicados en un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo siguen trayectorias circulares.
- La relación $\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$ se deriva de $\alpha = d\omega/dt$ y $\omega = d\theta/dt$ al eliminar dt.
- Una vez conocidos los movimientos angulares ω y α, pueden determinarse la velocidad y aceleración de cualquier punto del cuerpo.
- La velocidad siempre actúa tangente a la trayectoria del movimiento.
- La aceleración tiene dos componentes. La aceleración tangencial mide el cambio de la magnitud de la velocidad y se determina con $a_t = \alpha r$. La aceleración normal mide el cambio de la dirección de la velocidad y se determina con $a_n = \omega^2 r$.

Procedimiento para el análisis

La velocidad y aceleración de un punto situado en un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo se determinan mediante el siguiente procedimiento.

Movimiento angular

- Establezca el sentido positivo de rotación alrededor del eje de rotación y muéstrelo junto con cada ecuación cinemática conforme se aplique.
- Si se conoce una relación entre *dos* de las cuatro variables α, ω, θ y t, entonces puede obtenerse una tercera variable al usar una de las siguientes ecuaciones cinemáticas, la cual relaciona las tres variables.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$$

- Si la aceleración angular del cuerpo es *constante*, entonces pueden utilizarse las siguientes ecuaciones:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

- Una vez que se obtiene la solución, el sentido de θ, ω y α se determina con el signo algebraico de sus cantidades numéricas.

Movimiento de un punto *P*

- En la mayoría de los casos, la velocidad de P y sus dos componentes de aceleración se determinan con las ecuaciones escalares

$$v = \omega r$$
$$a_t = \alpha r$$
$$a_n = \omega^2 r$$

- Si la geometría del problema es difícil de visualizar, deberán utilizarse las siguientes ecuaciones vectoriales:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$
$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$
$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) = -\omega^2 \mathbf{r}$$

- En este caso, la dirección de $\mathbf{r}_P$ es desde cualquier punto sobre el eje de rotación al punto P, mientras que $\mathbf{r}$ queda en el plano del movimiento de P. Cualquiera de estos vectores, junto con $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$, deberán expresarse en función de sus componentes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ y, si es necesario, los productos vectoriales determinados al utilizar una expansión determinante (vea la ecuación B-12).

EJEMPLO 16.1

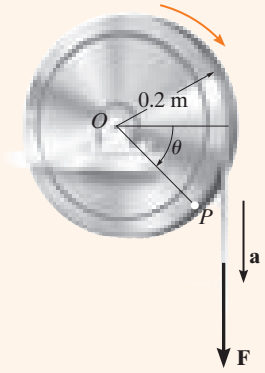


Fig. 16-6

Se enrolla una cuerda alrededor de la rueda mostrada en la figura 16-6, la cual inicialmente está en reposo cuando $\theta = 0$. Si se aplica una fuerza a la cuerda y se le imparte una aceleración $a = (4t)\ \text{m/s}^2$, donde t está en segundos, determine, como una función del tiempo, (a) la velocidad angular de la rueda y (b) la posición angular de la línea OP en radianes.

SOLUCIÓN

Parte (a). La rueda está sometida a rotación alrededor de un eje fijo que pasa por el punto O. Entonces, un punto P en la rueda describe una trayectoria circular y su aceleración tiene componentes *tanto* tangenciales *como* normales. La componente tangencial es $(a_P)_t = (4t)\ \text{m/s}^2$, ya que la cuerda está enrollada alrededor de la rueda y se desplaza *tangente* a ella. Por consiguiente, la aceleración angular de la rueda es

$$(\circlearrowright +) \qquad (a_P)_t = \alpha r$$
$$(4t)\ \text{m/s}^2 = \alpha(0.2\ \text{m})$$
$$\alpha = (20t)\ \text{rad/s}^2 \circlearrowright$$

Con este resultado y $\alpha = d\omega/dt$, ahora podemos determinar la velocidad angular de la rueda ω, ya que esta ecuación relaciona α, t y ω. Al integrar, con la condición inicial de que $\omega = 0$ cuando $t = 0$, se obtiene

$$(\circlearrowright +) \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = (20t)\ \text{rad/s}^2$$
$$\int_0^{\omega} d\omega = \int_0^t 20t\, dt$$
$$\omega = 10t^2\ \text{rad/s} \circlearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

Parte (b). Con este resultado y $\omega = d\theta/dt$, podemos determinar la posición angular θ de OP, pues esta ecuación relaciona θ, ω y t. Al integrar, con la condición inicial de que $\theta = 0$ cuando $t = 0$, tenemos

$$(\circlearrowright +) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega = (10t^2)\ \text{rad/s}$$
$$\int_0^{\theta} d\theta = \int_0^t 10t^2\, dt$$
$$\theta = 3.33t^3\ \text{rad} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: No podemos utilizar la ecuación de aceleración angular constante, ya que α es una función del tiempo.

EJEMPLO 16.2

El motor que se muestra en la fotografía se utiliza para hacer girar un ensamble de rueda y ventilador alojado en la carcasa. Los detalles se muestran en la figura 16-7*a*. Si la polea A conectada al motor comienza a girar desde el punto de reposo con una aceleración angular constante de $\alpha_A = 2\ \text{rad/s}^2$, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto P en la rueda, después de que la polea haya realizado dos revoluciones. Suponga que la banda de transmisión no se resbala en la polea y la rueda.

(© R. C. Hibbeler)

SOLUCIÓN

Movimiento angular. Primero convertiremos las dos revoluciones en radianes. Como una revolución equivale a 2π rad, entonces

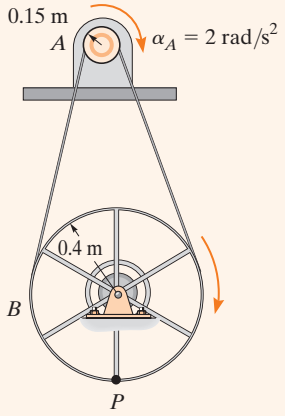
$$\theta_A = 2\ \text{rev}\left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}}\right) = 12.57\ \text{rad}$$

Como α_A es constante, la velocidad angular de la polea A es, por consiguiente,

$$(\circlearrowright +) \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$
$$\omega_A^2 = 0 + 2(2\ \text{rad/s}^2)(12.57\ \text{rad} - 0)$$
$$\omega_A = 7.090\ \text{rad/s}$$

La banda tiene la misma rapidez y componente tangencial de la aceleración cuando pasa por la polea y la rueda. Por lo tanto,

$$v = \omega_A r_A = \omega_B r_B; \quad 7.090\ \text{rad/s}\ (0.15\ \text{m}) = \omega_B(0.4\ \text{m})$$
$$\omega_B = 2.659\ \text{rad/s}$$
$$a_t = \alpha_A r_A = \alpha_B r_B; \quad 2\ \text{rad/s}^2\ (0.15\ \text{m}) = \alpha_B(0.4\ \text{m})$$
$$\alpha_B = 0.750\ \text{rad/s}^2$$



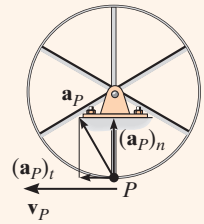
(a)

Movimiento de *P*. Como se muestra en el diagrama cinemático de la figura 16-7*b*, tenemos

$$v_P = \omega_B r_B = 2.659\ \text{rad/s}\ (0.4\ \text{m}) = 1.06\ \text{m/s} \qquad \textit{Resp.}$$
$$(a_P)_t = \alpha_B r_B = 0.750\ \text{rad/s}^2\ (0.4\ \text{m}) = 0.3\ \text{m/s}^2$$
$$(a_P)_n = \omega_B^2 r_B = (2.659\ \text{rad/s})^2(0.4\ \text{m}) = 2.827\ \text{m/s}^2$$

Por lo tanto,

$$a_P = \sqrt{(0.3\ \text{m/s}^2)^2 + (2.827\ \text{m/s}^2)^2} = 2.84\ \text{m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$



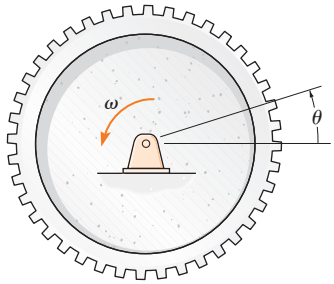
(b)

Fig. 16-7

16

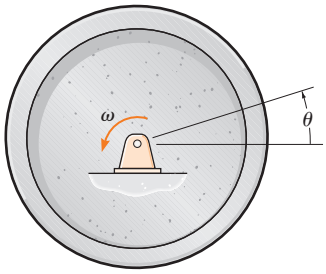
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F16-1. Cuando el engrane realiza 20 revoluciones, alcanza una velocidad angular de $\omega = 30$ rad/s, a partir del punto de reposo. Determine su aceleración angular constante y el tiempo requerido.



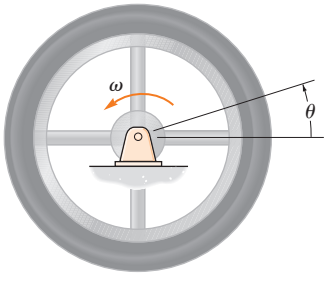
Prob. F16-1

F16-2. El volante gira con una velocidad angular de $\omega = (0.005\theta^2)$ rad/s, donde θ está en radianes. Determine la aceleración angular cuando haya realizado 20 revoluciones.



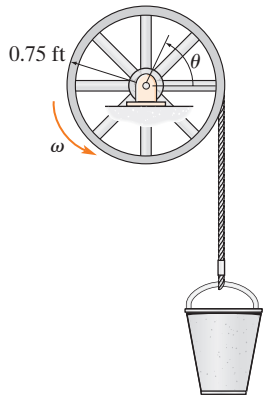
Prob. F16-2

F16-3. El volante gira con una velocidad angular de $\omega = (4\theta^{1/2})$ rad/s, donde θ está en radianes. Determine el tiempo que requiere para alcanzar una velocidad angular de $\omega = 150$ rad/s. Cuando $t = 0, \theta = 1$ rad.



Prob. F16-3

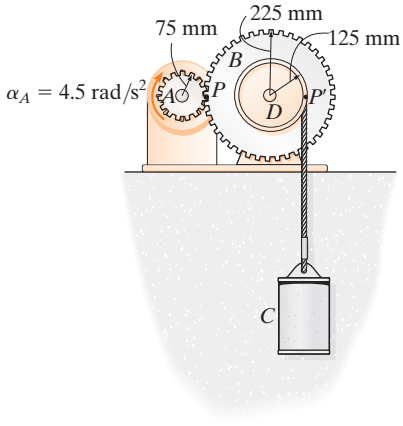
F16-4. La cuerda que se enrolla alrededor de una rueda de tambor levanta la cubeta. Si el desplazamiento angular de la rueda es $\theta = (0.5t^3 + 15t)$ rad, donde t está en segundos, determine la velocidad y la aceleración de la cubeta cuando $t = 3$ s.



Prob. F16-4

F16-5. Una rueda tiene una aceleración angular de $\alpha = (0.5\,\theta)$ rad/s^2, donde θ está en radianes. Determine la magnitud de la velocidad y aceleración de un punto P localizado en su borde, después de que la rueda haya realizado 2 revoluciones. El radio de la rueda es de 0.2 m y comienza a girar a $\omega_0 = 2$ rad/s.

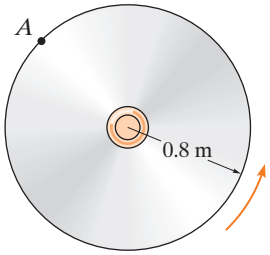
F16-6. Durante un breve tiempo, el motor hace girar el engrane A con una aceleración angular constante de $\alpha_A = 4.5$ rad/s^2, a partir del punto de reposo. Determine la velocidad del cilindro y la distancia que recorre en tres segundos. La cuerda se enrolla en la polea D, la cual está sólidamente unida al engrane B.



Prob. F16-6

PROBLEMAS

16-1. La velocidad angular del disco está definida por $\omega = (5t^2 + 2)$ rad/s, donde t se da en segundos. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto A en el disco, cuando $t = 0.5$ s.

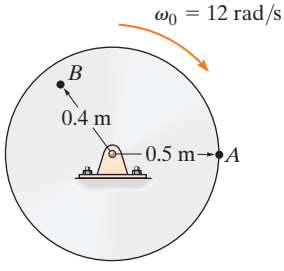


Prob. 16-1

16-2. La aceleración angular del disco está definida por $\alpha = 3t^2 + 12$ rad/s, donde t se da en segundos. Si el disco gira originalmente a $\omega_0 = 12$ rad/s, determine la magnitud de la velocidad y las componentes n y t de la aceleración del punto A sobre el disco cuando $t = 2$ s.

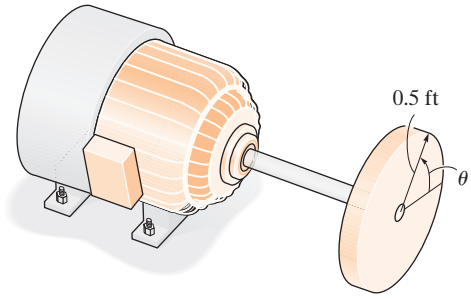
16-3. El disco está girando originalmente a $\omega_0 = 12$ rad/s. Si se somete a una aceleración angular constante de $\alpha = 20$ rad/s^2, determine las magnitudes de la velocidad y las componentes n y t de la aceleración del punto A en el instante $t = 2$ s.

***16-4.** El disco está girando originalmente a $\omega_0 = 12$ rad/s. Si se somete a una aceleración angular constante de $\alpha = 20$ rad/s^2, determine las magnitudes de la velocidad y las componentes n y t de la aceleración del punto B cuando el disco experimenta 2 revoluciones.



Probs. 16-2/3/4

16-5. El disco se impulsa mediante un motor, de modo que la posición angular del disco está definida por $\theta = (20t + 4t^2)$ rad, donde t se da en segundos. Determine el número de revoluciones, la velocidad angular y la aceleración angular del disco, cuando $t = 90$ s.

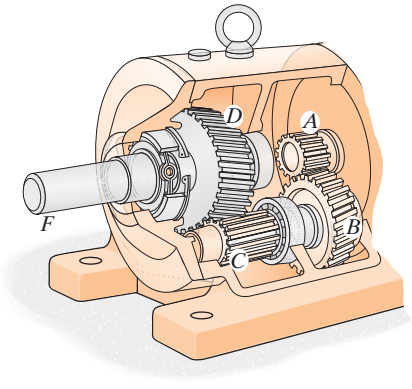


Prob. 16-5

16-6. Una rueda tiene una velocidad angular inicial de 10 rad/s en sentido horario y una aceleración angular constante de 3 rad/s^2. Determine el número de revoluciones que debe experimentar para adquirir una velocidad angular en sentido horario de 15 rad/s. ¿Cuánto tiempo requiere?

16-7. Si el engrane A gira con una aceleración angular constante de $\alpha_A = 90$ rad/s^2, partiendo del reposo, determine el tiempo requerido para que el engrane D alcance una velocidad angular de 600 rpm. También encuentre el número de revoluciones del engrane D para alcanzar esta velocidad angular. Los engranes A, B, C y D tienen radios de 15 mm, 50 mm, 25 mm y 75 mm, respectivamente.

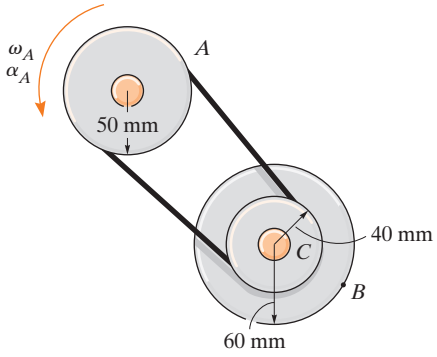
***16-8.** Si el engranaje A gira con una velocidad angular de $\omega_A = (\theta_A + 1)$ rad/s, donde θ_A es el desplazamiento angular del engrane A, medido en radianes, determine la aceleración angular del engrane D cuando $\theta_A = 3$ rad, si parte del reposo. Los engranes A, B, C y D tienen radios de 15 mm, 50 mm, 25 mm y 75 mm, respectivamente.



Probs. 16-7/8

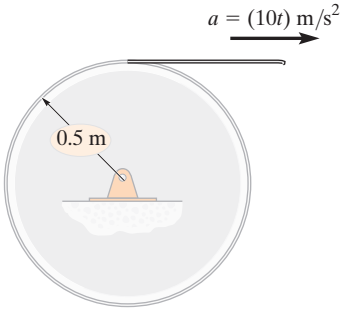
16-9. En el instante $\omega_A = 5$ rad/s, la polea A tiene una aceleración angular $\alpha = (0.8\theta)$ rad/s^2, donde θ está en radianes. Determine la magnitud de la aceleración del punto B sobre la polea C cuando A gira 3 revoluciones. La polea C tiene un eje interno que está fijo al externo y gira junto con él.

16-10. En el instante $\omega_A = 5$ rad/s, la polea A tiene una aceleración angular constante $\alpha_A = 6$ rad/s^2. Determine la magnitud de la aceleración del punto B sobre la polea C cuando A gira 2 revoluciones. La polea C tiene un eje interno que está fijo al externo y gira junto con él.



Probs. 16-9/10

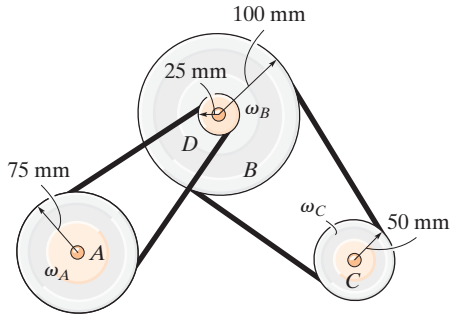
16-11. La cuerda, que se enrolla alrededor del disco, recibe una aceleración de $a = (10t)$ m/s^2, donde t se da en segundos. A partir del reposo, determine el desplazamiento angular, la velocidad angular y la aceleración angular del disco cuando $t = 3$ s.



Prob. 16-11

***16-12.** La potencia de un motor de autobús se transmite utilizando el dispositivo de banda y polea que se ilustra. Si el motor gira la polea A a $\omega_A = (20t + 40)$ rad/s, donde t se da en segundos, determine las velocidades angulares de la polea B del generador y la polea C del aire acondicionado cuando $t = 3$ s.

16-13. La potencia de un motor de autobús se transmite utilizando el dispositivo de banda y polea que se ilustra. Si el motor gira la polea A a $\omega_A = 60$ rad/s, determine las velocidades angulares de la polea B del generador y la polea C del aire acondicionado. El eje en D está *conectado* rígidamente a B y gira con ésta.

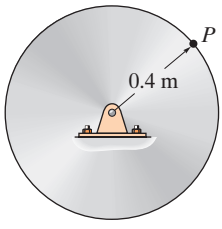


Probs. 16-12/13

16-14. El disco parte desde el reposo y se le da una aceleración angular $\alpha = (2t^2)$ rad/s^2, donde t se da en segundos. Determine la velocidad angular del disco y su desplazamiento angular cuando $t = 4$ s.

16-15. El disco parte desde el reposo y se le da una aceleración angular $\alpha = (5t^{1/2})$ rad/s^2, donde t se da en segundos. Determine las magnitudes de las componentes normal y tangencial de la aceleración de un punto P sobre el borde del disco cuando $t = 2$ s.

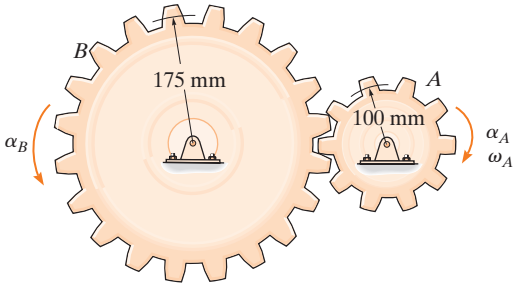
***16-16.** El disco inicia en $\omega_0 = 1$ rad/s cuando $\theta = 0$, y se le da una aceleración angular $\alpha = (0.3\theta)$ rad/s^2, donde θ está en radianes. Determine las magnitudes de las componentes normal y tangencial de la aceleración de un punto P sobre el borde del disco cuando $\theta = 1$ rev.



Probs. 16-14/15/16

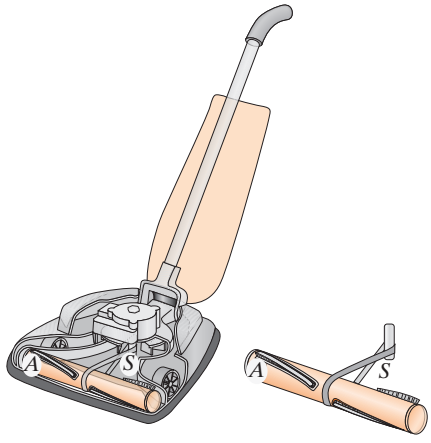
16-17. Un motor da al engrane A una aceleración angular de $\alpha_A = (2 + 0.006\,\theta^2)$ rad/s^2, donde θ está en radianes. Si este engrane gira inicialmente a $\omega_A = 15$ rad/s, determine la velocidad angular del engrane B después de que A experimenta un desplazamiento angular de 10 rev.

16-18. Un motor da al engrane A una aceleración angular de $\alpha_A = (2t^3)$ rad/s^2, donde t se da en segundos. Si este engrane gira inicialmente a $\omega_A = 15$ rad/s, determine la velocidad angular del engrane B cuando $t = 3$ s.



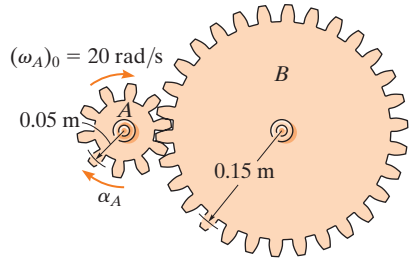
Probs. 16-17/18

16-19. La flecha S de la armadura de la aspiradora gira con una aceleración angular de $\alpha = 4\omega^{3/4}$ rad/s^2, donde ω está en rad/s. Determine la velocidad angular del cepillo cuando $t = 4$ s, a partir de $\omega_0 = 1$ rad/s en $\theta = 0$. Los radios de la flecha y el cepillo son de 0.25 in y 1 in, respectivamente. Desprecie el espesor de la banda motriz.



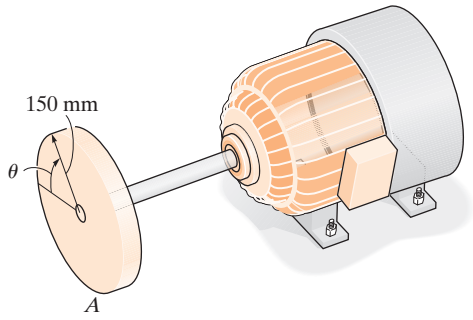
Prob. 16-19

***16-20.** Un motor da al engrane A una aceleración angular de $\alpha_A = (4t^3)$ rad/s^2, donde t se da en segundos. Si este engrane gira inicialmente a $(\omega_A)_0 = 20$ rad/s, determine la velocidad angular del engrane B cuando $t = 2$ s.



Prob. 16-20

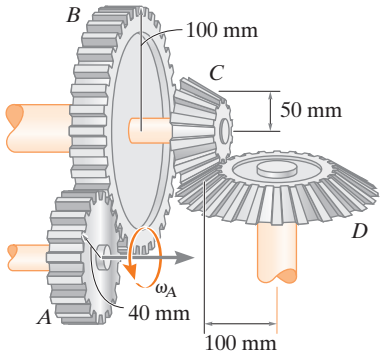
16-21. El motor gira el disco con una velocidad angular de $\omega = (5t^2 + 3t)$ rad/s, donde t se da en segundos. Determine las magnitudes de la velocidad y las componentes n y t de la aceleración del punto A sobre el disco cuando $t = 3$ s.



Prob. 16-21

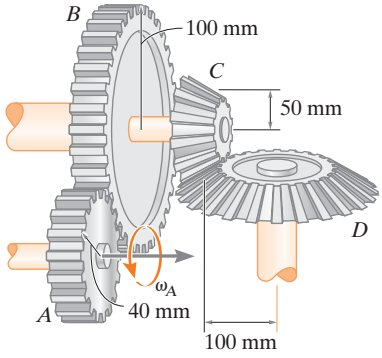
16

16-22. Si el motor gira el engrane A con una aceleración angular de $\alpha_A = 2$ rad/s^2 cuando la velocidad angular es $\omega_A = 20$ rad/s, determine la aceleración angular y la velocidad angular del engrane D.



Prob. 16-22

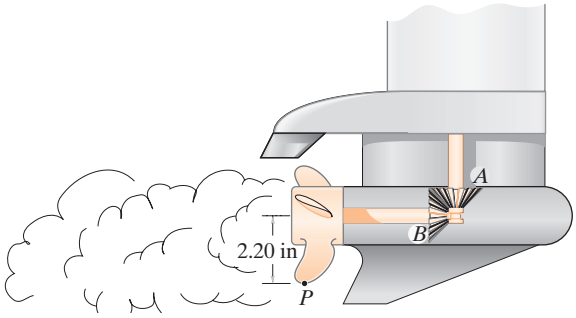
16-23. Si el motor gira el engrane A con una aceleración angular de $\alpha_A = 3$ rad/s^2 cuando la velocidad angular es $\omega_A = 60$ rad/s, determine la aceleración angular y la velocidad angular del engrane D.



Prob. 16-23

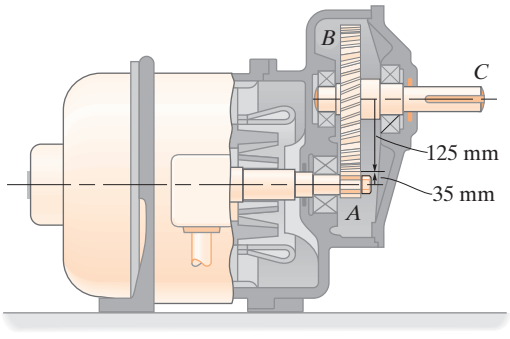
***16-24.** El engrane A sobre la flecha de transmisión del motor fuera de borda tiene un radio $r_A = 0.5$ in y el engrane de piñón B sobre el eje de la hélice tiene un radio $r_B = 1.2$ in. Determine la velocidad angular de la hélice en $t = 1.5$ s, si la flecha de transmisión gira con una aceleración angular $\alpha = (400t^3)$ rad/s^2, donde t se da en segundos. La hélice está originalmente en reposo y la carcasa del motor no se mueve.

16-25. Para el motor fuera de borda del problema 16-24, determine la magnitud de la velocidad y la aceleración del punto P situado en la punta de la hélice en el instante $t = 0.75$ s.



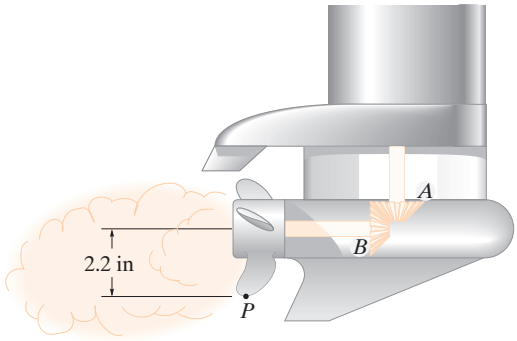
Probs. 16-24/25

16-26. El engrane de piñón A sobre el eje del motor recibe una aceleración angular constante $\alpha = 3$ rad/s^2. Si los engranes A y B tienen las dimensiones indicadas, determine la velocidad y el desplazamiento angulares del eje de salida C, cuando $t = 2$ s, partiendo del reposo. El eje está fijo a B y gira con éste.



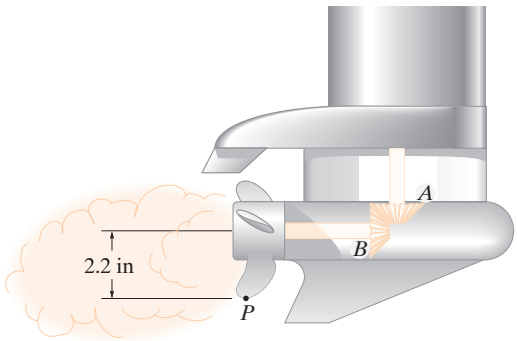
Prob. 16-26

16-27. El engrane sobre la flecha de transmisión del motor fuera de borda tiene un radio $r_A = 0.7$ in y el engrane de piñón B sobre el eje de la hélice tiene un radio $r_B = 1.4$ in. Determine la velocidad angular de la hélice en $t = 1.3$ s, si la flecha de transmisión gira con una aceleración angular $\alpha = (300\sqrt{t})$ rad/s^2, donde t se da en segundos. La hélice está originalmente en reposo y la carcasa del motor no se mueve.



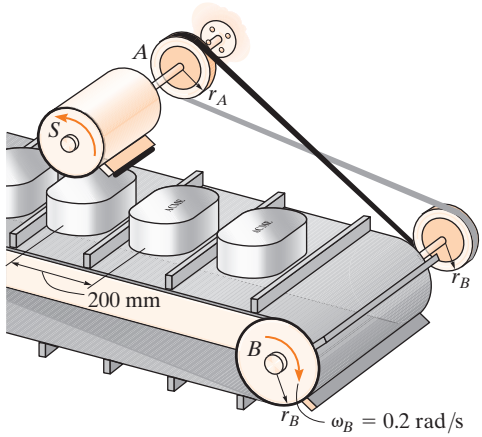
Prob. 16-27

***16-28.** El engrane A sobre la flecha de transmisión del motor fuera de borda tiene un radio $r_A = 0.7$ in y el engrane de piñón B sobre el eje de la hélice tiene un radio $r_B = 1.4$ in. Determine de las magnitudes de la velocidad y la aceleración de un punto P situado en la punta de la hélice en el instante $t = 0.75$ s. La flecha de transmisión gira con una aceleración angular $\alpha = (300\sqrt{t})$ rad/s^2, donde t se da en segundos. La hélice está originalmente en reposo y la carcasa del motor no se mueve.



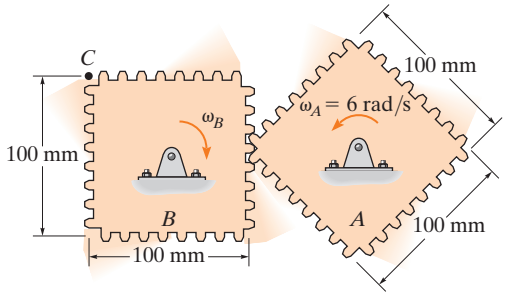
Prob. 16-28

16-29. Un sello S, ubicado en el tambor giratorio, se utiliza para etiquetar recipientes. Si las latas se centran con 200 mm entre sí sobre la banda transportadora, determine el radio r_A de la rueda impulsora A y el radio r_B del tambor de la banda transportadora, de modo que en cada revolución del sello, éste marca la parte superior de una lata. ¿Cuántas latas se marcan por minuto, si el tambor en B gira a $\omega_B = 0.2$ rad/s? Note que la banda impulsora se cruza al pasar entre las ruedas.



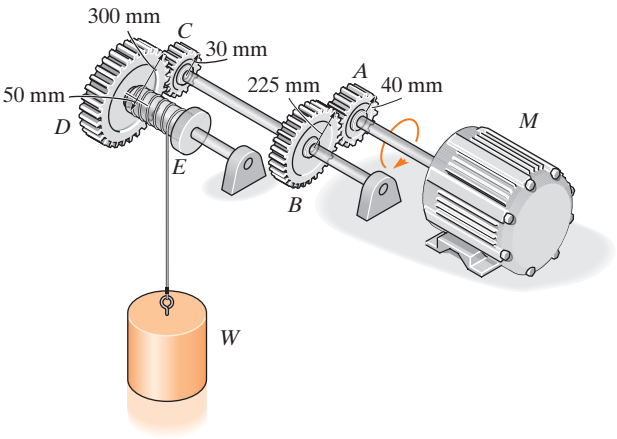
Prob. 16-29

16-30. En el instante indicado, el engrane A gira con una velocidad angular constante de $\omega_A = 6$ rad/s. Determine la velocidad angular máxima del engrane B y la velocidad máxima del punto C.



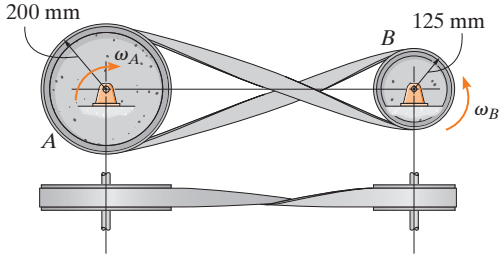
Prob. 16-30

16-31. Determine la distancia que se eleva la carga W se en $t = 5$ s utilizando el malacate. El eje del motor M gira con una velocidad angular $\omega = 100(4 + t)$ rad/s, donde t se da en segundos.



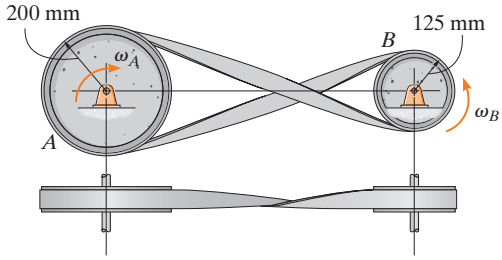
Prob. 16-31

***16-32.** La banda de transmisión se cruza de modo que la polea B gira en sentido opuesto al de la rueda de transmisión A. Si A tiene una aceleración angular constante de $\alpha_A = 30$ rad/s^2, determine las componentes tangencial y normal de la aceleración de un punto situado en el borde de B cuando $t = 3$ s, partiendo del reposo.



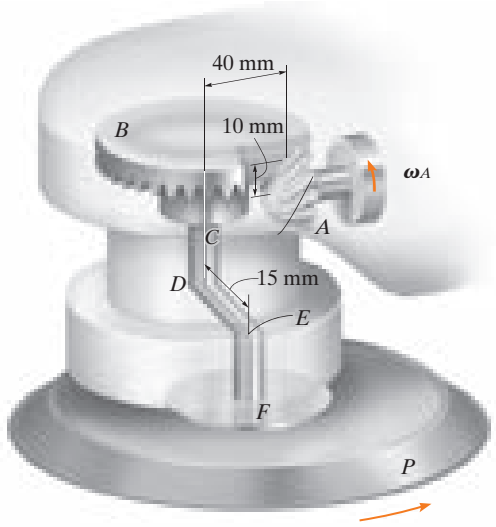
Prob. 16-32

16-33. La banda de transmisión se tuerce de modo que la polea B gira en sentido opuesto al de la rueda de transmisión A. Si el desplazamiento angular de A es $\theta_A = (5t^3 + 10t^2)$ rad, donde t se da en segundos, determine la velocidad angular y la aceleración angular de B cuando $t = 3$ s.



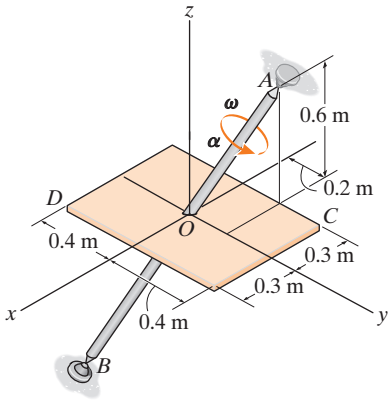
Prob. 16-33

16-34. Por un corto tiempo un motor de la lijadora orbital aleatoria acciona el engrane A con una velocidad angular de $\omega_A = 40(t^3 + 6t)$ rad/s, donde t se da en segundos. Este engrane se encuentra conectado al engrane B, que está conectado fijamente al eje CD. El extremo de este eje se encuentra conectado al vástago excéntrico EF y a la almohadilla P, lo cual provoca que la almohadilla orbite alrededor del eje CD en un radio de 15 mm. Determine las magnitudes de la velocidad y las componentes tangencial y normal de la aceleración del vástago EF, cuando $t = 2$ s después de iniciar desde el reposo.



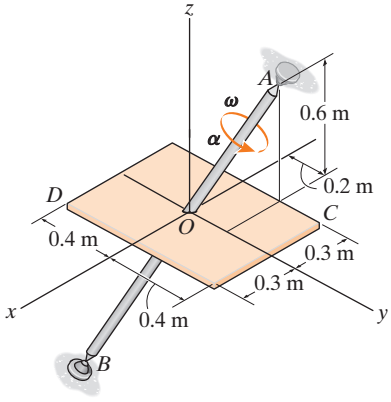
Prob. 16-34

16-35. Si la flecha y la placa giran a una velocidad angular constante $\omega = 14$ rad/s, determine la velocidad y la aceleración del punto C localizado en la esquina de la placa en el instante que se indica. Exprese el resultado en forma vectorial cartesiana.



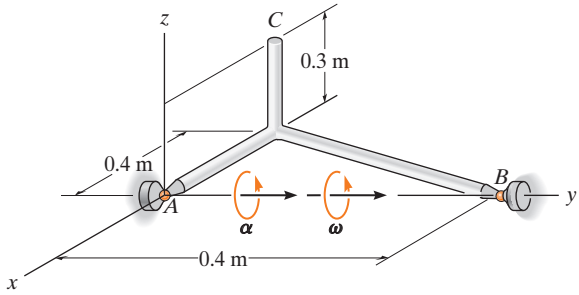
Prob. 16-35

***16-36.** En el instante que se muestra, la flecha y la placa giran a una velocidad angular de $\omega = 14$ rad/s y aceleración angular $\alpha = 7$ rad/s^2. Determine la velocidad y aceleración del punto D localizado en la esquina de la placa en este momento. Exprese el resultado en forma vectorial cartesiana.



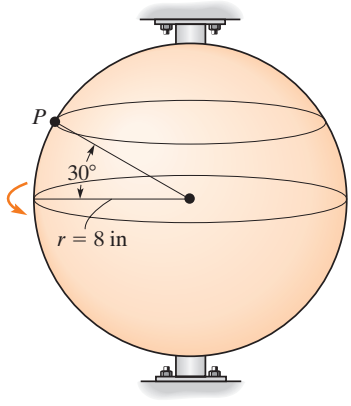
Prob. 16-36

16-37. El ensamble de varillas se sostiene mediante articulaciones de rótula en A y B. En el instante mostrado, gira alrededor del eje y con una velocidad angular $\omega = 5$ rad/s y tiene una aceleración angular $\alpha = 8$ rad/s^2. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto C en este instante. Resuelva el problema usando vectores cartesianos y las ecuaciones 16-9 y 16-13.

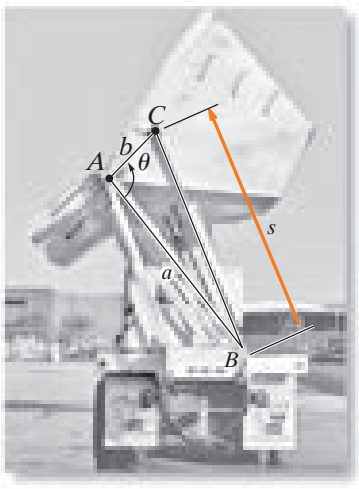


Prob. 16-37

16-38. La esfera parte del reposo en $\theta = 0°$ y gira con una aceleración angular de $\alpha = (4\theta + 1)$ rad/s^2, donde θ está en radianes. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto P sobre la esfera en el instante $\theta = 6$ rad.



Prob. 16-38



La caja de volteo del camión gira alrededor de un eje fijo que pasa por el pasador en A, y la hace funcionar la extensión del cilindro hidráulico BC. La posición angular de la caja puede especificarse mediante la coordenada de posición angular θ y la posición del punto C de la caja se especifica por medio de la coordenada de posición rectilínea s. Como a y b son longitudes fijas, entonces las dos coordenadas se relacionan por medio de la ley de los cosenos, $s = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$. La derivada con respecto al tiempo de esta ecuación relaciona la rapidez a la cual el cilindro hidráulico se extiende a la velocidad angular de la caja. (© R. C. Hibbeler)

16

16.4 Análisis del movimiento absoluto

Un cuerpo sometido a *movimiento plano general* experimenta una traslación y rotación *simultáneas*. Si el cuerpo se representa como una lámina delgada, ésta se traslada en su plano y gira alrededor de un eje perpendicular a este plano. El movimiento puede especificarse por completo, si se conocen *tanto* la rotación angular de una línea fija en el cuerpo *como* el movimiento de un punto en él. Una forma de relacionar estos movimientos consiste en utilizar una coordenada de posición rectilínea s para ubicar el punto a lo largo de su trayectoria, y una coordenada de posición angular θ para especificar la orientación de la línea. Las dos coordenadas se relacionan entonces por medio de la geometría del problema. Mediante la *aplicación directa* de las ecuaciones diferenciales con respecto al tiempo $v = ds/dt, \alpha = dv/dt, \omega = d\theta/dt$ y $\alpha = d\omega/dt$, entonces pueden relacionarse el *movimiento* del punto y el *movimiento angular* de la línea. Este procedimiento es semejante al que se utilizó para resolver problemas de movimiento dependiente que implican poleas, sección 12.9. En algunos casos, este mismo procedimiento puede utilizarse para relacionar el movimiento de un cuerpo —que experimenta ya sea rotación alrededor de un eje fijo o traslación— con el de un cuerpo conectado que experimenta movimiento plano general.

Procedimiento para el análisis

La velocidad y la aceleración de un punto P que experimenta movimiento rectilíneo pueden relacionarse con la velocidad y la aceleración angulares de una línea contenida en un cuerpo, si se aplica el siguiente procedimiento.

Ecuación de coordenadas de posición

- Localice un punto P en el cuerpo por medio de una coordenada de posición s, la cual se mide con respecto a un *origen fijo* y *está dirigida a lo largo de la trayectoria de movimiento en línea recta* del punto P.
- Mida con respecto a una línea de referencia fija la posición angular θ de una línea situada en el cuerpo.
- Con las dimensiones del cuerpo, relacione s con θ, $s = f(\theta)$, por medio de geometría y/o trigonometría.

Derivadas con respecto al tiempo

- Considere la primera derivada de $s = f(\theta)$ con respecto al tiempo para obtener una relación entre v y ω.
- Considere la segunda derivada con respecto al tiempo para obtener una relación entre a y α.
- En cada caso, debe utilizarse la regla de la cadena del cálculo cuando se consideren las derivadas con respecto al tiempo de la ecuación de coordenadas de posición. Vea el apéndice C.

EJEMPLO 16.3

El extremo de la varilla R en la figura 16-8 se mantiene en contacto con la leva por medio de un resorte. Si la leva gira alrededor de un eje que pasa por el punto O con una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ y una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, determine la velocidad y la aceleración de la varilla, cuando la leva está en una posición arbitraria θ.

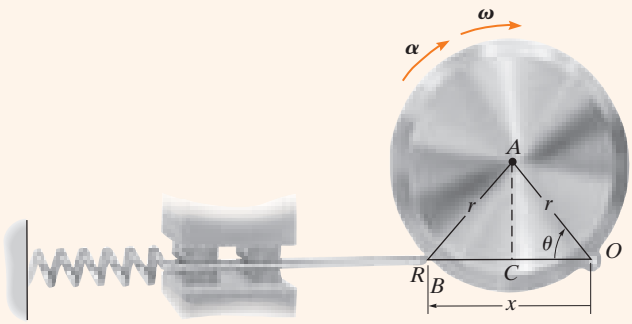


Fig. 16-8

SOLUCIÓN

Ecuación de coordenadas de posición. Se eligen las coordenadas θ y x para relacionar el *movimiento de rotación* del segmento de línea OA en la leva con la *traslación rectilínea* de la varilla. Estas coordenadas se miden con respecto al *punto fijo* O y pueden relacionarse entre sí por medio de trigonometría. Como $OC = CB = r\cos\theta$ (fig. 16-8), entonces,

$$x = 2r\cos\theta$$

Derivadas con respecto al tiempo. Si utilizamos la regla de cálculo de la cadena, tenemos

$$\frac{dx}{dt} = -2r(\operatorname{sen}\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$v = -2r\omega\operatorname{sen}\theta \qquad \textit{Resp.}$$

$$\frac{dv}{dt} = -2r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)\operatorname{sen}\theta - 2r\omega(\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$a = -2r(\alpha\operatorname{sen}\theta + \omega^2\cos\theta) \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Los signos negativos indican que v y a se oponen a la dirección positiva de x. Esto parece razonable cuando visualice el movimiento.

EJEMPLO 16.4

En un instante dado, el cilindro de radio r, que se muestra en la figura 16-9, tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$. Determine la velocidad y la aceleración de su centro G, si el cilindro rueda sin deslizarse.

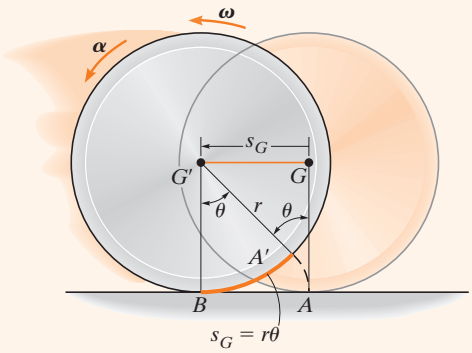


Fig. 16-9

SOLUCIÓN

Ecuación de coordenadas de posición. El cilindro experimenta movimiento plano general, pues se traslada y gira al mismo tiempo. Por inspección, el punto G se mueve en *línea recta* hacia la izquierda, de G a G', a medida que el cilindro rueda (fig. 16-9). Por consiguiente, la coordenada de posición *horizontal* s_G especificará su nueva posición G', medida de G a G'. Asimismo, a medida que el cilindro rueda (sin deslizarse), la longitud del arco $A'B$ en su borde, el cual está en contacto con el suelo de A a B, equivale a s_G. En consecuencia, el movimiento requiere que la línea radial GA gire θ a la posición $G'A'$. Como el arco $A'B = r\theta$, entonces G recorre una distancia

$$s_G = r\theta$$

Derivadas con respecto al tiempo. Si se consideran derivadas con respecto al tiempo de esta ecuación y se tiene en cuenta que r es constante, $\omega = d\theta/dt$ y $\alpha = d\omega/dt$, se obtienen las relaciones necesarias:

$$s_G = r\theta$$
$$v_G = r\omega \qquad \textit{Resp.}$$
$$a_G = r\alpha \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Recuerde que estas relaciones son válidas sólo si el cilindro (disco, rueda, bola, etcétera) rueda(n) *sin* deslizarse.

EJEMPLO 16.5

La ventana de la figura 16-10 se abre por medio de un cilindro hidráulico AB. Si éste se extiende a una razón constante de 0.5 m/s, determine la velocidad y la aceleración angulares de la ventana en el instante $\theta = 30°$.

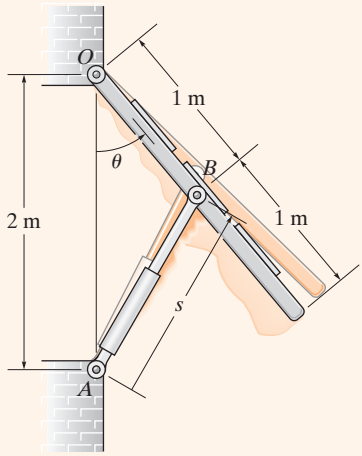


Fig. 16-10

SOLUCIÓN

Ecuación de coordenadas de posición. El movimiento angular de la ventana se obtiene mediante la coordenada θ, mientras que la extensión o el movimiento *a lo largo del cilindro hidráulico* se define por medio de una coordenada s, la cual mide su longitud desde el punto fijo A hasta el punto móvil B. Estas coordenadas se relacionan con la ley de los cosenos, es decir,

$$s^2 = (2\text{ m})^2 + (1\text{ m})^2 - 2(2\text{ m})(1\text{ m})\cos\theta$$

$$s^2 = 5 - 4\cos\theta \qquad (1)$$

Cuando $\theta = 30°$,

$$s = 1.239\text{ m}$$

Derivadas con respecto al tiempo. Si consideramos las derivadas con respecto al tiempo de la ecuación 1, tenemos

$$2s\frac{ds}{dt} = 0 - 4(-\text{sen}\,\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$s(v_s) = 2(\text{sen}\,\theta)\omega \qquad (2)$$

Como $v_s = 0.5$ m/s, entonces cuando $\theta = 30°$,

$$(1.239\text{ m})(0.5\text{ m/s}) = 2\,\text{sen}\,30°\omega$$

$$\omega = 0.6197\text{ rad/s} = 0.620\text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Al considerar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 2 resulta

$$\frac{ds}{dt}v_s + s\frac{dv_s}{dt} = 2(\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}\omega + 2(\text{sen}\,\theta)\frac{d\omega}{dt}$$

$$v_s^2 + sa_s = 2(\cos\theta)\omega^2 + 2(\text{sen}\,\theta)\alpha$$

Ya que $a_s = dv_s/dt = 0$, entonces

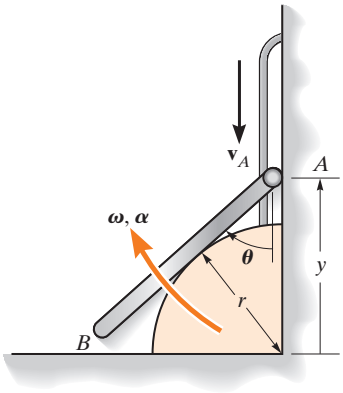
$$(0.5\text{ m/s})^2 + 0 = 2\cos 30°(0.6197\text{ rad/s})^2 + 2\,\text{sen}\,30°\alpha$$

$$\alpha = -0.415\text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Como el resultado es negativo, indica que la ventana tiene una desaceleración angular.

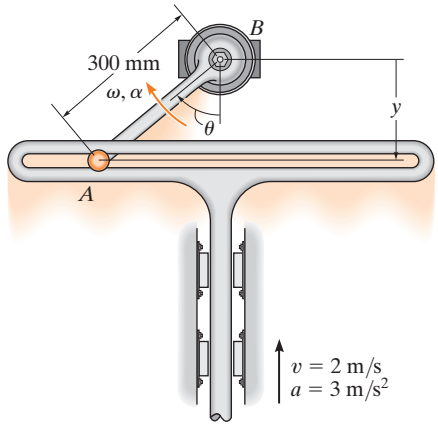
PROBLEMAS

16-39. El extremo A de la barra se mueve hacia abajo a lo largo de la guía ranurada con una velocidad constante $\mathbf{v}_A$. Determine la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la barra en función de su posición y.



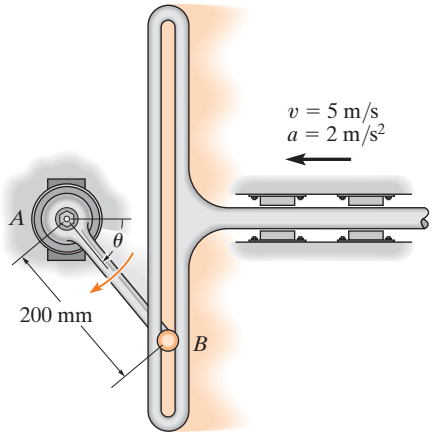
Prob. 16-39

16-41. En el instante $\theta = 50°$, la guía ranurada se mueve hacia arriba con una aceleración de 3 m/s^2 y una velocidad de 2 m/s. Determine la aceleración angular y la velocidad angular del eslabón AB en este instante. *Nota:* El movimiento ascendente de la guía es en la dirección y negativa.



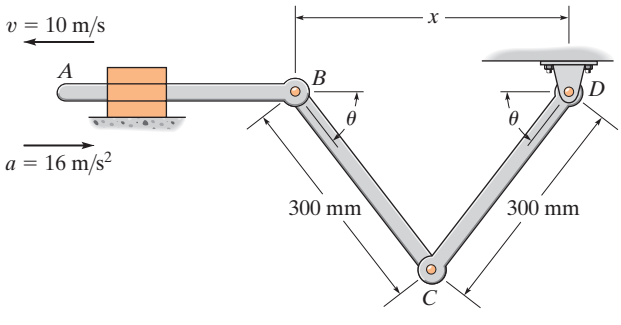
Prob. 16-41

***16-40.** En el instante $\theta = 60°$, la varilla guía ranurada se mueve hacia la izquierda con una aceleración de 2 m/s^2 y una velocidad de 5 m/s. Determine la aceleración y la velocidad angulares del eslabón AB en este instante.



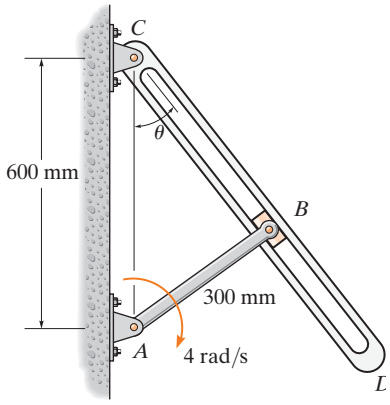
Prob. 16-40

16-42. En el instante mostrado, $\theta = 60°$ y la varilla AB se somete a una desaceleración de 16 m/s^2 cuando la velocidad es de 10 m/s. Determine la velocidad angular y la aceleración angular del eslabón CD en este instante.



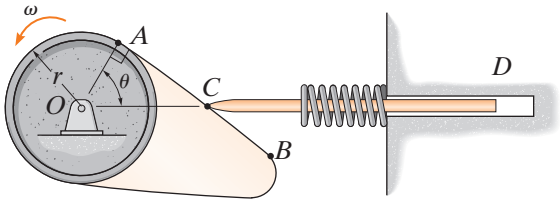
Prob. 16-42

16-43. La manivela AB está girando con una velocidad angular constante de 4 rad/s. Determine la velocidad angular de la biela CD en el instante $\theta = 30°$.



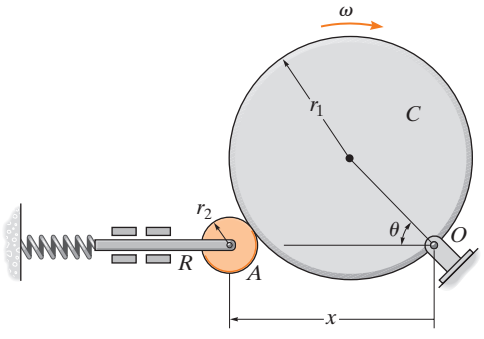
Prob. 16-43

***16-44.** Determine la velocidad y la aceleración de la varilla seguidora CD como una función de θ cuando el contacto entre la leva y el seguidor está a lo largo de la región recta AB sobre la cara de la leva. La leva gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$ en sentido antihorario.



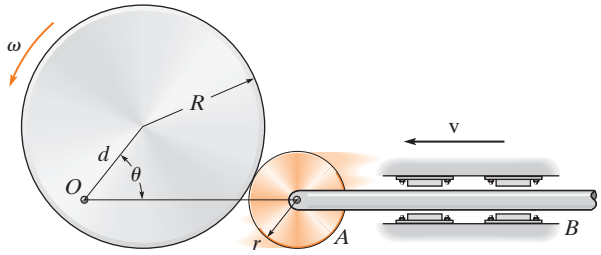
Prob. 16-44

16-45. Determine la velocidad de la varilla R para cualquier ángulo θ de la leva C, si la leva gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$. La conexión articulada en O no causa interferencia con el movimiento de A sobre C.



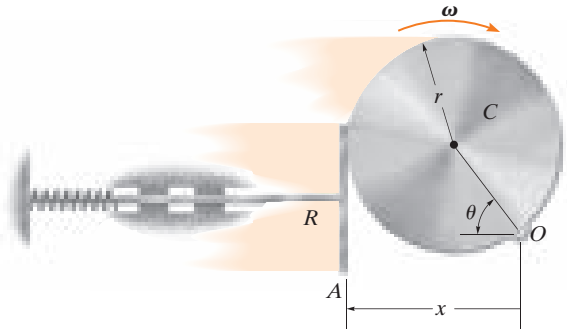
Prob. 16-45

16-46. La leva circular gira alrededor del punto fijo O con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$. Determine la velocidad v de la varilla seguidora AB en función de θ.



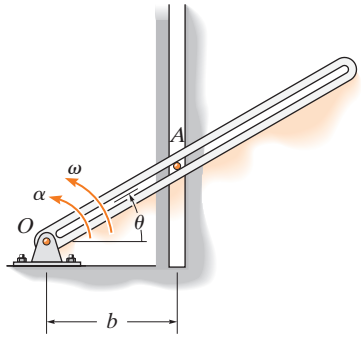
Prob. 16-46

16-47. Determine la velocidad de la varilla R para cualquier ángulo θ de la leva C, mientras ésta gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$. La conexión articulada en O no causa interferencia con el movimiento de la placa A sobre C.



Prob. 16-47

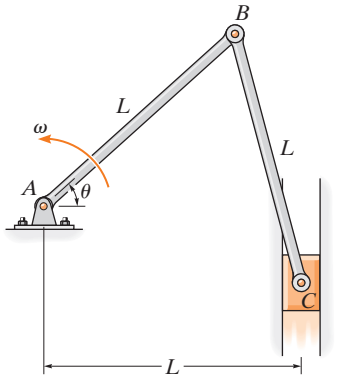
***16-48.** Determine la velocidad y la aceleración de la clavija A que está confinadda entre la guía vertical y la varilla ranurada giratoria.



Prob. 16-48

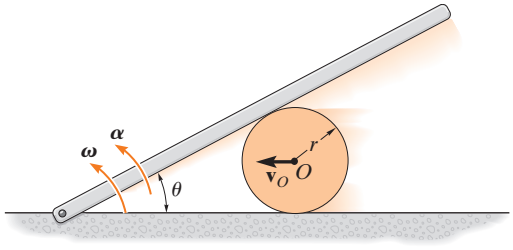
16

16-49. La barra AB gira uniformemente alrededor del pasador fijo A con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$. Determine la velocidad y la aceleración del bloque C, en el instante $\theta = 60°$.



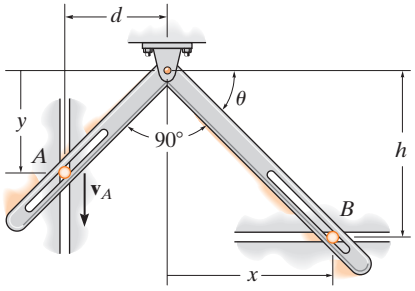
Prob. 16-49

16-50. El centro del cilindro se mueve hacia la izquierda con una velocidad constante $\mathbf{v}_0$. Determine la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la barra. Desprecie el espesor de la barra.



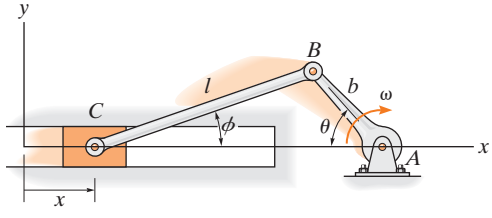
Prob. 16-50

16-51. Los pasadores en A y B están limitados moverse en las pistas vertical y horizontal. Si el brazo ranurado causa que A se mueva hacia abajo a $\mathbf{v}_A$, determine la velocidad de B en el instante mostrado.



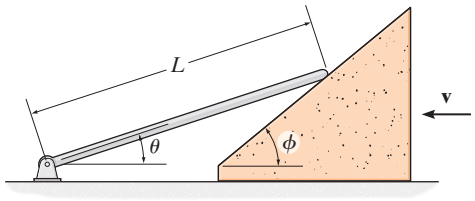
Prob. 16-51

***16-52.** La manivela AB tiene una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$. Determine la velocidad y la aceleración del deslizador en C en función de θ. *Sugerencia:* Utilice la coordenada x para expresar el movimiento de C y la coordenada ϕ para CB. $x = 0$ cuando $\phi = 0°$.



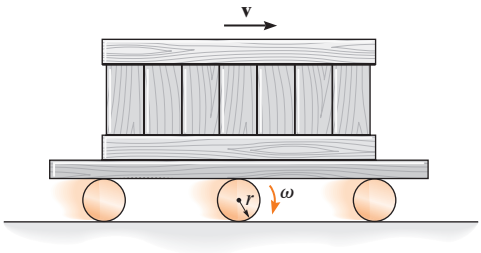
Prob. 16-52

16-53. Si la cuña se mueve hacia la izquierda con una velocidad constante **v**, determine la velocidad angular de la varilla en función de θ.



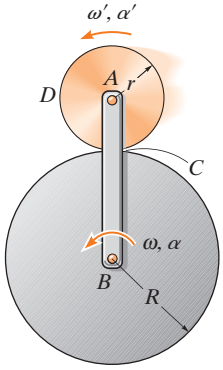
Prob. 16-53

16-54. La caja se transporta sobre una plataforma que se apoya sobre rodillos, cada uno de los cuales tiene un radio r. Si los rodillos no se deslizan, determine su velocidad angular cuando la plataforma se mueve hacia adelante con una velocidad **v**.



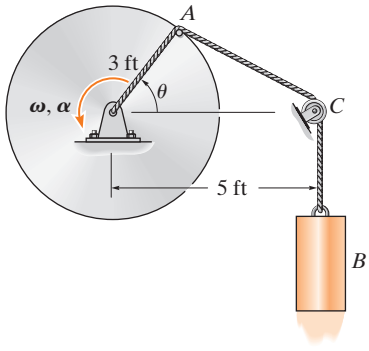
Prob. 16-54

16-55. El brazo AB tiene una velocidad angular de $\boldsymbol{\omega}$ y una aceleración angular de $\boldsymbol{\alpha}$. Si no ocurre deslizamiento entre el disco D y la superficie curva fija, determine la velocidad angular y la aceleración angular del disco.



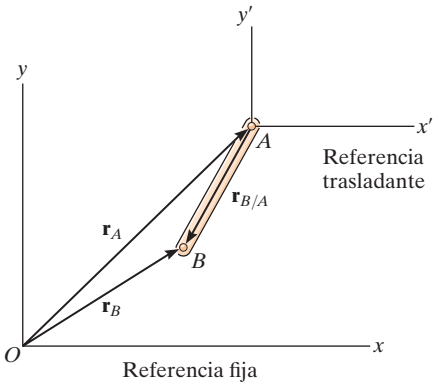
Prob. 16-55

***16-56.** En el instante mostrado, el disco gira con una velocidad angular de $\boldsymbol{\omega}$ y tiene una aceleración angular de $\boldsymbol{\alpha}$. Determine la velocidad y la aceleración del cilindro B en este instante. Desprecie el tamaño de la polea en C.



Prob. 16-56

16



(a)

Fig. 16-11(a)

16.5 Análisis de movimiento relativo: velocidad

El movimiento plano general de un cuerpo rígido se describe como una *combinación* de traslación y rotación. Para ver estos movimientos "componentes" *por separado*, utilizaremos un *análisis de movimiento relativo* que implica dos conjuntos de ejes de coordenadas. El sistema de coordenadas x, y está fijo y mide la posición *absoluta* de dos puntos A y B en el cuerpo, representado aquí como una barra (fig. 16-11*a*). Se hará que el origen de los sistemas de coordenadas x', y' coincida con el "punto base" A seleccionado, el cual por lo general tiene un movimiento *conocido*. Los ejes de este sistema de coordenadas se *trasladan* con respecto al marco fijo pero no giran con la barra.

Posición. El vector de posición $\mathbf{r}_A$ en la figura 16-11*a* especifica la ubicación del "punto base" A y el vector de posición relativa $\mathbf{r}_{B/A}$ localiza el punto B con respecto al punto A. Mediante suma vectorial, la *posición* de B es, entonces,

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

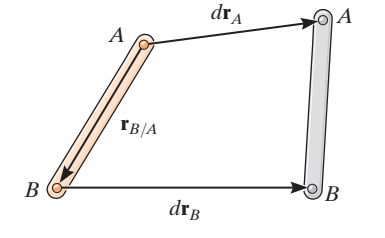
Desplazamiento. Durante un instante de tiempo dt, los puntos A y B experimentan los desplazamientos $d\mathbf{r}_A$ y $d\mathbf{r}_B$ —como se muestra en la figura 16-11*b*—. Si consideramos el movimiento plano general por sus partes componentes, entonces *toda la barra* se *traslada* primero mediante una cantidad $d\mathbf{r}_A$ de modo que A, el punto base, se mueve a su *posición final* y el punto B a B' (fig. 16-11*c*). La barra *gira* por ende alrededor de A una cantidad $d\theta$, de modo que B' experimenta un *desplazamiento relativo* $d\mathbf{r}_{B/A}$ y, por consiguiente, se mueve a su posición final B. Debido a la rotación alrededor de A, $dr_{B/A} = r_{B/A}\, d\theta$ y el desplazamiento de B es

$$d\mathbf{r}_B = d\mathbf{r}_A + d\mathbf{r}_{B/A}$$

$d\mathbf{r}_{B/A}$: debido a la rotación alrededor de A

$d\mathbf{r}_A$: debido a la traslación de A

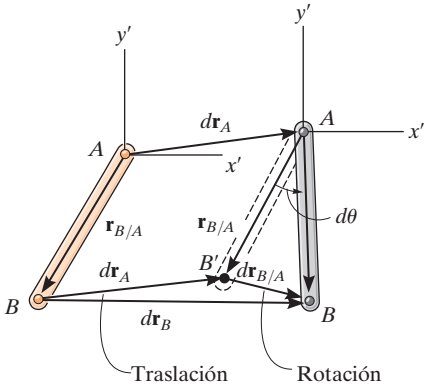
$d\mathbf{r}_B$: debido a la traslación y la rotación



Tiempo t Tiempo $t + dt$

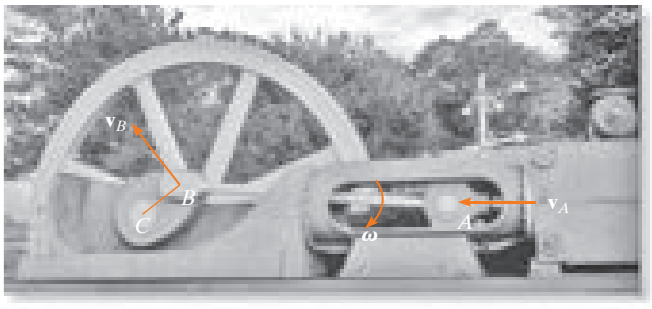
Movimiento plano general

(b)



(c)

Fig. 16-11(b y c)



A medida que el bloque corredizo A se desplaza horizontalmente hacia la izquierda a una velocidad $\mathbf{v}_A$, hace girar la manivela CB en sentido antihorario, de modo que $\mathbf{v}_B$ es tangente a su trayectoria circular, es decir, hacia arriba a la izquierda. La biela AB que conecta está sometida a movimiento plano general y, en el instante que se muestra, su velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}$. (© R. C. Hibbeler)

16

Velocidad. Para determinar la relación entre las velocidades de los puntos A y B es necesario considerar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación de posición, o simplemente dividir la ecuación de desplazamiento entre dt. De esto da como resultado

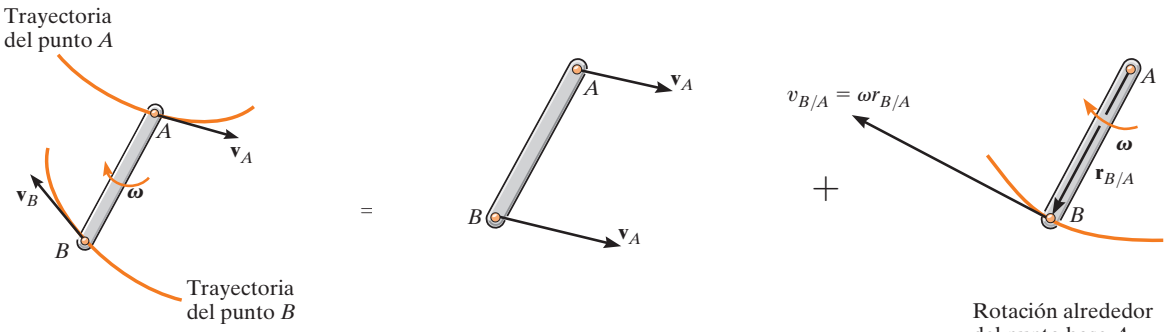
$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

Los términos $d\mathbf{r}_B/dt = \mathbf{v}_B$ y $d\mathbf{r}_A/dt = \mathbf{v}_A$ se miden con respecto a los ejes fijos x, y, ya que representan las *velocidades absolutas* de los puntos A y B, respectivamente. Como el desplazamiento relativo lo provoca una rotación, la magnitud del tercer término es $dr_{B/A}/dt = r_{B/A}\, d\theta/dt = r_{B/A}\dot{\theta} = r_{B/A}\omega$, donde ω es la velocidad angular del cuerpo en el instante considerado. Denotaremos este término como la *velocidad relativa* $\mathbf{v}_{B/A}$, puesto que representa la velocidad de B con respecto a A medida por un observador fijo en los ejes trasladantes x', y'. Dicho de otra manera, *la barra parece moverse como si girara con una velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$ *con respecto al eje* z' *que pasa por* A. Por consiguiente, la magnitud de $\mathbf{v}_{B/A}$ es $v_{B/A} = \omega r_{B/A}$ y su *dirección* es perpendicular a $\mathbf{r}_{B/A}$. Entonces tenemos

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}} \tag{16-15}$$

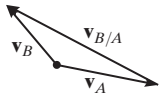
donde

$\mathbf{v}_B$ = velocidad del punto B
$\mathbf{v}_A$ = velocidad del punto base A
$\mathbf{v}_{B/A}$ = velocidad de B con respecto a A

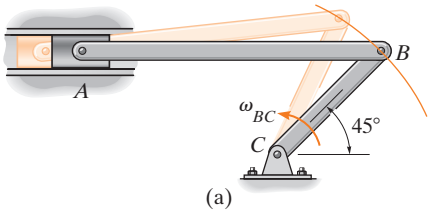


Movimiento plano general (d) | Traslación (e) | Rotación alrededor del punto base A (f)

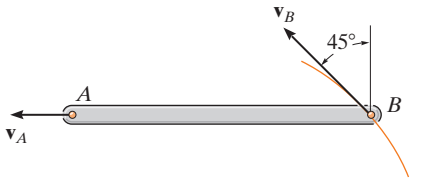
Fig. 16-11 (cont.)



(g)



(a)



(b)

Fig. 16-12

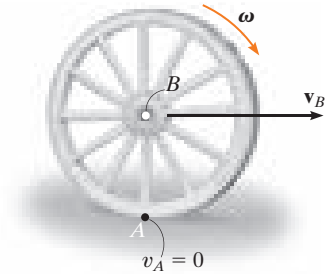


Fig. 16-13

Lo que establece la ecuación $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ es que la velocidad de B (fig. 16-11*d*), se determina al considerar que toda la barra se traslada con una velocidad de $\mathbf{v}_A$ (fig. 16-11*e*) y que gira alrededor de A con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ (fig. 16-11*f*). La adición vectorial de estos dos efectos, aplicada a B, resulta $\mathbf{v}_B$, como se muestra en la figura 16-11*g*.

Como la velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ representa el efecto del *movimiento circular* alrededor de A, este término se expresa mediante el producto vectorial $\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, ecuación 16-9. Por consiguiente, para su aplicación mediante un análisis vectorial cartesiano, también podemos escribir la ecuación 16-15 como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{16-16}$$

donde

$\mathbf{v}_B$ = velocidad de B
$\mathbf{v}_A$ = velocidad del punto base A
$\boldsymbol{\omega}$ = velocidad angular del cuerpo
$\mathbf{r}_{B/A}$ = vector de posición dirigido de A a B

La ecuación de velocidad 16-15 o 16-16 puede usarse de una manera práctica para estudiar el movimiento plano general de un cuerpo rígido, el cual está conectado por pasador a otros cuerpos en movimiento o en con contacto con éstos. Cuando se aplica esta ecuación, en general los puntos A y B deberían seleccionarse como puntos en el cuerpo que están conectados por medio de un pasador a otros cuerpos, o como puntos en contacto con cuerpos adyacentes que tienen un *movimiento conocido*. Por ejemplo, el punto A en el eslabón AB en la figura 16-12*a* debe moverse a lo largo de una trayectoria horizontal, mientras que el punto B lo hace en una trayectoria circular. Por consiguiente, pueden establecerse las *direcciones* de $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ ya que siempre son *tangentes* a sus trayectorias de movimiento (fig. 16-12*b*). En el caso de la rueda mostrada en la figura 16-13, la cual gira *sin deslizarse*, el punto A en ella puede seleccionarse en el suelo. Aquí, la velocidad de A es cero (momentáneamente) pues el suelo no se mueve. Además, el centro de la rueda, B, se mueve a lo largo de una trayectoria horizontal de modo que $\mathbf{v}_B$ es horizontal.

Procedimiento para el análisis

La ecuación de velocidad relativa puede aplicarse ya sea mediante análisis vectorial cartesiano, o bien, escribiendo directamente las ecuaciones de componentes escalares x y y. Para su aplicación se sugiere el siguiente procedimiento.

Análisis vectorial

Diagrama cinemático

- Establezca las direcciones de las coordenadas x, y fijas y trace un diagrama cinemático del cuerpo. Indique en él las velocidades $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ de los puntos A y B, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, y el vector de posición relativa $\mathbf{r}_{B/A}$.
- Si las magnitudes de $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ o $\boldsymbol{\omega}$ son incógnitas, puede suponerse el sentido de estos vectores.

Ecuación de velocidad

- Para aplicar $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, exprese los vectores en forma vectorial cartesiana y sustitúyalos en la ecuación. Evalúe el producto vectorial y, luego, iguale las componentes $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ respectivas para obtener dos ecuaciones escalares.
- Si la solución resulta en una respuesta *negativa* para una magnitud *desconocida*, indica que el sentido del vector es opuesto al que se muestra en el diagrama cinemático.

Análisis escalar

Diagrama cinemático

- Si la ecuación de velocidad se va a aplicar en forma escalar, entonces deben establecerse la magnitud y la dirección de la velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$. Trace un diagrama cinemático como se muestra en la figura 16-11*g*, el cual muestra el movimiento relativo. Como se considera que el cuerpo debe estar "sujeto por medio de un pasador" momentáneamente en el punto base A, la magnitud de $\mathbf{v}_{B/A}$ es $v_{B/A} = \omega r_{B/A}$. La dirección de $\mathbf{v}_{B/A}$ siempre es perpendicular a $\mathbf{r}_{B/A}$ de acuerdo con el movimiento de rotación $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo*.

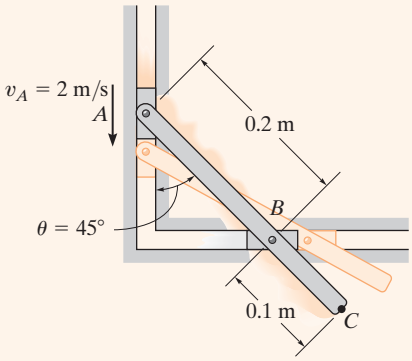
Ecuación de velocidad

- Escriba la ecuación 16-15 en forma simbólica, $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$, y debajo de cada uno de los términos represente gráficamente los vectores, de modo que muestren sus magnitudes y direcciones. Las ecuaciones escalares se determinan con las componentes x y y de estos vectores.

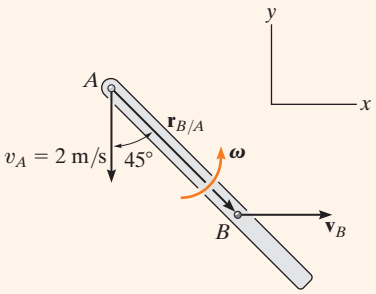
*La notación $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{pasador})}$ suele ser útil para recordar que A está "conectado con un pasador".

16

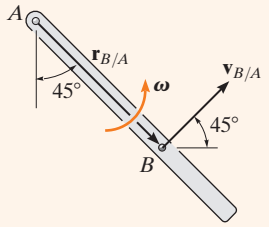
EJEMPLO 16.6



(a)



(b)



Movimiento relativo

(c)

Fig. 16-14

El eslabón que se ilustra en la figura 16-14*a* está guiado por los bloques A y B, los cuales se mueven en la ranuras fijas. Si la velocidad de A es de 2 m/s hacia abajo, determine la velocidad de B cuando $\theta = 45°$.

SOLUCIÓN (ANÁLISIS VECTORIAL)

Diagrama cinemático. Como los puntos A y B sólo pueden moverse a lo largo de las ranuras fijas y $\mathbf{v}_A$ está dirigida hacia abajo, la velocidad $\mathbf{v}_B$ debe dirigirse horizontalmente hacia la derecha (fig. 16-14*b*). Este movimiento hace que el eslabón gire en sentido antihorario; es decir, de acuerdo con la regla de la mano derecha, la dirección de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es hacia fuera, perpendicular al plano del movimiento.

Ecuación de velocidad. Al expresar cada uno de los vectores en la figura 16-14*b* en función de sus componentes **i**, **j**, **k** y aplicar la ecuación 16-16 a A, el punto base, y B, tenemos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$
$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + [\omega\mathbf{k} \times (0.2 \operatorname{sen} 45°\mathbf{i} - 0.2 \cos 45°\mathbf{j})]$$
$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + 0.2\omega \operatorname{sen} 45°\mathbf{j} + 0.2\omega \cos 45°\mathbf{i}$$

Si se igualan las componentes **i** y **j** se tiene

$$v_B = 0.2\omega \cos 45° \qquad 0 = -2 + 0.2\omega \operatorname{sen} 45°$$

Por lo tanto,

$$\omega = 14.1 \text{ rad/s}\circlearrowleft \qquad v_B = 2 \text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

SOLUCIÓN II (ANÁLISIS ESCALAR)

En la figura 16-14c, se muestra el diagrama cinemático del "movimiento circular" relativo que produce $\mathbf{v}_{B/A}$. Aquí $v_{B/A} = \omega(0.2 \text{ m})$.

Por lo tanto,

$$v_B = v_A + v_{B/A}$$
$$\begin{bmatrix} v_B \\ \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \text{ m/s} \\ \downarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega(0.2 \text{ m}) \\ \measuredangle 45° \end{bmatrix}$$

$$(\pm\rightarrow) \qquad v_B = 0 + \omega(0.2)\cos 45°$$

$$(+\uparrow) \qquad 0 = -2 + \omega(0.2)\operatorname{sen} 45°$$

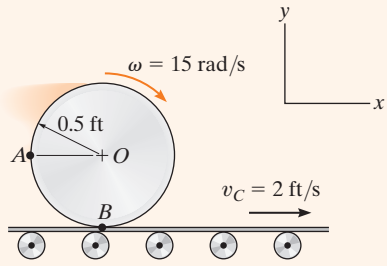
La solución produce los resultados anteriores.

Es necesario destacar que estos resultados son *válidos sólo* en el instante $\theta = 45°$. Un nuevo cálculo para $\theta = 44°$ origina $v_B = 2.07$ m/s y $\omega = 14.4$ rad/s; mientras que cuando $\theta = 46°$, $v_B = 1.93$ m/s y $\omega = 13.9$ rad/s, etcétera.

NOTA: Dado que se *conocen* v_A y ω, es posible determinar la velocidad de cualquier otro punto sobre el eslabón. A manera de ejercicio, vea si puede aplicar la ecuación 16-16 a los puntos A y C, o a los puntos B y C, y demuestre que cuando $\theta = 45°$, $v_C = 3.16$ m/s, dirigida a un ángulo de 18.4° hacia arriba de la horizontal.

EJEMPLO 16.7

El cilindro de la figura 16-15*a* rueda sin deslizarse sobre la superficie de una banda transportadora, la cual se mueve a 2 ft/s. Determine la velocidad del punto A. El cilindro tiene una velocidad angular en sentido horario $\omega = 15$ rad/s en el instante que se muestra.



(a)

SOLUCIÓN I (ANÁLISIS VECTORIAL)

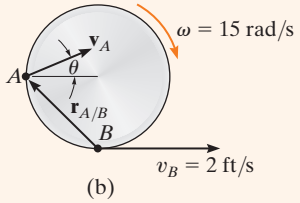
Diagrama cinemático. Como no hay deslizamiento, el punto B en el cilindro tiene la misma velocidad que la transportadora (fig. 16-15*b*). Además, se conoce la velocidad angular del cilindro, así que podemos aplicar la ecuación de velocidad a B, el punto base, y A para determinar $\mathbf{v}_A$.

Ecuación de velocidad

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

$$(v_A)_x\mathbf{i} + (v_A)_y\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + (-15\mathbf{k}) \times (-0.5\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j})$$

$$(v_A)_x\mathbf{i} + (v_A)_y\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + 7.50\mathbf{j} + 7.50\mathbf{i}$$



(b)

de modo que

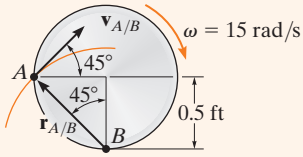
$$(v_A)_x = 2 + 7.50 = 9.50 \text{ ft/s} \qquad (1)$$

$$(v_A)_y = 7.50 \text{ ft/s} \qquad (2)$$

Por lo tanto,

$$v_A = \sqrt{(9.50)^2 + (7.50)^2} = 12.1 \text{ ft/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{7.50}{9.50} = 38.3^\circ \ \measuredangle \qquad \textit{Resp.}$$



Movimiento relativo
(c)

Fig. 16-15

SOLUCIÓN II (ANÁLISIS ESCALAR)

Como un procedimiento alternativo, las componentes escalares de $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$ pueden obtenerse directamente. De acuerdo con el diagrama cinemático que ilustra el movimiento "circular" relativo, el cual produce $\mathbf{v}_{A/B}$ (fig. 16-15*c*), tenemos

$$v_{A/B} = \omega r_{A/B} = (15 \text{ rad/s})\left(\frac{0.5 \text{ ft}}{\cos 45^\circ}\right) = 10.6 \text{ ft/s}$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

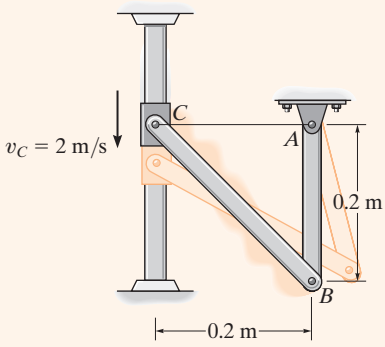
$$\begin{bmatrix}(v_A)_x \\ \rightarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(v_A)_y \\ \uparrow\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 \text{ ft/s} \\ \rightarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}10.6 \text{ ft/s} \\ \measuredangle\ 45^\circ\end{bmatrix}$$

Al igualar las componentes x y y se obtienen los mismos resultados que antes, es decir,

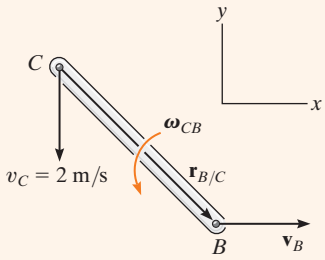
$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad (v_A)_x = 2 + 10.6 \cos 45^\circ = 9.50 \text{ ft/s}$$

$$(+\uparrow) \qquad (v_A)_y = 0 + 10.6 \operatorname{sen} 45^\circ = 7.50 \text{ ft/s}$$

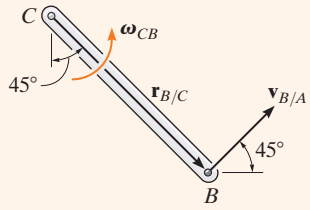
EJEMPLO 16.8



(a)

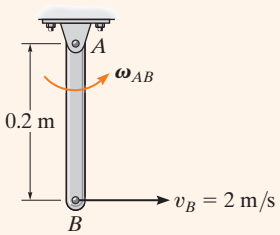


(b)



Movimiento relativo

(c)



(d)

Fig. 16-16

El collarín C de la figura 16-16*a* desciende a 2 m/s. Determine la velocidad angular de CB en este instante.

SOLUCIÓN I (ANÁLISIS VECTORIAL)

Diagrama cinemático. El movimiento descendente de C hace que B se mueva a la derecha a lo largo de una trayectoria curva. Asimismo, CB y AB giran en sentido antihorario.

Ecuación de velocidad. Eslabón CB (movimiento plano general): vea la figura 16-16*b*.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{CB} \times \mathbf{r}_{B/C}$$
$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + \omega_{CB}\mathbf{k} \times (0.2\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j})$$
$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + 0.2\omega_{CB}\mathbf{j} + 0.2\omega_{CB}\mathbf{i}$$

$$v_B = 0.2\omega_{CB} \quad (1)$$
$$0 = -2 + 0.2\omega_{CB} \quad (2)$$
$$\omega_{CB} = 10 \text{ rad/s} \circlearrowleft \quad \textit{Resp.}$$
$$v_B = 2 \text{ m/s} \rightarrow$$

SOLUCIÓN II (ANÁLISIS ESCALAR)

Las ecuaciones de componentes escalares de $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C}$ se obtienen directamente. El diagrama cinemático en la figura 16-16*c* muestra el movimiento "circular" relativo producido por $\mathbf{v}_{B/C}$. Tenemos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C}$$
$$\begin{bmatrix} v_B \\ \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \text{ m/s} \\ \downarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{CB}(0.2\sqrt{2} \text{ m}) \\ \measuredangle 45° \end{bmatrix}$$

Al resolver estos vectores en las direcciones x y y se obtiene

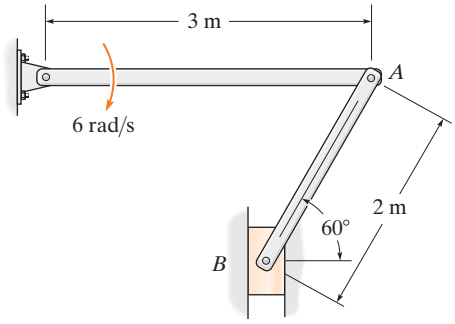
$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad v_B = 0 + \omega_{CB}(0.2\sqrt{2}\cos 45°)$$
$$(+\uparrow) \qquad 0 = -2 + \omega_{CB}(0.2\sqrt{2}\,\text{sen}\,45°)$$

las cuales son las mismas que las ecuaciones 1 y 2.

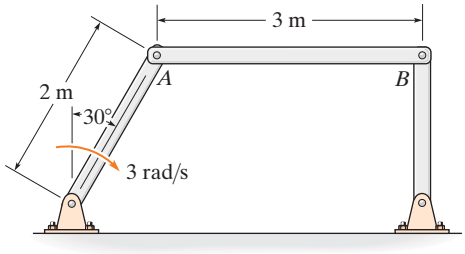
NOTA: Como el eslabón AB gira alrededor de un eje fijo y se conoce v_B (fig. 16-16*d*), su velocidad angular se determina con $v_B = \omega_{AB} r_{AB}$ o $2 \text{ m/s} = \omega_{AB}(0.2 \text{ m})$, $\omega_{AB} = 10 \text{ rad/s}$.

PROBLEMA PRELIMINAR

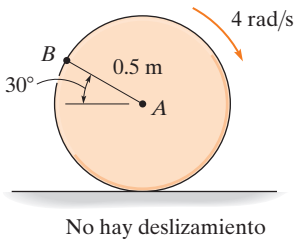
P16-1. Establezca la ecuación de velocidad relativa entre los puntos A y B.



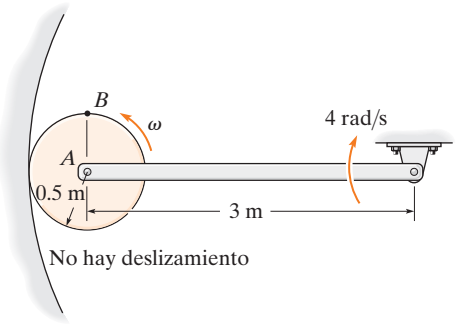
(a)



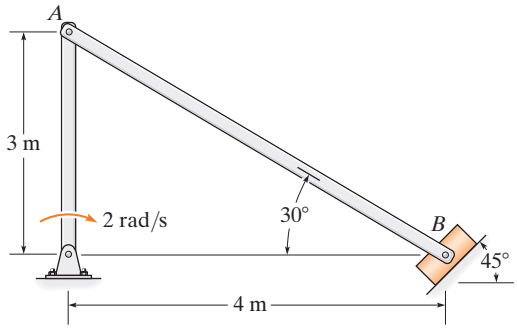
(d)



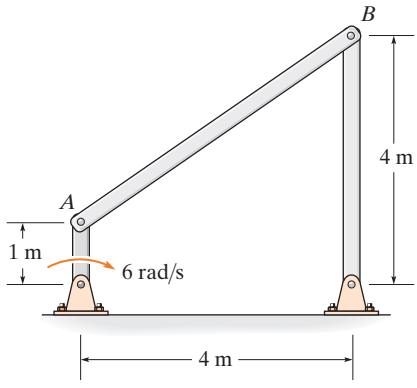
(b)



(e)



(c)

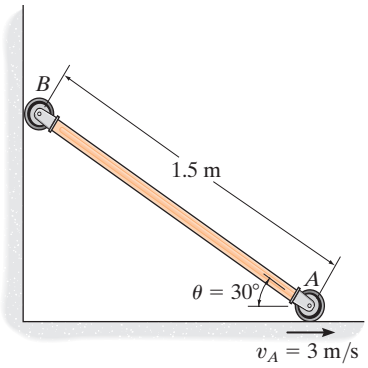


(f)

Prob. P16-1

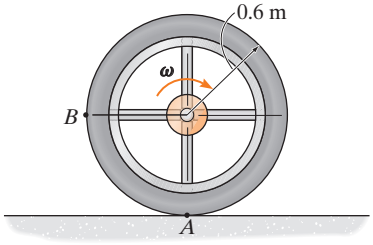
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F16-7. Si el rodillo A se mueve a la derecha a una velocidad constante $v_A = 3$ m/s, determine la velocidad angular del eslabón y la velocidad del rodillo B cuando $\theta = 30°$.



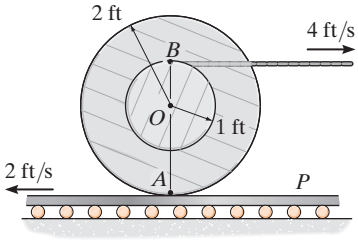
Prob. F16-7

F16-8. La rueda gira sin deslizarse con una velocidad angular $\omega = 10$ rad/s. Determine la magnitud de la velocidad en el punto B en el instante que se muestra.



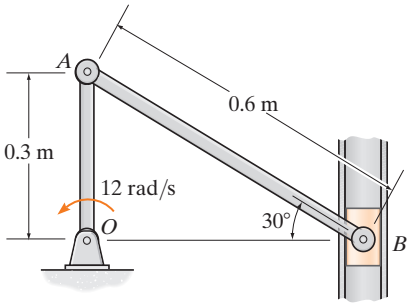
Prob. F16-8

F16-9. Determine la velocidad angular del carrete. El cable se enrolla alrededor del núcleo interno y el carrete no se desliza sobre la plataforma P.



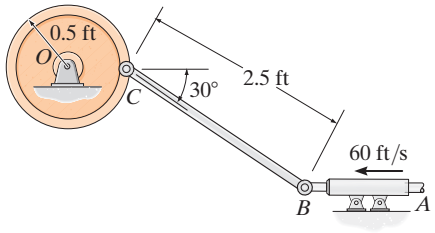
Prob. F16-9

F16-10. Si la palanca OA gira con una velocidad angular de $\omega = 12$ rad/s, determine la velocidad del pistón B y la velocidad angular de la varilla AB en el instante que se muestra.



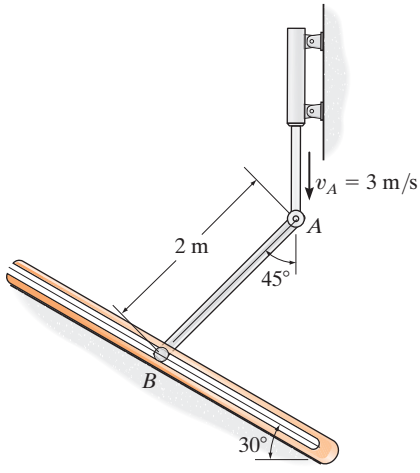
Prob. F16-10

F16-11. Si la varilla AB se desliza a lo largo de la ranura horizontal con una velocidad de 60 ft/s, determine la velocidad angular del eslabón BC en el instante que se muestra.



Prob. F16-11

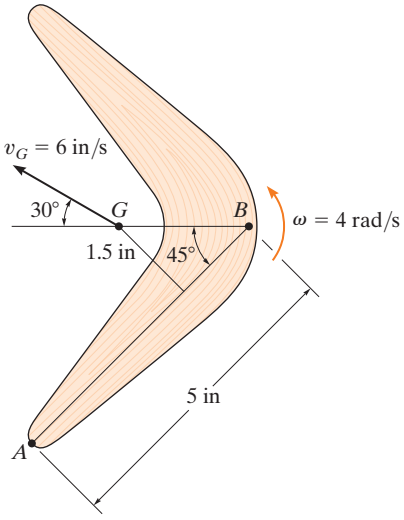
F16-12. La velocidad del extremo A del eslabón es $v_A = 3$ m/s. Determine la velocidad de la clavija B en este instante. La clavija está restringida a moverse a lo largo de la ranura.



Prob. F16-12

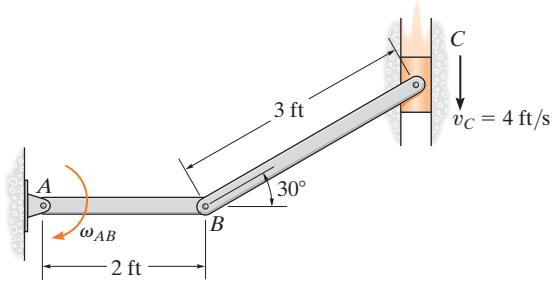
PROBLEMAS

16-57. En el instante mostrado el *boomerang* tiene una velocidad angular $\omega = 4$ rad/s, y su centro de masa G tiene una velocidad $v_G = 6$ in/s. Determine la velocidad del punto B en este instante.



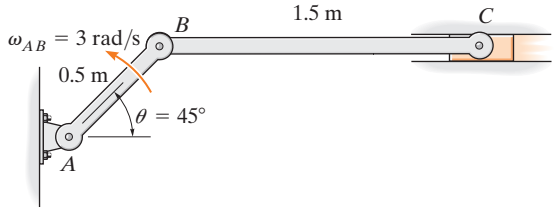
Prob. 16-57

16-58. Si el bloque en C se mueve hacia abajo a 4 ft/s, determine la velocidad angular de la barra AB en el instante mostrado.



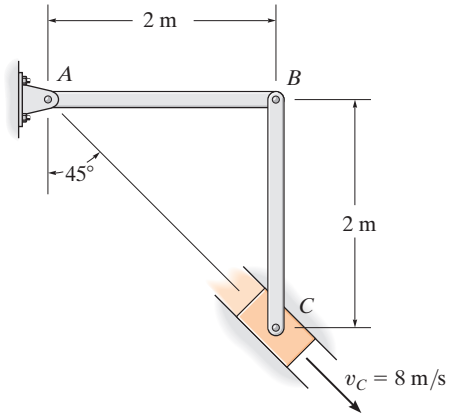
Prob. 16-58

16-59. El eslabón AB tiene una velocidad angular de 3 rad/s. Determine la velocidad del bloque C y la velocidad angular del eslabón BC en el instante $\theta = 45°$. Además, grafique la posición del eslabón BC cuando $\theta = 60°, 45°$ y $30°$ para mostrar su movimiento plano general.



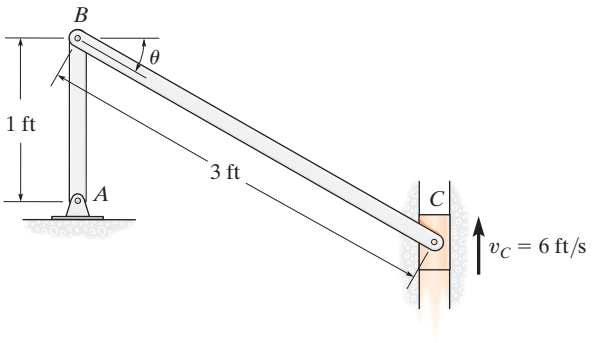
Prob. 16-59

***16-60.** El bloque deslizante C se mueve hacia abajo a 8 m/s por la ranura inclinada. Determine las velocidades angulares de los eslabones AB y BC en el instante mostrado.



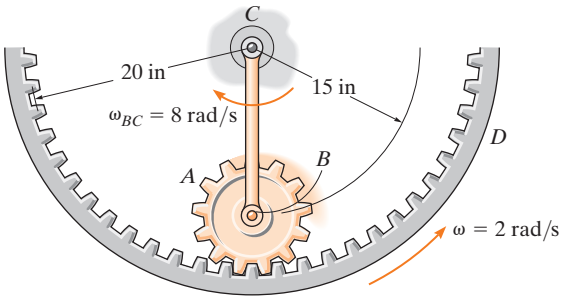
Prob. 16-60

16-61. Determine la velocidad angular de los eslabones AB y BC en el instante $\theta = 30°$. Además, grafique la posición del eslabón BC cuando $\theta = 55°$, $45°$ y $30°$ para mostrar su movimiento plano general.



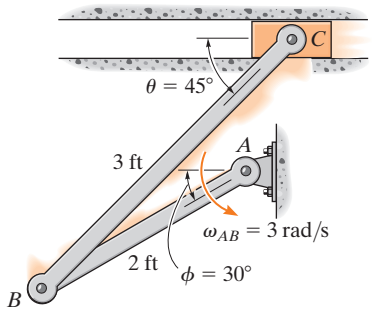
Prob. 16-61

16-62. El engrane planetario A está articulado en B. El eslabón BC gira en sentido horario con una velocidad angular de 8 rad/s, mientras que el engrane dentado exterior gira en sentido antihorario con una velocidad angular de 2 rad/s. Determine la velocidad angular del engrane A.



Prob. 16-62

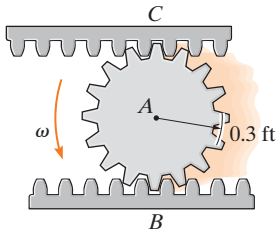
16-63. Si la velocidad angular del eslabón AB es $\omega_{AB} = 3$ rad/s, determine la velocidad del bloque en C y la velocidad angular del eslabón de conexión CB en el instante $\theta = 45°$ y $\phi = 30°$.



Prob. 16-63

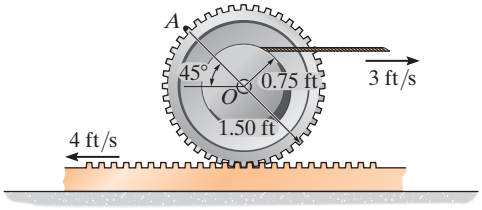
***16-64.** El engrane de piñón A rueda sobre el engrane dentado fijo B con una velocidad angular $\omega = 4$ rad/s. Determine la velocidad del engrane dentado C.

16-65. El piñón rueda sobre los engranes dentados. Si B se mueve hacia la derecha a 8 ft/s y C se mueve hacia la izquierda a 4 ft/s, determine la velocidad angular del engrane de piñón y la velocidad de su centro A.



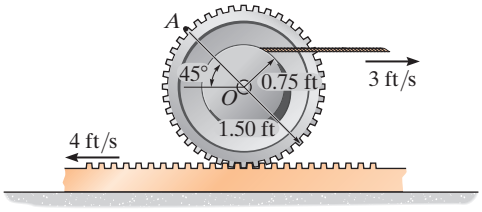
Probs. 16-64/65

16-66. Determine la velocidad angular del engrane y la velocidad de su centro O en el instante mostrado.



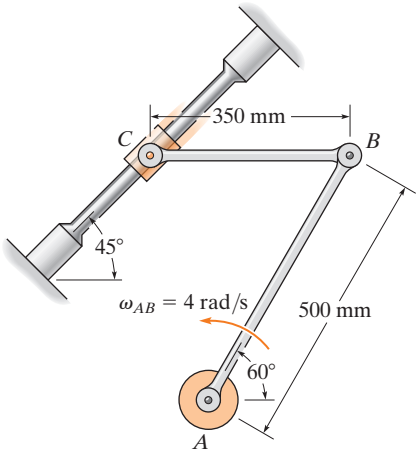
Prob. 16-66

16-67. Determine la velocidad del punto A sobre el borde del engrane en el instante indicado.



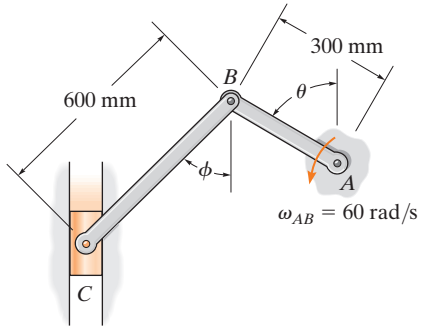
Prob. 16-67

***16-68.** Si se sabe que la velocidad angular del eslabón AB es $\omega_{AB} = 4$ rad/s, determine la velocidad del collarín en C y la velocidad angular del eslabón CB en el instante mostrado. El eslabón CB está en posición horizontal en este instante.



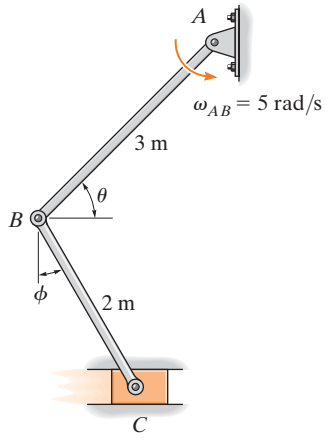
Prob. 16-68

16-69. La varilla AB gira con una velocidad angular de $\omega_{AB} = 60$ rad/s. Determine la velocidad del deslizador C en el instante $\theta = 60°$ y $\phi = 45°$. Asimismo, grafique la posición de la barra BC cuando $\theta = 30°, 60°$ y $90°$ para mostrar su movimiento plano general.



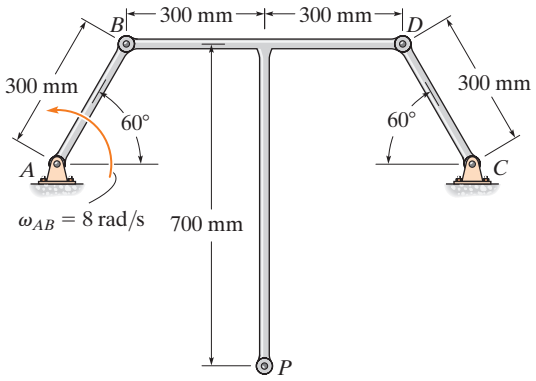
Prob. 16-69

16-70. La velocidad angular del eslabón AB es $\omega_{AB} = 5$ rad/s. Determine la velocidad del bloque C y la velocidad angular del eslabón BC en el instante $\theta = 45°$ y $\phi = 30°$. Además, grafique la posición del eslabón CB cuando $\theta = 45°, 60°$ y $75°$ para mostrar su movimiento plano general.



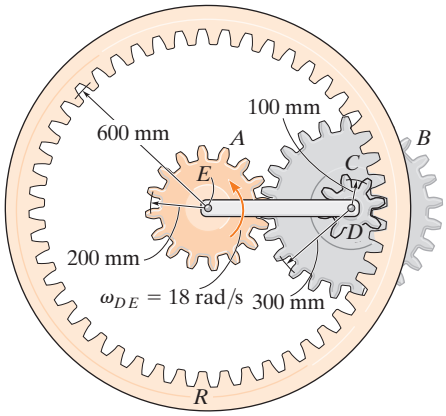
Prob. 16-70

16-71. Los eslabones similares AB y CD giran alrededor de los pasadores fijos en A y C. Si AB tiene una velocidad angular $\omega_{AB} = 8$ rad/s, determine la velocidad angular de BDP y la velocidad del punto P.



Prob. 16-71

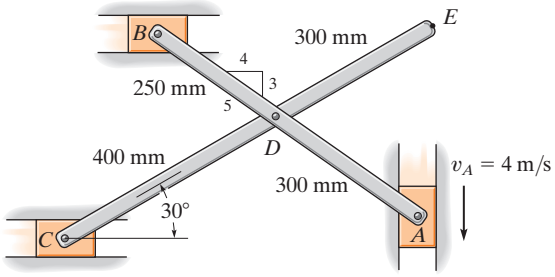
16-74. El tren de engranes epicíclicos se compone de un engrane sol A, el cual está acoplado al engrane satélite B. Este engrane tiene una masa interna C la cual está fija en B y engrana con la corona dentada R fija. Si el eslabón DE conectado por medio de un pasador a B y C gira a $\omega_{DE} = 18$ rad/s alrededor del pasador E, determine las velocidades angulares de los engranes satélite y sol.



Prob. 16-74

***16-72.** Si el bloque deslizante A se mueve hacia abajo a $v_A = 4$ m/s, determine las velocidades de los bloques B y C en el instante mostrado.

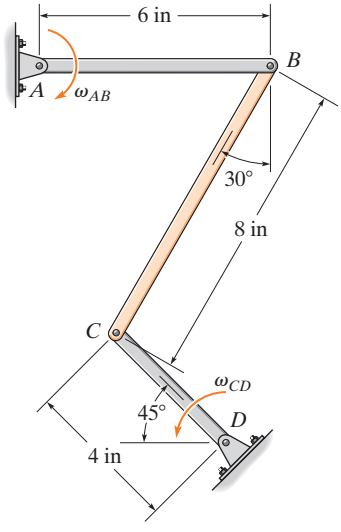
16-73. Si el bloque deslizante A se mueve hacia abajo a $v_A = 4$ m/s, determine la velocidad del punto E en el instante mostrado.



Probs. 16-72/73

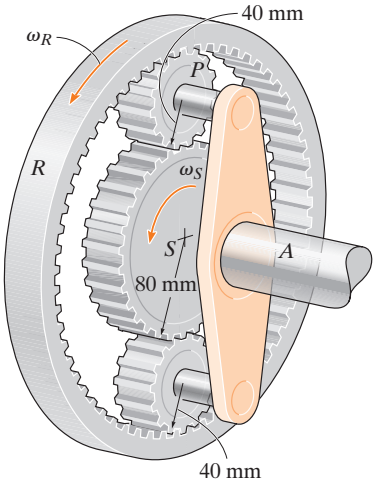
16-75. Si el eslabón AB gira a $\omega_{AB} = 3$ rad/s, determine la velocidad angular del eslabón CD en el instante indicado.

***16-76.** Si el eslabón CD gira a $\omega_{CD} = 5$ rad/s, determine la velocidad angular del eslabón AB en el instante indicado.



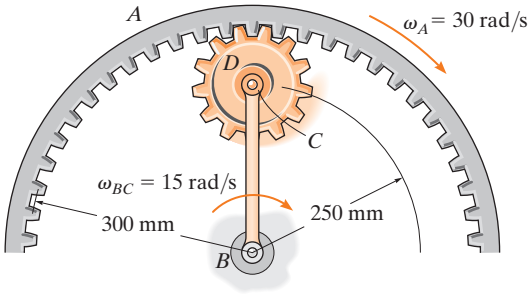
Probs. 16-75/76

16-77. El sistema de engranes planetarios se utiliza en la transmisión automática de un automóvil. Bloquear o liberar determinados engranes tiene la ventaja de hacer que el automóvil funcione a diferentes rapideces. Considere el caso donde la corona dentada R se mantiene fija, $\omega_R = 0$ y el engrane sol S gira a $\omega_S = 5$ rad/s. Determine la velocidad angular de cada uno de los engranes planeta P y la flecha A.



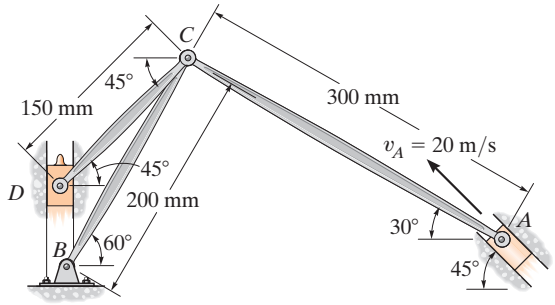
Prob. 16-77

16-78. Si la corona dentada A gira en sentido horario con una velocidad angular de $\omega_A = 30$ rad/s, mientras que el eslabón BC gira en sentido horario con una velocidad angular de $\omega_{BC} = 15$ rad/s, determine la velocidad angular del engrane D.



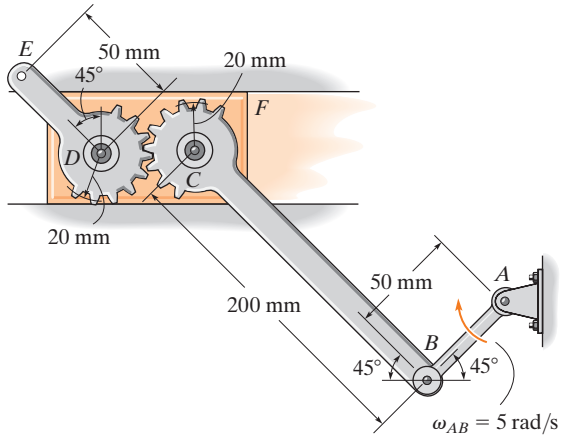
Prob. 16-78

16-79. El mecanismo que se ilustra se utiliza en una máquina de remachar. Se compone de un pistón motriz A, tres eslabones y una remachadora que está unida al bloque deslizante D. Determine la velocidad de D en el instante indicado, cuando el pistón en A se desplaza a $v_A = 20$ m/s.



Prob. 16-79

***16-80.** El mecanismo se utiliza en una máquina para la fabricación de un producto de alambre. Debido al movimiento de rotación del eslabón AB y el deslizamiento del bloque F, el engrane segmentario con palanca DE experimenta un movimiento plano general. Si AB gira a $\omega_{AB} = 5$ rad/s, determine la velocidad del punto E en el instante indicado.

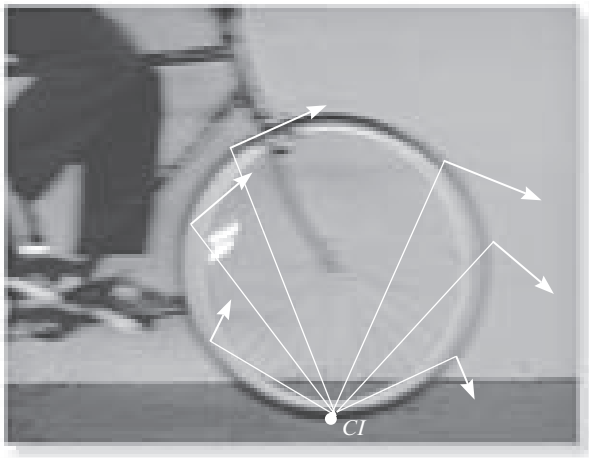


Prob. 16-80

16.6 Centro instantáneo de velocidad cero

La velocidad de cualquier punto B localizado en un cuerpo rígido puede obtenerse de una manera muy directa al seleccionar el punto base A como un punto de *velocidad cero* en el instante considerado. En este caso, $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ y, por consiguiente, la ecuación de velocidad, $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, se vuelve $\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$. En el caso de un cuerpo que tenga movimiento plano general, el punto A así seleccionado se llama *centro instantáneo (CI) de velocidad cero* y se ubica en el *eje instantáneo de velocidad cero*. Este eje siempre es perpendicular al plano de movimiento y la intersección del eje con el plano define la ubicación del *CI*. Como el punto A coincide con el *CI*, entonces $\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/CI}$ y, por lo tanto, el punto B se mueve momentáneamente alrededor del *CI* en una *trayectoria circular*; expresado de otra manera, el cuerpo parece girar alrededor del eje instantáneo. La *magnitud* de $\mathbf{v}_B$ es simplemente $v_B = \omega r_{B/CI}$, donde ω es la velocidad angular del cuerpo. Debido al movimiento circular, la *dirección* de $\mathbf{v}_B$ siempre debe ser *perpendicular* a $\mathbf{r}_{B/CI}$.

Por ejemplo, el *CI* de la rueda de la bicicleta de la figura 16-17 está en el punto de contacto con el suelo. Ahí los rayos son un tanto visibles, mientras que en la parte superior de rueda se ven borrosos. Si nos imaginamos que la rueda esta momentáneamente fija por medio de un pasador en este punto, se pueden determinar las velocidades de varios puntos con $v = \omega r$. Aquí, las distancias radiales mostradas en la foto (fig. 16-17) deben determinarse mediante la geometría de la rueda.



(© R. C. Hibbeler)

Fig. 16-17

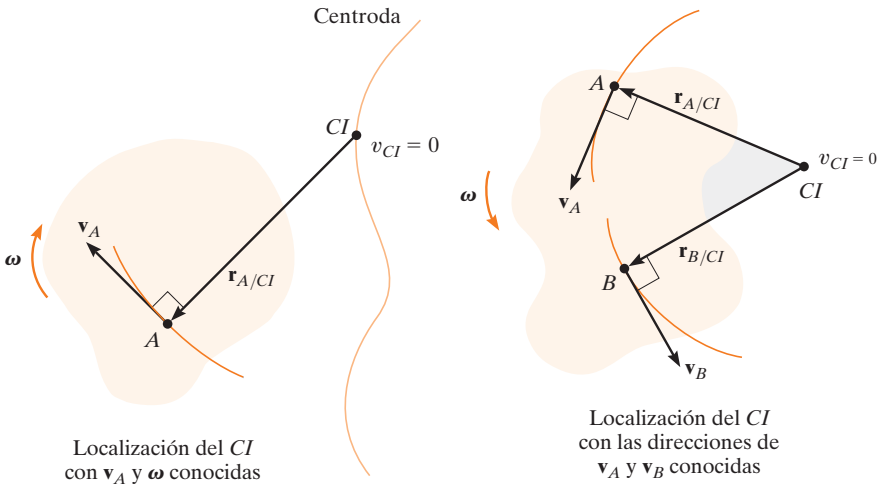
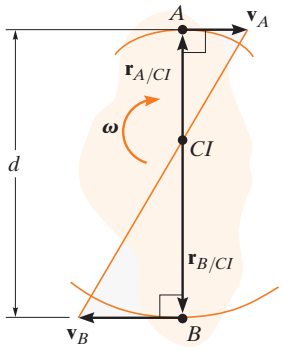
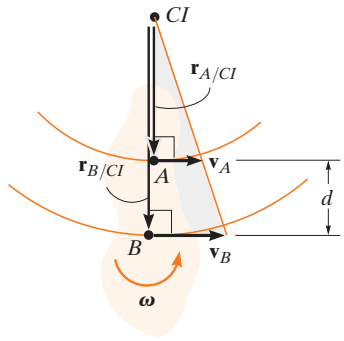


Fig. 16-18



(c)



Ubicación del CI
con $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ conocidas

(d)

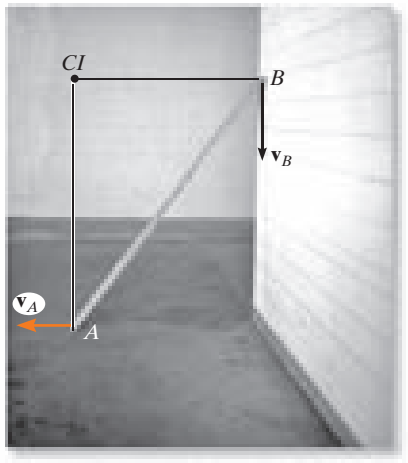
Localización del CI. Para localizar el *CI* podemos partir del hecho de que la *velocidad* de un punto en el cuerpo *siempre es perpendicular* al *vector de posición relativa* dirigido desde *CI* hacia el punto. Se presentan varias posibilidades:

- *Se conocen la velocidad* $\mathbf{v}_A$ *de un punto A en el cuerpo y la velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$ *del cuerpo* (fig. 16-18*a*). En este caso, el *CI* se encuentra a lo largo de la línea trazada perpendicular a $\mathbf{v}_A$ en *A*, de modo que la distancia de *A* al *CI* es $r_{A/CI} = v_A/\omega$. Observe que el *CI* queda arriba a la derecha de *A*, ya que $\mathbf{v}_A$ debe provocar una velocidad angular en sentido horario $\boldsymbol{\omega}$ alrededor del *CI*.

- *Las líneas de acción de dos velocidades no paralelas* $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ *se conocen* (fig. 16-18*b*). Trace en los puntos *A* y *B* segmentos de línea perpendiculares a $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$. Al extender estas perpendiculares hasta su *punto de intersección* como se muestra, se localiza el *CI* en el instante considerado.

- *La magnitud y dirección de dos velocidades paralelas* $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ *se conocen*. En este caso, la ubicación del *CI* se determina mediante triángulos proporcionales. En las figuras 16-18*c* y *d* se muestran algunos ejemplos. En ambos casos, $r_{A/CI} = v_A/\omega$ y $r_{B/CI} = v_B/\omega$. Si *d* es una distancia conocida entre los puntos *A* y *B*, entonces en la figura 16-18*c*, $r_{A/CI} + r_{B/CI} = d$ y en la figura 16-18*d*, $r_{B/CI} - r_{A/CI} = d$.

16



Cuando la tabla se desliza hacia abajo a la izquierda experimenta un movimiento plano general. Como se conocen las direcciones de las velocidades de sus extremos *A* y *B*, el *CI* se localiza como se indica. En este instante la tabla girará momentáneamente alrededor de este punto. Dibuje la tabla en otras varias posiciones y establezca el *CI* en cada caso. (© R. C. Hibbeler)

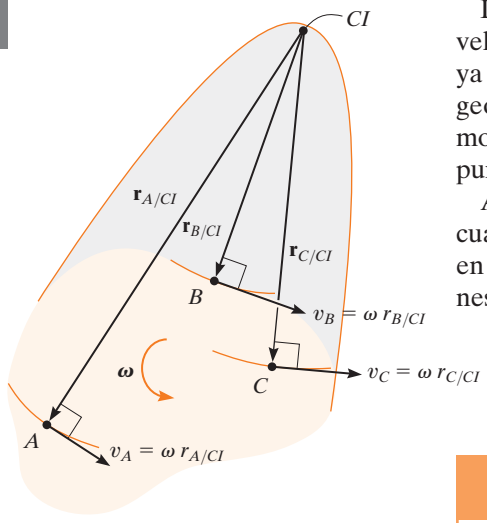


Fig. 16-19

Dese cuenta de que el punto seleccionado como el centro instantáneo de velocidad cero del cuerpo *sólo puede utilizarse en el instante considerado*, ya que el cuerpo cambia de posición de un instante al siguiente. El lugar geométrico de los puntos que definen la ubicación del *CI* durante el movimiento del cuerpo se llama *centroda* (fig. 16-18*a*) y, por lo tanto, cada punto en la centroda actúa como el *CI* del cuerpo sólo por un instante.

Aun cuando el *CI* puede aprovecharse para determinar la velocidad de cualquier punto de un cuerpo, por lo general *no tiene aceleración cero* y, en consecuencia, *no se le debería* utilizar para determinar las aceleraciones de los puntos de un cuerpo.

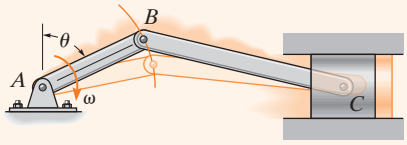
Procedimiento para el análisis

La velocidad de un punto de un cuerpo sometido a movimiento plano general puede determinarse con referencia a su centro instantáneo de velocidad cero, siempre que primero se establezca la ubicación del *CI* usando uno de los tres métodos antes descritos.

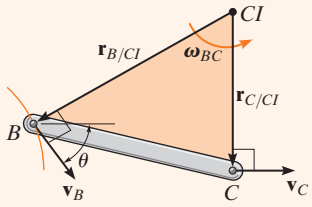
- Como se muestra en el diagrama cinemático de la figura 16-19, nos imaginamos el cuerpo como "extendido y fijo mediante un pasador" en el *CI* de modo que, en el instante considerado, gira alrededor de este pasador con su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.
- La *magnitud* de la velocidad de cada uno de los puntos arbitrarios *A*, *B* y *C* en el cuerpo puede determinarse con la ecuación $v = \omega r$, donde r es la distancia radial del *CI* a cada punto.
- La línea de acción de cada vector de velocidad $\mathbf{v}$ es *perpendicular* a su línea radial asociada $\mathbf{r}$, y la velocidad tiene un *sentido de dirección* que tiende a mover el punto de una manera consistente con la rotación angular $\boldsymbol{\omega}$ de la línea radial (fig. 16-19).

EJEMPLO 16.9

Demuestre cómo se ubica el centro instantáneo de velocidad cero para (a) el elemento BC que se ilustra en la figura 16-20*a* y (b) el eslabón CB que se muestra en la figura 16-20*c*.



(a)

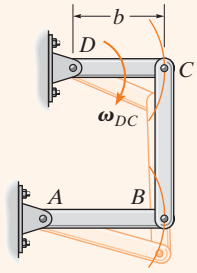


(b)

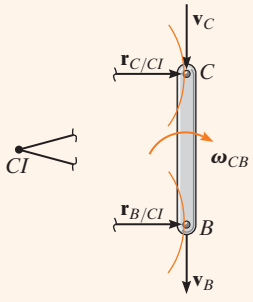
SOLUCIÓN

Parte (a). Como se indica en la figura 16-20*a*, el punto B describe una trayectoria circular de modo que $\mathbf{v}_B$ es perpendicular a AB. Por consiguiente, actúa a un ángulo θ desde la horizontal, como se muestra en la figura 16-20*b*. El movimiento del punto B hace que el pistón se mueva hacia delante *de manera horizontal* con una velocidad $\mathbf{v}_C$. Cuando las líneas se trazan perpendiculares a $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_C$ (fig. 16-20*b*), se intersecan en el CI.

Parte (b). Los puntos B y C siguen trayectorias circulares de movimiento, ya que cada uno de los eslabones AB y DC se someten a rotación alrededor de un eje fijo (fig. 16-20*c*). Como la velocidad siempre es tangente a la trayectoria en el instante considerado, $\mathbf{v}_C$ en la varilla DC y $\mathbf{v}_B$ en la varilla AB están dirigidas verticalmente hacia abajo, a lo largo del eje del eslabón CB (fig. 16-20*d*). Líneas radiales trazadas perpendiculares a estas dos velocidades forman líneas paralelas que se intersecan en "infinito", es decir, $r_{C/CI} \to \infty$ y $r_{B/CI} \to \infty$. Por lo tanto, $\omega_{CB} = (v_C/r_{C/CI}) \to 0$. Por consiguiente, el eslabón CB *se traslada* momentáneamente. Un instante después, sin embargo, CB quedará en una posición inclinada, lo cual hace que el CI se mueva a alguna ubicación finita.



(c)

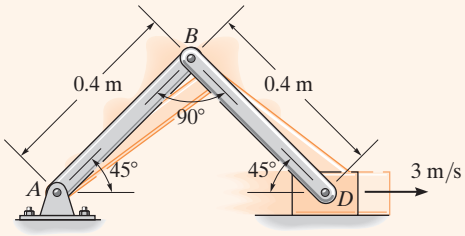


(d)

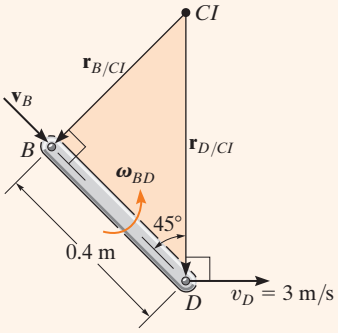
Fig. 16-20

EJEMPLO 16.10

El bloque D en la figura 16-21a se mueve con una rapidez de 3 m/s. Determine las velocidades angulares de los eslabones BD y AB en el instante que se muestra.



(a)



(b)

SOLUCIÓN

A medida que D se mueve a la derecha, hace que AB gire en sentido horario alrededor del punto A. Por consiguiente, $\mathbf{v}_B$ está dirigida perpendicular a AB. El centro instantáneo de velocidad cero de BD está en la intersección de los segmentos de línea trazados perpendiculares a $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_D$ (fig. 16-21b). Por la geometría,

$$r_{B/IC} = 0.4 \tan 45^\circ \text{ m} = 0.4 \text{ m}$$

$$r_{D/IC} = \frac{0.4 \text{ m}}{\cos 45^\circ} = 0.5657 \text{ m}$$

Como se conoce la magnitud de $\mathbf{v}_D$, la velocidad angular del eslabón BD es

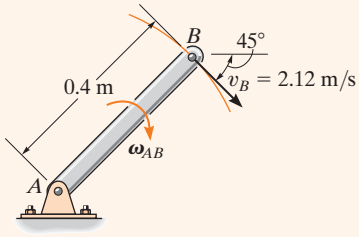
$$\omega_{BD} = \frac{v_D}{r_{D/CI}} = \frac{3 \text{ m/s}}{0.5657 \text{ m}} = 5.30 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

La velocidad de B es, por consiguiente,

$$v_B = \omega_{BD}(r_{B/CI}) = 5.30 \text{ rad/s}\,(0.4 \text{ m}) = 2.12 \text{ m/s} \quad \searrow 45^\circ$$

Según la figura 16-21c, la velocidad angular de AB es

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{r_{B/A}} = \frac{2.12 \text{ m/s}}{0.4 \text{ m}} = 5.30 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$



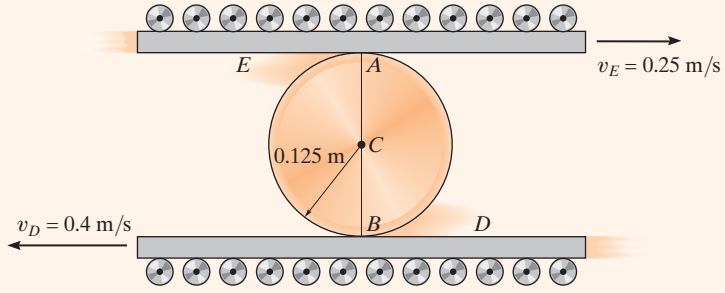
(c)

Fig. 16-21

NOTA: Trate y resuelva este problema mediante la aplicación de $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{D/B}$ al elemento BD.

EJEMPLO 16.11

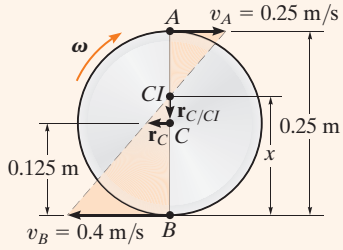
El cilindro que se muestra en la figura 16-22*a* rueda sin deslizarse entre las dos placas móviles *E* y *D*. Determine la velocidad angular del cilindro y la velocidad de su centro *C*.



(a)

SOLUCIÓN

Como no hay deslizamiento, los puntos de contacto *A* y *B* en el cilindro tienen las mismas velocidades que las placas *E* y *D*, respectivamente. Además, las velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ son *paralelas*, de modo que por la proporcionalidad de los triángulos rectángulos el *CI* se encuentra en un punto sobre la línea *AB* (fig. 16-22*b*). Si suponemos que este punto está a una distancia *x* de *B*, entonces



(b)

Fig. 16-22

$$v_B = \omega x; \qquad 0.4 \text{ m/s} = \omega x$$

$$v_A = \omega(0.25 \text{ m} - x); \qquad 0.25 \text{ m/s} = \omega(0.25 \text{ m} - x)$$

Si se divide una ecuación entre la otra se elimina ω y se obtiene

$$0.4(0.25 - x) = 0.25x$$

$$x = \frac{0.1}{0.65} = 0.1538 \text{ m}$$

Por lo tanto, la velocidad angular del cilindro es

$$\omega = \frac{v_B}{x} = \frac{0.4 \text{ m/s}}{0.1538 \text{ m}} = 2.60 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

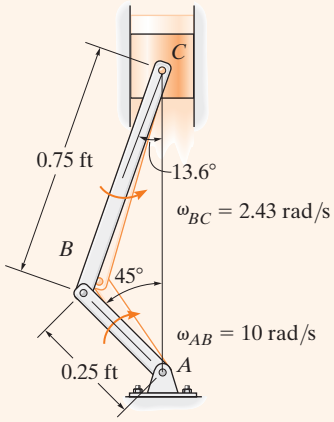
La velocidad del punto *C* es, por consiguiente,

$$v_C = \omega r_{C/CI} = 2.60 \text{ rad/s}\,(0.1538 \text{ m} - 0.125 \text{ m})$$

$$= 0.0750 \text{ m/s} \leftarrow \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 16.12

El cigüeñal AB gira en sentido horario con una velocidad angular de 10 rad/s (fig. 16-23*a*). Determine la velocidad del pistón en el instante que se muestra.



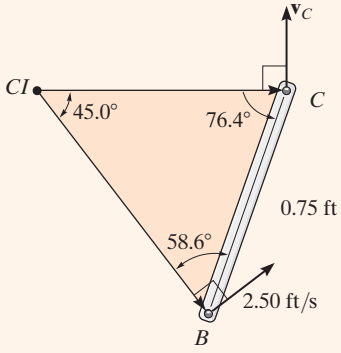
(a)

SOLUCIÓN

El cigüeñal gira alrededor de un eje fijo y, por lo tanto, la velocidad del punto B es

$$v_B = 10 \text{ rad/s } (0.25 \text{ ft}) = 2.50 \text{ ft/s } \measuredangle 45°$$

Como las direcciones de las velocidades de B y C se conocen, entonces el CI de la biela BC se encuentra en la intersección de las líneas extendidas a partir de estos puntos, perpendiculares a $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_C$ (fig. 16-23*b*). Las magnitudes de $\boldsymbol{r}_{B/CI}$ y $\boldsymbol{r}_{C/CI}$ se obtienen con la geometría del triángulo y la ley de los senos, es decir,



(b)

Fig. 16-23

$$\frac{0.75 \text{ ft}}{\text{sen } 45°} = \frac{r_{B/CI}}{\text{sen } 76.4°}$$

$$r_{B/CI} = 1.031 \text{ ft}$$

$$\frac{0.75 \text{ ft}}{\text{sen } 45°} = \frac{r_{C/CI}}{\text{sen } 58.6°}$$

$$r_{C/CI} = 0.9056 \text{ ft}$$

El sentido de rotación de $\boldsymbol{\omega}_{BC}$ debe ser el mismo de la rotación ocasionada por $\mathbf{v}_B$ alrededor del CI, que es en sentido antihorario. Por consiguiente,

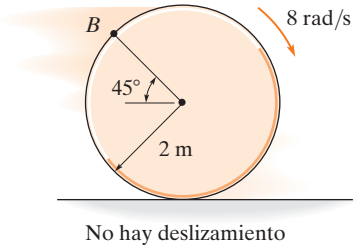
$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{r_{B/CI}} = \frac{2.5 \text{ ft/s}}{1.031 \text{ ft}} = 2.425 \text{ rad/s}$$

Con este resultado, la velocidad del pistón es

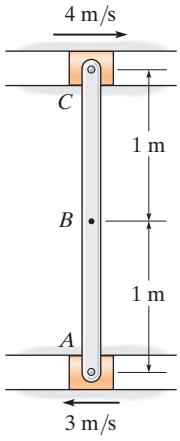
$$v_C = \omega_{BC} r_{C/CI} = (2.425 \text{ rad/s})(0.9056 \text{ ft}) = 2.20 \text{ ft/s} \quad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA PRELIMINAR

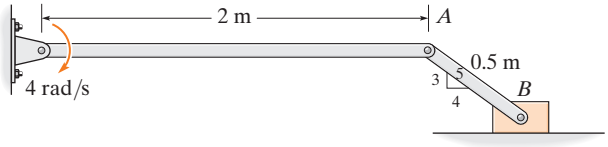
P16-2. Establezca la ubicación del centro instantáneo de velocidad cero para encontrar la velocidad del punto *B*.



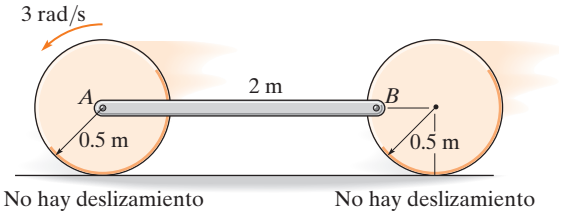
(a)



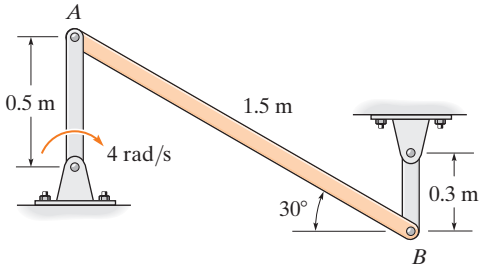
(d)



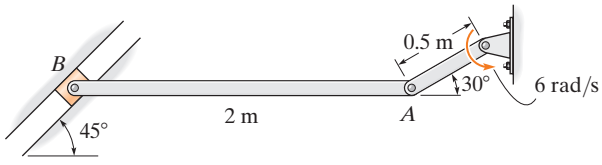
(b)



(e)



(c)



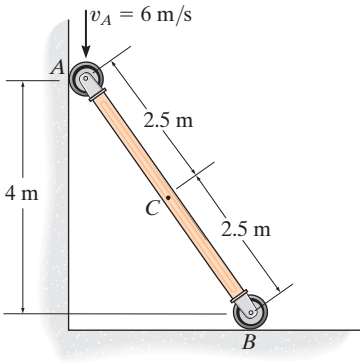
(f)

Prob. P16-2

16

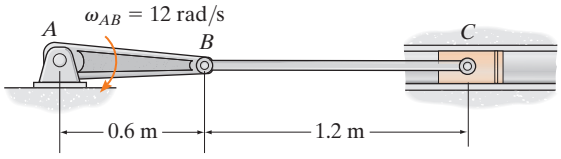
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F16-13. Determine la velocidad angular de la varilla y la velocidad del punto C en el instante que se muestra.



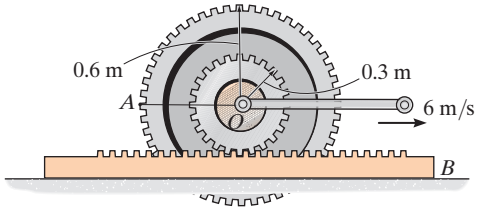
Prob. F16-13

F16-14. Determine la velocidad angular del eslabón BC y la velocidad del pistón C en el instante que se muestra.



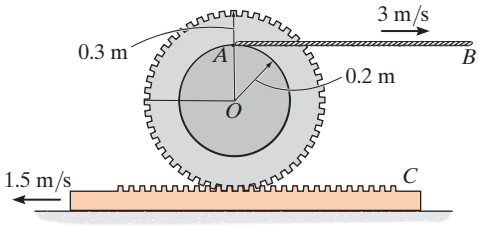
Prob. F16-14

F16-15. Si el centro O de la rueda se mueve con una velocidad de $v_O = 6$ m/s, determine la velocidad del punto A en la rueda. La cremallera B está fija.



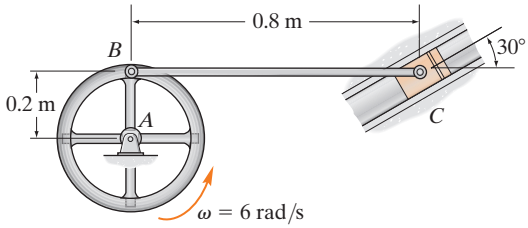
Prob. F16-15

F16-16. Si el cable se desenrolla con una rapidez de 3 m/s y la de la cremallera C es de 1.5 m/s, determine la velocidad angular del engrane y la velocidad de su centro O.



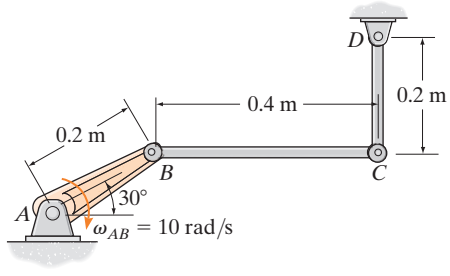
Prob. F16-16

F16-17. Determine la velocidad angular del eslabón BC y la velocidad del pistón C en el instante que se muestra.



Prob. F16-17

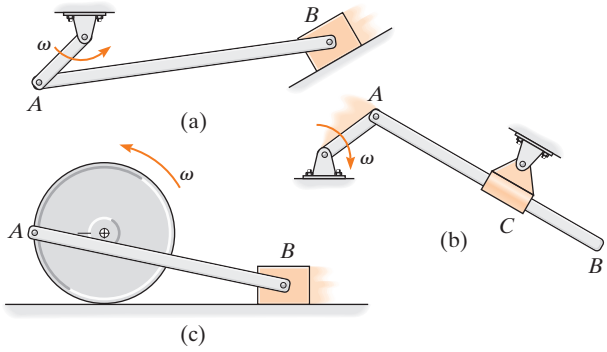
F16-18. Determine la velocidad angular de los eslabones BC y CD en el instante que se muestra.



Prob. F16-18

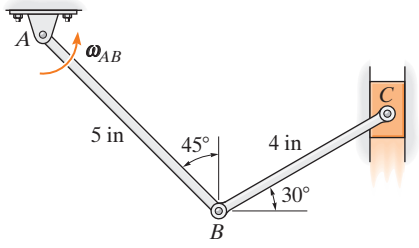
PROBLEMAS

16-81. En cada caso, muestre gráficamente cómo localizar el centro instantáneo de velocidad cero del eslabón AB. Suponga que se conoce la geometría.



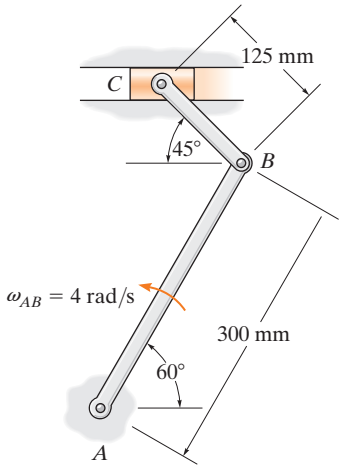
Prob. 16-81

16-82. Determine la velocidad angular del eslabón AB en el instante mostrado, si el bloque C se mueve hacia arriba a 12 in/s.



Prob. 16-82

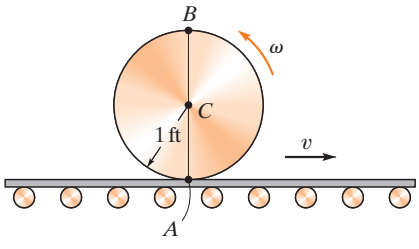
16-83. El mecanismo formador está diseñado para proporcionar un golpe de corte lento y un retorno rápido a una hoja unida a la corredera en C. Determine la velocidad angular del eslabón CB en el instante mostrado, si el eslabón AB gira a 4 rad/s.



Prob. 16-83

***16-84.** La banda transportadora se mueve hacia la derecha a $v = 8$ ft/s y, en el mismo instante, el cilindro rueda en sentido antihorario a $\omega = 2$ rad/s sin deslizarse. Determine las velocidades del centro del cilindro C y el punto B en este instante.

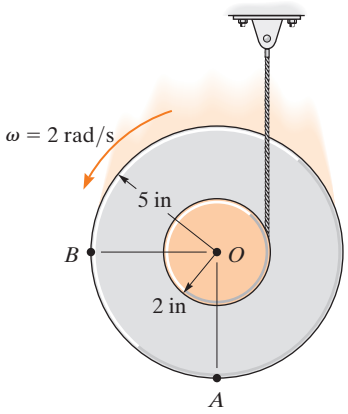
16-85. La banda transportadora se mueve hacia la derecha a $v = 12$ ft/s y, en el mismo instante, el cilindro rueda en sentido antihorario a $\omega = 6$ rad/s, mientras que su centro tiene una velocidad de 4 ft/s hacia la izquierda. Determine las velocidades de los puntos A y B sobre el disco en este instante. ¿Se desliza el cilindro sobre la banda transportadora?



Probs. 16-84/85

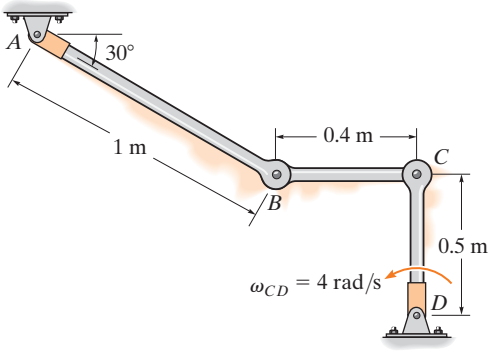
16

16-86. A medida que la cuerda se desenrolla del eje interno de la rueda, ésta gira a $\omega = 2$ rad/s en el instante mostrado. Determine las velocidades de los puntos A y B.



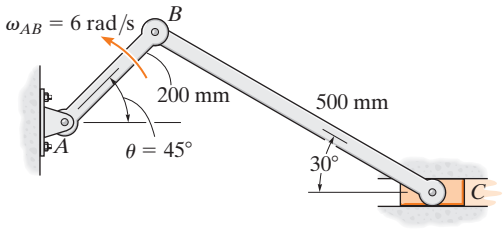
Prob. 16-86

16-87. Si la varilla CD gira con una velocidad angular $\omega_{CD} = 4$ rad/s, determine las velocidades angulares de las varillas AB y CB en el instante mostrado.



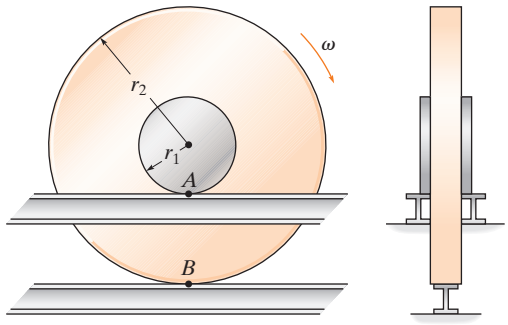
Prob. 16-87

***16-88.** Si la barra AB tiene una velocidad angular $\omega_{AB} = 6$ rad/s, determine la velocidad del bloque deslizante C en el instante mostrado.



Prob. 16-88

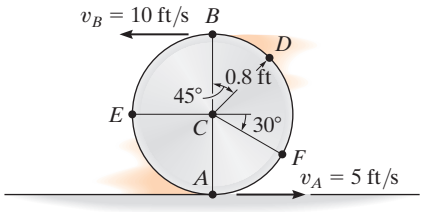
16-89. Demuestre que si el borde de la rueda y su eje se mantienen en contacto con las tres pistas mientras la rueda gira, es necesario que ocurra deslizamiento en el eje A si no hay deslizamiento en B. En estas condiciones, ¿cuál es la velocidad en A si la rueda tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$?



Prob. 16-89

16-90. Debido al deslizamiento, los puntos A y B en el borde del disco tienen las velocidades mostradas. Determine las velocidades del punto central C y el punto D en este instante.

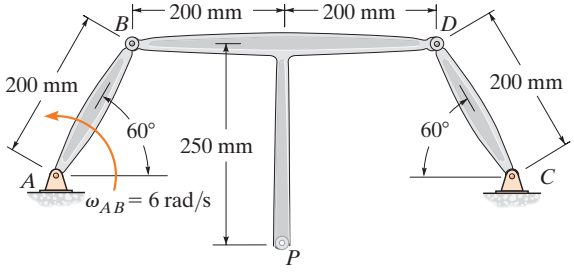
16-91. Debido al deslizamiento, los puntos A y B en el borde del disco tienen las velocidades mostradas. Determine las velocidades del punto central C y el punto E en este instante.



Probs. 16-90/91

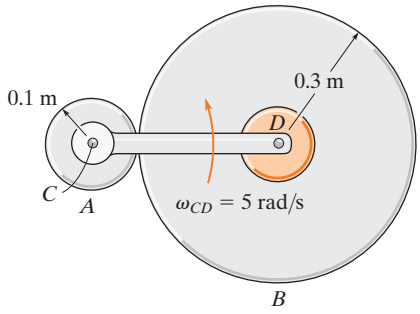
***16-92.** El elemento AB gira a $\omega_{AB} = 6$ rad/s. Determine la velocidad del punto D y la velocidad angular de los elementos de BPD y CD.

16-93. El elemento AB gira a $\omega_{AB} = 6$ rad/s. Determine la velocidad del punto P y la velocidad angular del elemento BPD.



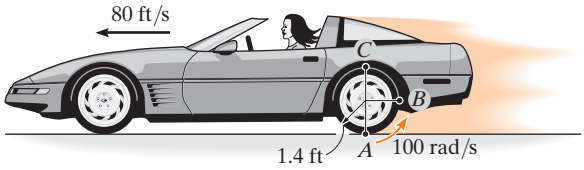
Probs. 16-92/93

16-94. El cilindro B rueda sobre el cilindro fijo A sin deslizarse. Si la barra conectada CD gira con una velocidad angular $\omega_{CD} = 5$ rad/s, determine la velocidad angular del cilindro B. El punto C es un punto fijo.



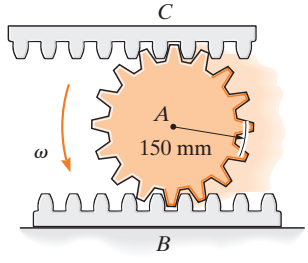
Prob. 16-94

16-95. Cuando el automóvil se desplaza hacia adelante a 80 ft/s sobre una carretera mojada, debido al deslizamiento, las ruedas traseras tienen una velocidad angular $\omega = 100$ rad/s. Determine las velocidades de los puntos A, B y C causadas por el movimiento.



Prob. 16-95

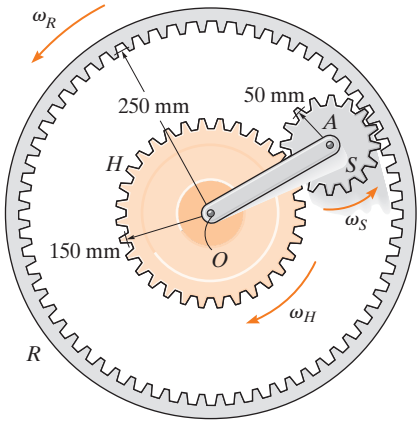
***16-96.** El engrane de piñón A rueda sobre el engrane dentado B con una velocidad angular $\omega = 8$ rad/s. Determine la velocidad del engrane dentado C.



Prob. 16-96

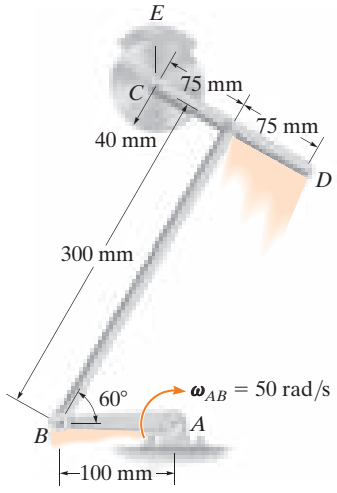
16-97. Si el engrane central H y la corona dentada R tienen velocidades angulares $\omega_H = 5$ rad/s y $\omega_R = 20$ rad/s, respectivamente, determine la velocidad angular ω_S del engrane recto S y la velocidad angular de su brazo adjunto OA.

16-98. Si el engrane central H tiene una velocidad angular $\omega_H = 5$ rad/s, determine la velocidad angular de la corona dentada R, tal que el brazo OA unido al engrane recto S permanezca estacionario ($\omega_{OA} = 0$). ¿Cuál es la velocidad angular del engrane recto?



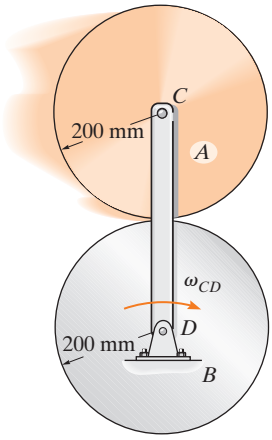
Probs. 16-97/98

16-99. El cigüeñal AB gira a $\omega_{AB} = 50$ rad/s alrededor del eje fijo a través del punto A, y el disco en C se mantiene fijo en su soporte en E. Determine la velocidad angular de la varilla CD en el instante mostrado.



Prob. 16-99

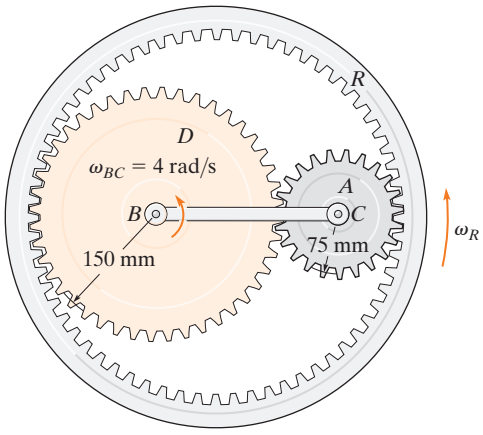
***16-100.** El cilindro A rueda sobre el *cilindro fijo* B sin deslizarse. Si la barra CD gira con una velocidad angular de $\omega_{CD} = 3$ rad/s, determine la velocidad angular de A.



Prob. 16-100

16-101. El engrane planetario A está conectado mediante un pasador al extremo del eslabón BC. Si el eslabón gira alrededor del punto fijo B a 4 rad/s, determine la velocidad angular de la corona dentada R. El engrane solar D se encuentra fijo respecto a la rotación.

16-102. Resuelva el problema 16-101 si el engrane central D gira en sentido horario a $\omega_D = 5$ rad/s, mientras el eslabón BC gira en sentido antihorario a $\omega_{BC} = 4$ rad/s.



Probs. 16-101/102

16.7 Análisis del movimiento relativo: aceleración

Una ecuación que relacione la aceleración de dos puntos en una barra (cuerpo rígido) sometida a movimiento plano general puede determinarse al diferenciar $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ con respecto al tiempo. De aquí resulta

$$\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{B/A}}{dt}$$

Los términos $d\mathbf{v}_B/dt = \mathbf{a}_B$ y $d\mathbf{v}_A/dt = \mathbf{a}_A$ se miden con respecto a un sistema de *ejes x, y fijos* y representan las *aceleraciones absolutas* de los puntos B y A. El último término representa la aceleración de B con respecto a A medida por un observador fijo en los ejes trasladantes x', y' que tienen su origen en el punto base A. En la sección 16.5 se demostró que para este observador el punto B parece moverse a lo largo de un *arco circular* con radio de curvatura $r_{B/A}$. Por consiguiente, $\mathbf{a}_{B/A}$ puede expresarse en función de sus componentes tangencial y normal; es decir, $\mathbf{a}_{B/A} = (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$, donde $(a_{B/A})_t = \alpha r_{B/A}$ y $(a_{B/A})_n = \omega^2 r_{B/A}$. Por lo tanto, la ecuación de aceleración relativa se escribe en la forma

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n \qquad (16\text{-}17)$$

donde

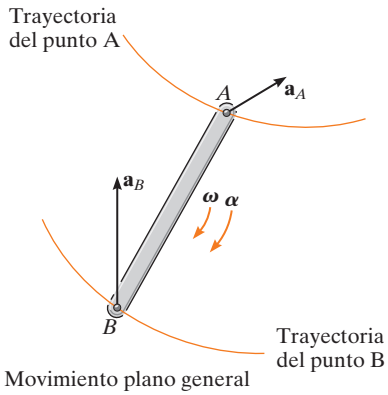
$\mathbf{a}_B =$ aceleración del punto B

$\mathbf{a}_A =$ aceleración del punto A

$(\mathbf{a}_{B/A})_t =$ componente de aceleración tangencial de B con respecto a A. La *magnitud* es $(a_{B/A})_t = \alpha r_{B/A}$ y la *dirección* es perpendicular a $\mathbf{r}_{B/A}$.

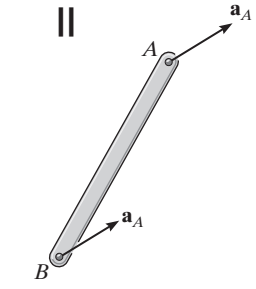
$(\mathbf{a}_{B/A})_n =$ componente de aceleración tangencial de B con respecto a A. La *magnitud* es $(a_{B/A})_n = \omega^2 r_{B/A}$ y la *dirección* siempre es de B hacia A.

En la figura 16-24 están representados gráficamente los términos de la ecuación 16-17. Aquí se observa que en un instante dado la aceleración de B (fig. 16-24*a*) se determina al considerar que la barra se traslada con una aceleración $\mathbf{a}_A$ (fig. 16-24*b*) y simultáneamente gira alrededor del punto base A con una velocidad angular instantánea $\boldsymbol{\omega}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ (fig. 16-24*c*). La adición vectorial de estos dos efectos, aplicados a B, da como resultado $\mathbf{a}_B$ (fig. 16-24*d*). En la figura 16-24*a*, como los puntos A y B se mueven a lo largo de *trayectorias curvas*, la aceleración de estos puntos tendrán *componentes tanto tangenciales como normales*. (Recuerde que la aceleración de un punto es *tangente a la trayectoria sólo* cuando ésta es *rectilínea* o cuando es un punto de inflexión en una curva.)



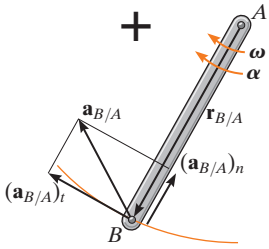
Movimiento plano general

(a)



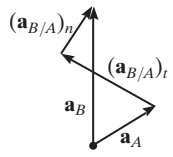
Traslación

(b)



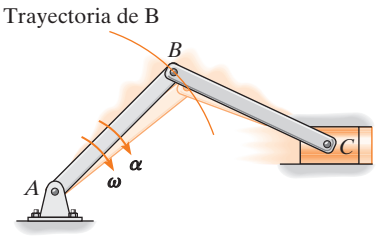
Rotación alrededor del punto base A

(c)

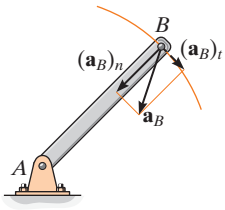


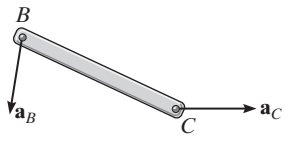
(d)

Fig. 16-24



(a)





(b)

Fig. 16-25

Como las componentes de aceleración relativa representan el efecto de *movimiento circular* observado desde ejes trasladantes que tienen su origen en el punto base A, estos términos pueden expresarse como $(\mathbf{a}_{B/A})_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A}$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_n = -\omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$, ecuación 16-14. Por lo tanto, la ecuación 16-17 se escribe

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A} \tag{16-18}$$

donde

$\mathbf{a}_B =$ aceleración del punto B
$\mathbf{a}_A =$ aceleración del punto base A
$\boldsymbol{\alpha} =$ aceleración angular del cuerpo
$\boldsymbol{\omega} =$ velocidad angular del cuerpo
$\mathbf{r}_{B/A} =$ vector de posición dirigido de A a B

Si la ecuación 16-17 o la 16-18 se aplican de una manera práctica para estudiar el movimiento acelerado de un cuerpo rígido que está *conectado por medio de un pasador* a otros dos cuerpos, habrá que tener en cuenta que los puntos que *coinciden en el pasador* se mueven con la *misma aceleración*, ya que la trayectoria del movimiento sobre la cual viajan es la *misma*. Por ejemplo, el punto B situado o en la varilla BA o en la varilla BC del mecanismo de manivelas de la figura 16-25*a* tiene la misma aceleración, puesto que las varillas están conectadas por el pasador en B. Aquí el movimiento de B ocurre a lo largo de una *trayectoria circular*, de modo que $\mathbf{a}_B$ puede expresarse en función de sus componentes tangencial y normal. En el otro extremo de la varilla BC el punto C se mueve a lo largo de una *trayectoria de línea recta*, definida por el pistón. Por lo tanto, $\mathbf{a}_C$ es horizontal (fig. 16-25*b*).

Por último, considere un disco que rueda sin deslizarse como se indica en la figura 16-26*a*. Como resultado, $v_A = 0$ y, entonces, a partir del diagrama cinemático de la figura 16-26*b*, la velocidad del centro de masa G es

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{G/A} = \mathbf{0} + (-\omega\mathbf{k}) \times (r\mathbf{j})$$

De modo que

$$v_G = \omega r \tag{16-19}$$

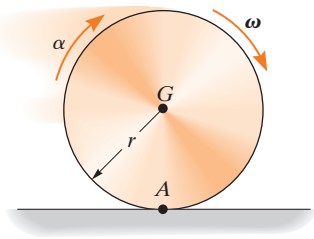
Este mismo resultado también se puede determinar utilizando el método de los CI, donde el punto A es el CI.

Dado que G se mueve a lo largo de una *línea recta*, su aceleración en este caso puede determinarse a partir de la derivada con respecto al tiempo de su velocidad.

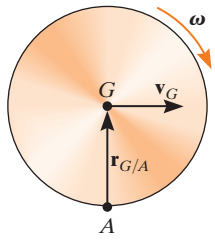
$$\frac{dv_G}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r$$

$$a_G = \alpha r \tag{16-20}$$

Estos dos resultados importantes también se obtuvieron en el ejemplo 16.4. También son aplicables a cualquier objeto circular, como una bola, un engrane, una rueda, etcétera, que *gira sin deslizarse*.



(a)



(b)

Fig. 16-26

Procedimiento para el análisis

La ecuación de aceleración relativa puede aplicarse entre dos puntos A y B de un cuerpo o por medio de análisis vectorial cartesiano, o escribiendo directamente las ecuaciones de componentes escalares x y y.

Análisis de la velocidad

- Determine la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo por la velocidad como se vio en la sección 16.5 o en la 16.6. Asimismo, determine las velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ de los puntos A y B, *si éstos se mueven a lo largo de trayectorias curvas*.

Análisis vectorial

Diagrama cinemático

- Establezca la dirección de las coordenadas x, y fijas y trace el diagrama cinemático del cuerpo. Indique en él $\mathbf{a}_A$, $\mathbf{a}_B$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\alpha}$ y $\mathbf{r}_{B/A}$.
- Si los puntos A y B se mueven a lo largo de *trayectorias curvas*, entonces sus aceleraciones deberían indicarse en función de sus componentes tangencial y normal, es decir, $\mathbf{a}_A = (\mathbf{a}_A)_t + (\mathbf{a}_A)_n$ y $\mathbf{a}_B = (\mathbf{a}_B)_t + (\mathbf{a}_B)_n$.

Ecuación de aceleración

- Para aplicar $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$ exprese los vectores en forma vectorial cartesiana y sustitúyalos en la ecuación. Evalúe el producto vectorial (cruz) y, después, iguale las respectivas componentes **i** y **j** para obtener dos ecuaciones escalares.
- Si la solución resulta una respuesta *negativa* para una magnitud *desconocida*, ello indica que el sentido del vector es opuesto al que aparece en el diagrama cinemático.

Análisis escalar

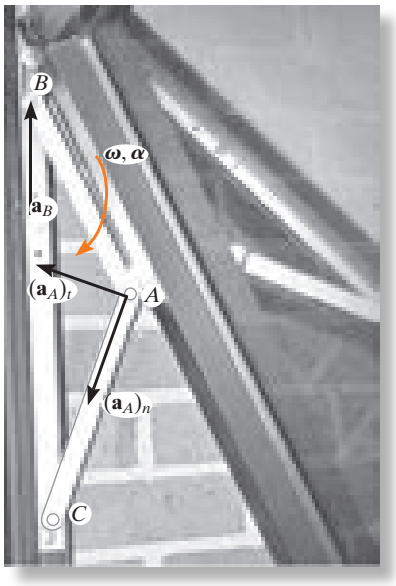
Diagrama cinemático

- Si la ecuación de aceleración se aplica en forma escalar, entonces deben establecerse las magnitudes y direcciones de las componentes de aceleración relativa $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_n$. Para ello, trace un diagrama cinemático como el de la figura 16-24*c*. Si se considera que el cuerpo está momentáneamente "fijo por medio de un pasador" en el punto base A, entonces las *magnitudes* de estos componentes son $(a_{B/A})_t = \alpha r_{B/A}$ y $(a_{B/A})_n = \omega^2 r_{B/A}$. Su *sentido* se establece a partir del diagrama, de modo que $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ actúe perpendicular a $\mathbf{r}_{B/A}$, de acuerdo con el movimiento de rotación $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo y la dirección de $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ es de B hacia A*.

Ecuación de aceleración

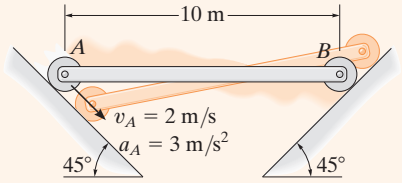
- Represente los vectores en $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$ gráficamente y muestre sus magnitudes y direcciones debajo de cada término. Las ecuaciones escalares se determinan con las componentes x y y de estos vectores.

*La notación $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A(\text{pasador})})_t + (\mathbf{a}_{B/A(\text{pasador})})_n$ suele ser útil para recordar que se supone que A está conectado con un pasador.



Se muestra el mecanismo de una ventana. Aquí CA gira alrededor de un eje fijo a través de C y AB experimenta movimiento plano general. Como el punto A se mueve a lo largo de una trayectoria curva tiene dos componentes de aceleración, en tanto que el punto B se mueve a lo largo de una corredera recta y la dirección de su aceleración está especificada. (© R. C. Hibbeler)

EJEMPLO 16.13

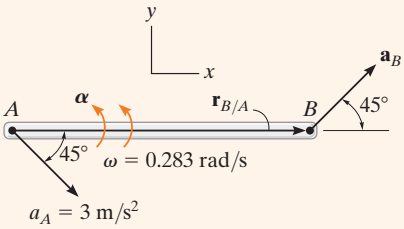


(a)

La varilla AB de la figura 16-27*a* está confinada a moverse a lo largo de los planos inclinados en A y B. Si la aceleración del punto A es de 3 m/s^2 y su velocidad de 2 m/s, ambas dirigidas hacia abajo del plano en el instante en que la varilla está horizontal, determine la aceleración angular de la varilla en este instante.

SOLUCIÓN I (ANÁLISIS VECTORIAL)

Aplicaremos la ecuación de aceleración en los puntos A y B de la varilla. Para hacerlo, primero se tiene que determinar la velocidad angular de la varilla. Demuestre que es $\omega = 0.283$ rad/s$\circlearrowleft$ por la ecuación de velocidad o el método de centros instantáneos.



(b)

Diagrama cinemático. Como los puntos A y B se mueven a lo largo de trayectorias de línea recta, *no* tienen componentes de aceleración normales a las trayectorias. En la figura 16-27*b* hay dos incógnitas, es decir, a_B y α.

Ecuación de aceleración

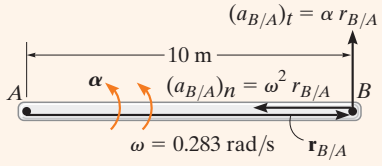
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

$$a_B \cos 45°\mathbf{i} + a_B \operatorname{sen} 45°\mathbf{j} = 3 \cos 45°\mathbf{i} - 3 \operatorname{sen} 45°\mathbf{j} + (\alpha\mathbf{k}) \times (10\mathbf{i}) - (0.283)^2(10\mathbf{i})$$

Al realizar el producto vectorial e igualar las componentes **i** y **j** se obtiene

$$a_B \cos 45° = 3 \cos 45° - (0.283)^2(10) \qquad (1)$$

$$a_B \operatorname{sen} 45° = -3 \operatorname{sen} 45° + \alpha(10) \qquad (2)$$



(c)

Fig. 16-27

Al resolver,

$$a_B = 1.87 \text{ m/s}^2 \measuredangle 45°$$

$$\alpha = 0.344 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

SOLUCIÓN II (ANÁLISIS ESCALAR)

Con el diagrama cinemático, que muestra las componentes de aceleración relativa $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ (fig. 16-27*c*), tenemos

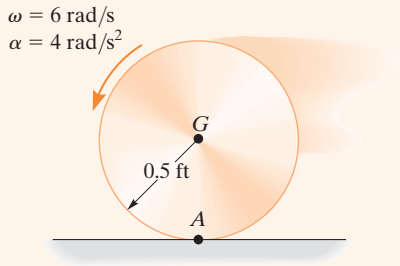
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$$

$$\begin{bmatrix} a_B \\ \measuredangle 45° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \text{ m/s}^2 \\ \measuredangle 45° \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha(10 \text{ m}) \\ \uparrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (0.283 \text{ rad/s})^2(10 \text{ m}) \\ \leftarrow \end{bmatrix}$$

Al igualar las componentes x y y se obtienen las ecuaciones 1 y 2, y la solución prosigue como antes.

EJEMPLO 16.14

El disco rueda sin deslizarse y tiene el movimiento angular mostrado en la figura 16-28*a*. Determine la aceleración del punto A en este instante.



(a)

SOLUCIÓN I (ANÁLISIS VECTORIAL)

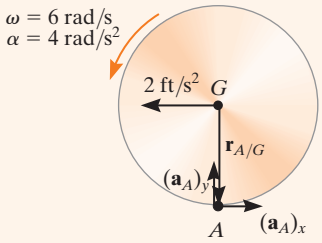
Diagrama cinemático. Puesto que no ocurre deslizamiento, se aplica la ecuación 16-20,

$$a_G = \alpha r = (4 \text{ rad/s}^2)(0.5 \text{ ft}) = 2 \text{ ft/s}^2$$

Ecuación de aceleración

Aplicaremos la ecuación de aceleración a los puntos G y A (fig. 16-28*b*),

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_G + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/G} - \omega^2 \mathbf{r}_{A/G}$$
$$\mathbf{a}_A = -2\mathbf{i} + (4\mathbf{k}) \times (-0.5\mathbf{j}) - (6)^2(-0.5\mathbf{j})$$
$$= \{18\mathbf{j}\} \text{ ft/s}^2$$



(b)

SOLUCIÓN II (ANÁLISIS ESCALAR)

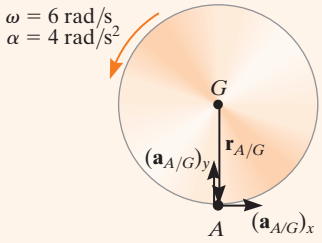
Si utilizamos el resultado para $a_G = 2 \text{ ft/s}^2$ que determinamos anteriormente y, con base en el diagrama cinemático, que muestra el movimiento relativo $\mathbf{a}_{A/G}$ (fig. 16-28*c*), tenemos

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_G + (\mathbf{a}_{A/G})_x + (\mathbf{a}_{A/G})_y$$

$$\begin{bmatrix} (a_A)_x \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (a_A)_y \\ \uparrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \text{ ft/s}^2 \\ \leftarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (4 \text{ rad/s}^2)(0.5 \text{ ft}) \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (6 \text{ rad/s})^2(0.5 \text{ ft}) \\ \uparrow \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \qquad (a_A)_x = -2 + 2 = 0$$

$$+\uparrow \qquad (a_A)_y = 18 \text{ ft/s}^2$$



(c)

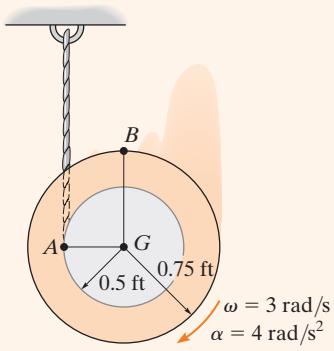
Fig. 16-28

Por lo tanto,

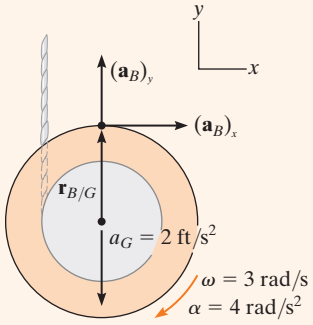
$$a_A = \sqrt{(0)^2 + (18 \text{ ft/s}^2)^2} = 18 \text{ ft/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: El hecho de que $a_A = 18 \text{ ft/s}^2$ indica que el centro instantáneo de velocidad cero, el punto A, *no* es un punto de aceleración cero.

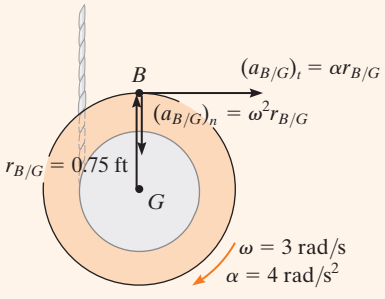
EJEMPLO 16.15



(a)



(b)



(c)

Fig. 16-29

El carrete que se ilustra en la figura 16-29*a* se desenreda de la cuerda, de modo que, en el instante que se muestra, tiene una velocidad angular de 3 rad/s y una aceleración angular de 4 rad/s^2. Determine la aceleración del punto B.

SOLUCIÓN I (ANÁLISIS VECTORIAL)

"Parece" que el carrete rueda hacia abajo sin deslizarse en el punto A. Por consiguiente, podemos utilizar los resultados de la ecuación 16-20 para determinar la aceleración del punto G, es decir,

$$a_G = \alpha r = (4 \text{ rad/s}^2)(0.5 \text{ ft}) = 2 \text{ ft/s}^2$$

Aplicaremos la ecuación de aceleración a los puntos G y B.

Diagrama cinemático. El punto B se mueve a lo largo de una *trayectoria curva* de radio de curvatura *desconocido**. Su aceleración estará representada por sus componentes x y y desconocidas, como se muestra en la figura 16-29*b*.

Ecuación de aceleración

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_G + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/G} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/G}$$

$$(a_B)_x\mathbf{i} + (a_B)_y\mathbf{j} = -2\mathbf{j} + (-4\mathbf{k}) \times (0.75\mathbf{j}) - (3)^2(0.75\mathbf{j})$$

Al igualar los términos **i** y **j**, las ecuaciones de componentes son

$$(a_B)_x = 4(0.75) = 3 \text{ ft/s}^2 \rightarrow \quad (1)$$

$$(a_B)_y = -2 - 6.75 = -8.75 \text{ ft/s}^2 = 8.75 \text{ ft/s}^2 \downarrow \quad (2)$$

La magnitud y dirección de $\mathbf{a}_B$ son, por consiguiente,

$$a_B = \sqrt{(3)^2 + (8.75)^2} = 9.25 \text{ ft/s}^2 \quad \textit{Resp.}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{8.75}{3} = 71.1^\circ \searrow \quad \textit{Resp.}$$

SOLUCIÓN II (ANÁLISIS ESCALAR)

Este problema se resuelve si se escriben directamente las ecuaciones de componentes escalares. El diagrama cinemático de la figura 16-29*c* muestra las componentes de aceleración relativa $(\mathbf{a}_{B/G})_t$ y $(\mathbf{a}_{B/G})_n$. Por ende,

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_G + (\mathbf{a}_{B/G})_t + (\mathbf{a}_{B/G})_n$$

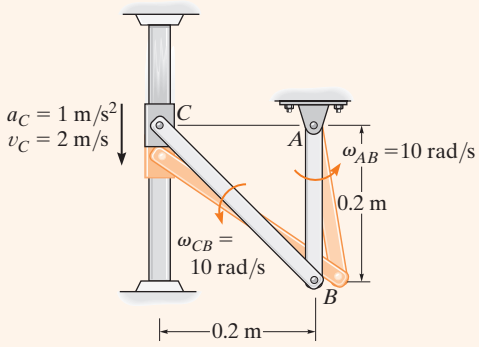
$$\begin{bmatrix} (a_B)_x \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (a_B)_y \\ \uparrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \text{ ft/s}^2 \\ \downarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \text{ rad/s}^2\,(0.75 \text{ ft}) \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (3 \text{ rad/s})^2(0.75 \text{ ft}) \\ \downarrow \end{bmatrix}$$

Los componentes x y y dan las ecuaciones 1 y 2 anteriores.

*Observe que el radio de curvatura ρ no es igual al radio del carrete, ya que éste no gira alrededor del punto G. Además, ρ no se define como la distancia de A (CI) a B, ya que la ubicación del CI depende solamente de la velocidad de un punto y no de la geometría de su trayectoria.

EJEMPLO 16.16

El collarín C en la figura 16-30*a* se mueve hacia abajo con una aceleración de 1 m/s^2. En el instante que se muestra, su rapidez es de 2 m/s, la cual imprime a las articulaciones CB y AB una velocidad angular $\omega_{AB} = \omega_{CB} = 10$ rad/s (vea el ejemplo 16.8). Determine la aceleración angular de CB y AB en este instante.



(a)

SOLUCIÓN (ANÁLISIS VECTORIAL)

Diagrama cinemático. Los diagramas cinemáticos de *los* eslabones AB y CB se ilustran en la figura 16-30*b*. Para la solución, aplicaremos la ecuación cinemática apropiada a cada eslabón.

Ecuación de aceleración

Eslabón AB (rotación alrededor de un eje fijo):

$$\mathbf{a}_B = \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_B - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_B$$
$$\mathbf{a}_B = (\alpha_{AB}\mathbf{k}) \times (-0.2\mathbf{j}) - (10)^2(-0.2\mathbf{j})$$
$$\mathbf{a}_B = 0.2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$$

Observe que $\mathbf{a}_B$ tiene componentes n y t pues se mueve a lo largo de una *trayectoria circular*.

Eslabón BC (movimiento plano general): Con el resultado de $\mathbf{a}_B$ y si aplicamos la ecuación 16-18, tenemos

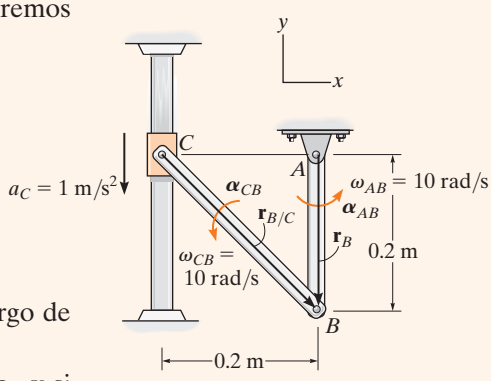
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\alpha}_{CB} \times \mathbf{r}_{B/C} - \omega_{CB}^2 \mathbf{r}_{B/C}$$
$$0.2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j} = -1\mathbf{j} + (\alpha_{CB}\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j}) - (10)^2(0.2\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j})$$
$$0.2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j} = -1\mathbf{j} + 0.2\alpha_{CB}\mathbf{j} + 0.2\alpha_{CB}\mathbf{i} - 20\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$$

Por lo tanto,

$$0.2\alpha_{AB} = 0.2\alpha_{CB} - 20$$
$$20 = -1 + 0.2\alpha_{CB} + 20$$

Al resolver,

$$\alpha_{CB} = 5 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \quad \textit{Resp.}$$
$$\alpha_{AB} = -95 \text{ rad/s}^2 = 95 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright \quad \textit{Resp.}$$

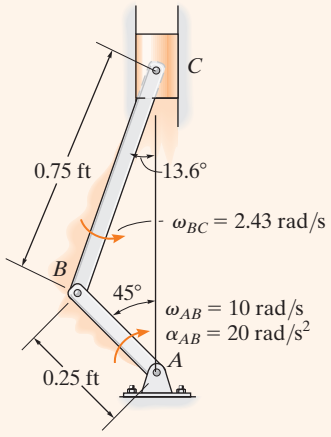


(b)

Fig. 16-30

16

EJEMPLO 16.17



(a)

El cigüeñal AB gira con una aceleración angular en sentido horario de 20 rad/s^2 (fig. 16-31a). Determine la aceleración del pistón cuando AB está en la posición que se ilustra. En este instante $\omega_{AB} = 10$ rad/s y $\omega_{BC} = 2.43$ rad/s (vea el ejemplo 16.12).

SOLUCIÓN (ANÁLISIS VECTORIAL)

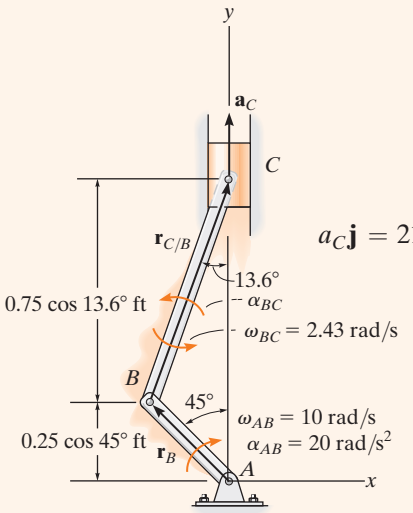
Diagrama cinemático. Los diagramas cinemáticos de AB y BC se muestran en la figura 16-31b. Aquí $\mathbf{a}_C$ es vertical, ya que C se mueve a lo largo de una trayectoria de línea recta.

Ecuación de aceleración. Mediante la expresión de cada uno de los vectores de posición en forma vectorial cartesiana

$$\mathbf{r}_B = \{-0.25 \operatorname{sen} 45°\mathbf{i} + 0.25 \cos 45°\mathbf{j}\} \text{ ft} = \{-0.177\mathbf{i} + 0.177\mathbf{j}\} \text{ ft}$$
$$\mathbf{r}_{C/B} = \{0.75 \operatorname{sen} 13.6°\mathbf{i} + 0.75 \cos 13.6°\mathbf{j}\} \text{ ft} = \{0.177\mathbf{i} + 0.729\mathbf{j}\} \text{ ft}$$

Cigüeñal AB (rotación alrededor de un eje fijo):

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_B - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_B \\ &= (-20\mathbf{k}) \times (-0.177\mathbf{i} + 0.177\mathbf{j}) - (10)^2(-0.177\mathbf{i} + 0.177\mathbf{j}) \\ &= \{21.21\mathbf{i} - 14.14\mathbf{j}\} \text{ ft/s}^2\end{aligned}$$



(b)

Fig. 16-31

Biela BC (movimiento plano general): Con el resultado de $\mathbf{a}_B$ y si observamos que $\mathbf{a}_C$ está en la dirección vertical, entonces

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B} - \omega_{BC}^2 \mathbf{r}_{C/B}$$
$$a_C\mathbf{j} = 21.21\mathbf{i} - 14.14\mathbf{j} + (\alpha_{BC}\mathbf{k}) \times (0.177\mathbf{i} + 0.729\mathbf{j}) - (2.43)^2(0.177\mathbf{i} + 0.729\mathbf{j})$$
$$a_C\mathbf{j} = 21.21\mathbf{i} - 14.14\mathbf{j} + 0.177\alpha_{BC}\mathbf{j} - 0.729\alpha_{BC}\mathbf{i} - 1.04\mathbf{i} - 4.30\mathbf{j}$$
$$0 = 20.17 - 0.729\alpha_{BC}$$
$$a_C = 0.177\alpha_{BC} - 18.45$$

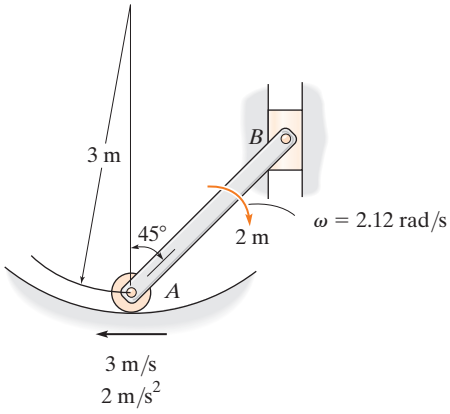
Al resolver tenemos

$$\alpha_{BC} = 27.7 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$$
$$a_C = -13.5 \text{ ft/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

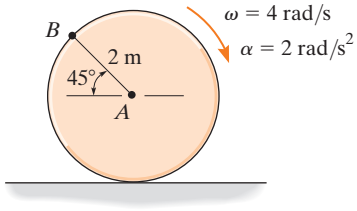
NOTA: Como el pistón se mueve hacia arriba, el signo negativo de a_C indica que el pistón se desacelera, es decir, $\mathbf{a}_C = \{-13.5\mathbf{j}\}$ ft/s^2. Esto hace que la rapidez del pistón se reduzca hasta que AB está vertical, momento en el cual el pistón está momentáneamente en reposo.

PROBLEMA PRELIMINAR

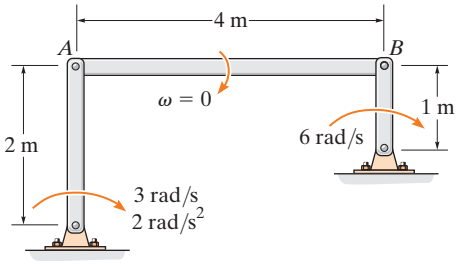
P16-3. Establezca la ecuación de aceleración relativa entre los puntos A y B. La velocidad angular está dada.



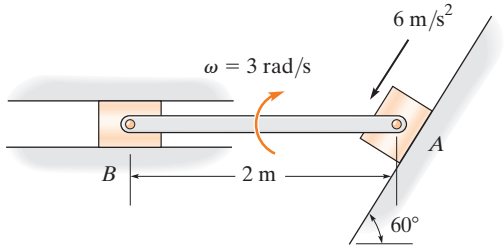
(a)



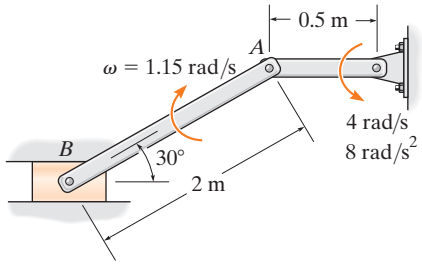
(b)



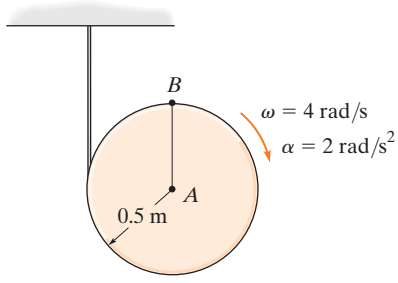
(c)



(d)



(e)



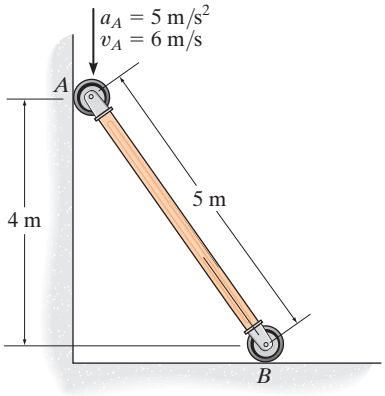
(f)

Prob. P16-3

16

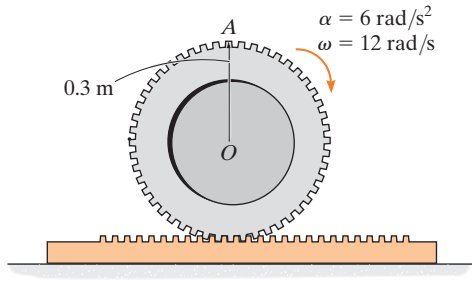
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F16-19. En el instante que se indica, el extremo A de la varilla tiene la velocidad y aceleración mostradas. Determine la aceleración angular de la varilla y la aceleración del extremo B de la varilla.



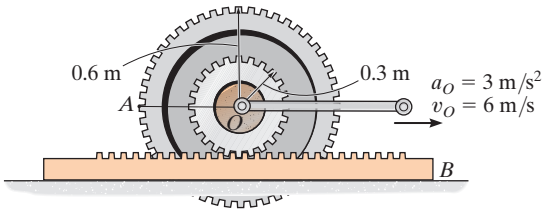
Prob. F16-19

F16-20. El engrane rueda sobre la cremallera fija con una velocidad angular de $\omega = 12$ rad/s y una aceleración angular de $\alpha = 6$ rad/s^2. Determine la aceleración del punto A.



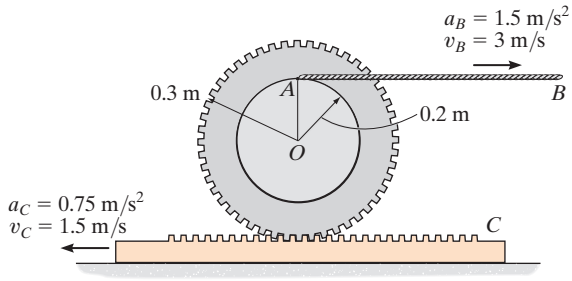
Prob. F16-20

F16-21. El engrane rueda sobre la cremallera fija B. En el instante que se muestra, el centro O del engrane se mueve con una velocidad de $v_O = 6$ m/s y una aceleración de $a_O = 3$ m/s^2. Determine la aceleración angular del engrane y la aceleración del punto A en este instante.



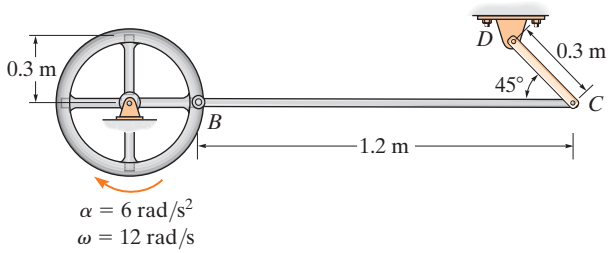
Prob. F16-21

F16-22. En el instante que se muestra, la velocidad del cable AB es de 3 m/s y su aceleración de 1.5 m/s^2, mientras que la velocidad de la cremallera es de 1.5 m/s y su aceleración de 0.75 m/s^2. Determine la aceleración angular del engrane en este instante.



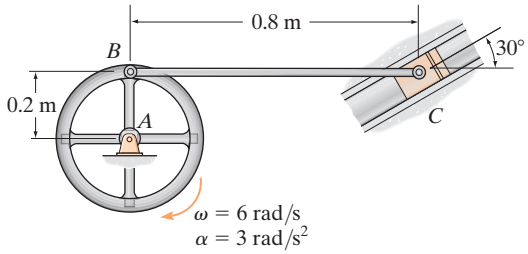
Prob. F16-22

F16-23. En el instante que se muestra, la rueda hace un movimiento de rotación con una velocidad angular de $\omega = 12$ rad/s y una aceleración angular de $\alpha = 6$ rad/s^2. Determine la aceleración angular del eslabón BC en el instante mostrado.



Prob. F16-23

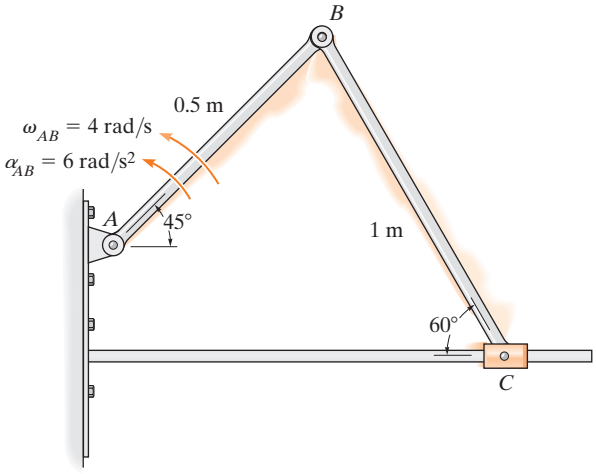
F16-24. En el instante que se muestra, la rueda A hace un movimiento de rotación con una velocidad angular de $\omega = 6$ rad/s y una aceleración angular de $\alpha = 3$ rad/s^2. Determine la aceleración angular del eslabón BC y la aceleración del pistón C.



Prob. F16-24

PROBLEMAS

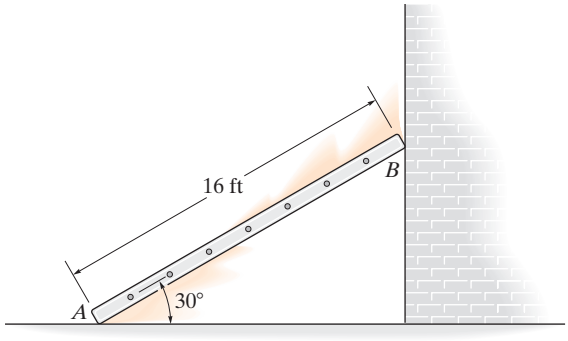
16-103. La barra AB tiene los movimientos angulares mostrados. Determine la velocidad y la aceleración del bloque deslizante C en este instante.



Prob. 16-103

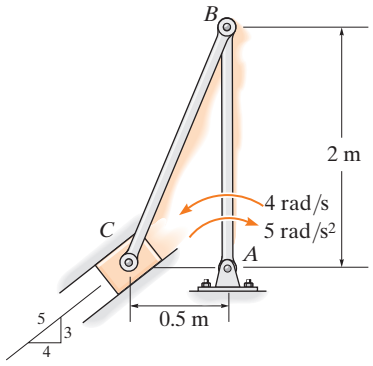
***16-104.** En un instante dado, la parte inferior A de la escalera tiene una aceleración $a_A = 4$ ft/s^2 y una velocidad $v_A = 6$ ft/s; ambas actúan hacia la izquierda. Determine la aceleración de la parte superior de la escalera, B, y la aceleración angular de la escalera en este mismo instante.

16-105. En un instante dado, la parte superior B de la escalera tiene una aceleración $a_B = 2$ ft/s^2 y una velocidad $v_B = 4$ ft/s; ambas actúan hacia abajo. Determine la aceleración de la parte inferior A de la escalera, y la aceleración angular de la escalera en este instante.



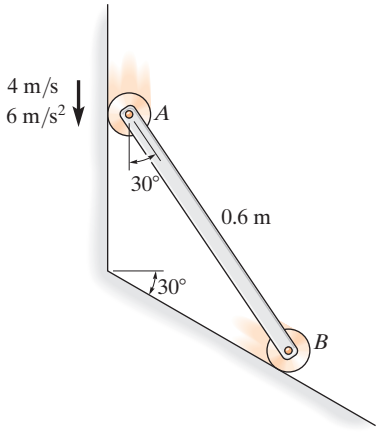
Probs. 16-104/105

16-106. El elemento AB tiene los movimientos angulares mostrados. Determine la velocidad y la aceleración del bloque deslizante C en este instante.



Prob. 16-106

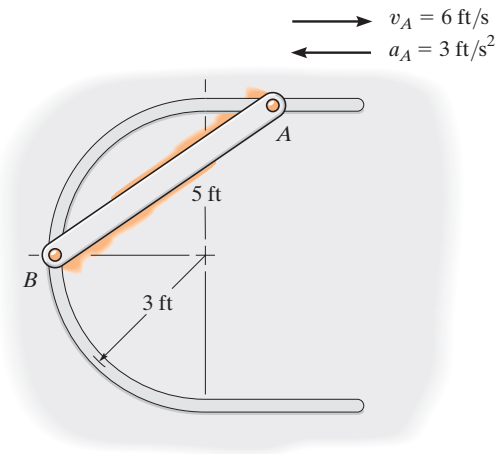
16-107. En un instante dado, el rodillo A en la barra tiene la velocidad y la aceleración mostradas. Determine la velocidad y la aceleración del rodillo B, así como la velocidad angular de la barra y la aceleración angular en este instante.



Prob. 16-107

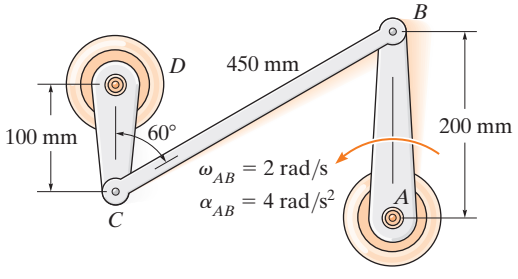
16

***16-108.** La varilla está limitada a moverse a lo largo de la trayectoria debido a los pasadores en sus extremos. En el instante indicado, el punto A tiene el movimiento que se indica. Determine la velocidad y la aceleración del punto B en este instante.



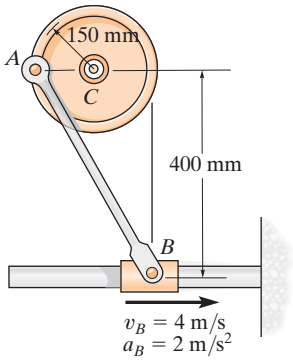
Prob. 16-108

16-109. El elemento AB tiene los movimientos angulares mostrados. Determine la velocidad y la aceleración angulares de los elementos CB y DC.



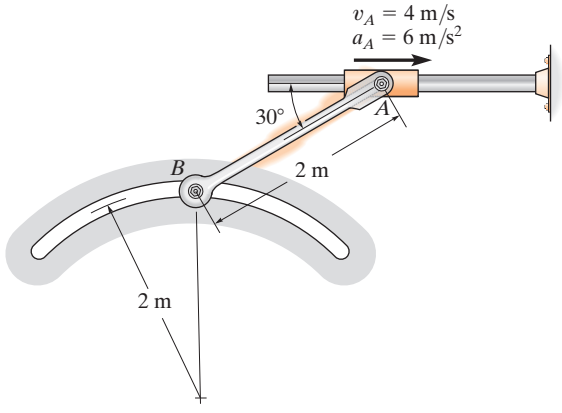
Prob. 16-109

16-110. El bloque deslizante tiene el movimiento mostrado. Determine la velocidad y la aceleración angulares de la rueda en este instante.



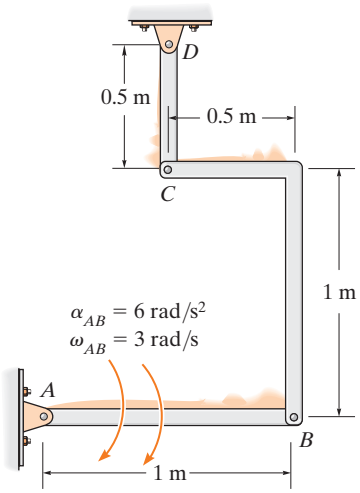
Prob. 16-110

16-111. En un instante dado, el bloque deslizante A se mueve hacia la derecha con el movimiento que se muestra. Determine la aceleración angular del eslabón AB y la aceleración del punto B en este instante.



Prob. 16-111

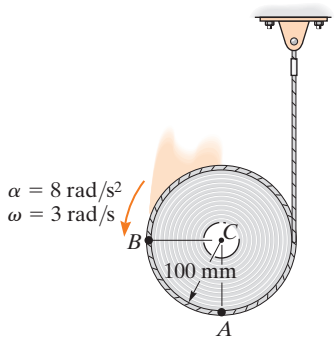
***16-112.** Determine la aceleración angular del eslabón *CD*, si el eslabón *AB* tiene la velocidad y la aceleración angulares mostradas.



Prob. 16-112

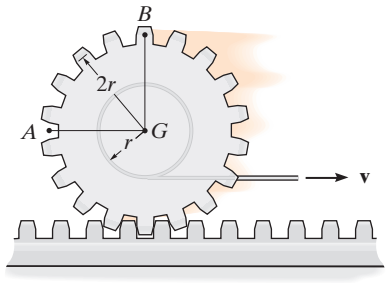
16-113. El rollo de cuerda tiene el movimiento angular que se muestra. Determine la velocidad y la aceleración del punto *A* en el instante mostrado.

16-114. El rollo de cuerda tiene el movimiento angular que se indica. Determine la velocidad y la aceleración del punto *B* en el instante mostrado.



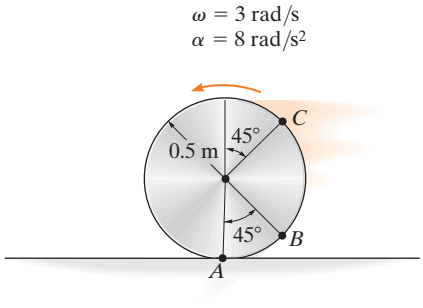
Probs. 16-113/114

16-115. Una cuerda se enrolla alrededor de la bobina interna del engrane. Si se jala con una velocidad constante **v**, determine las velocidades y las aceleraciones de los puntos *A* y *B*. El engrane rueda sobre el engrane dentado fijo.



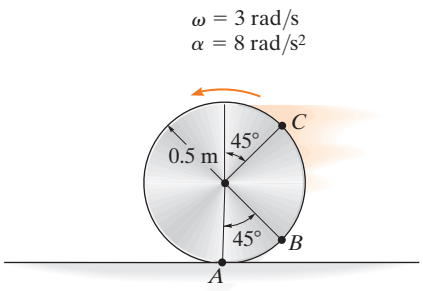
Prob. 16-115

***16-116.** El disco tiene una aceleración angular $\alpha = 8$ rad/s² y una velocidad angular $\omega = 3$ rad/s en el instante mostrado. Si no se desliza en *A*, determine la aceleración del punto *B*.



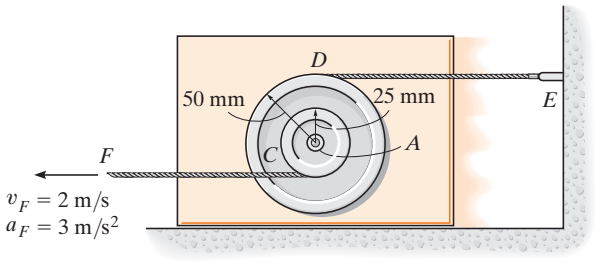
Prob. 16-116

16-117. El disco tiene una aceleración angular $\alpha = 8\ \text{rad/s}^2$ y una velocidad angular $\omega = 3\ \text{rad/s}$ en el instante mostrado. Si no se desliza en A, determine la aceleración del punto C.



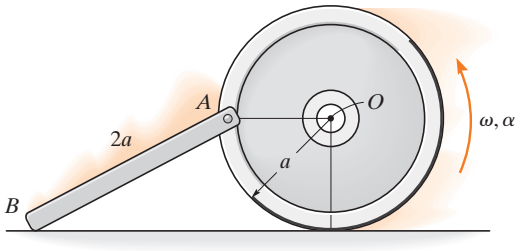
Prob. 16-117

16-118. Una sola polea que tiene un reborde interior y otro exterior está articulada al bloque en A. Conforme la cuerda CF se desenrolla del reborde interior de la polea con el movimiento señalado, la cuerda DE se desenrolla del reborde exterior. Determine la aceleración angular de la polea y la aceleración del bloque en el instante mostrado.



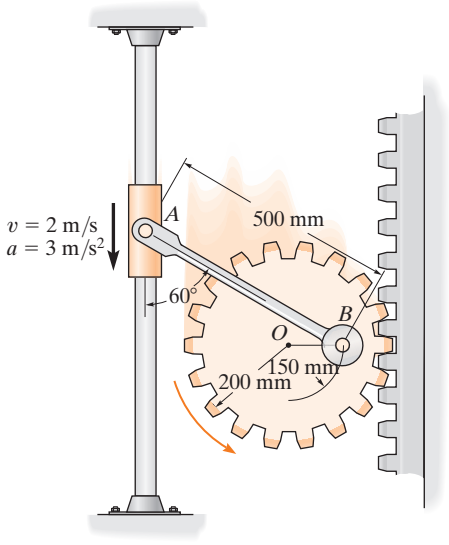
Prob. 16-118

16-119. La rueda gira sin deslizarse, de modo que en el instante mostrado tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$. Determine la velocidad y la aceleración del punto B sobre la varilla en este instante.



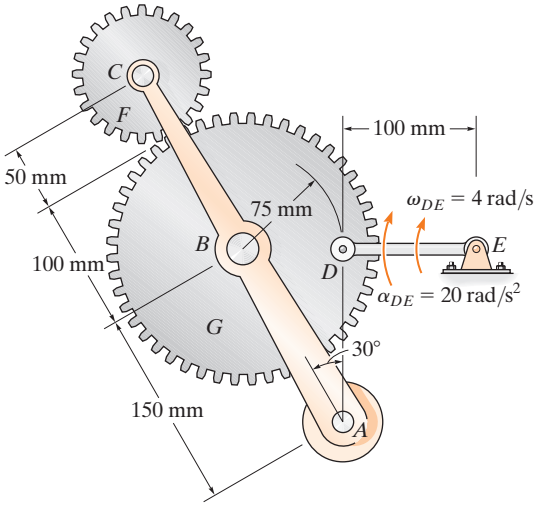
Prob. 16-119

***16-120.** El collarín se mueve hacia abajo con el movimiento mostrado. Determine la velocidad angular y la aceleración angular del engrane en el instante mostrado, conforme rueda a lo largo del engrane dentado fijo.



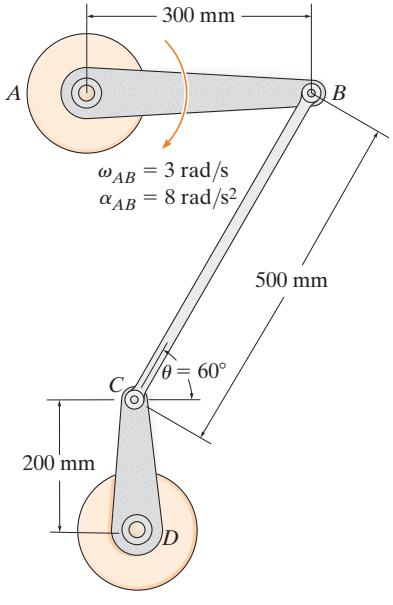
Prob. 16-120

16-121. El mecanismo de manivela y engrane vinculados le da un movimiento oscilante a la manivela AC, necesario para el funcionamiento de una prensa de impresión. Si el eslabón DE tiene el movimiento angular mostrado, determine las respectivas velocidades angulares del engrane F y la manivela AC en este instante, así como la aceleración angular de la manivela AC.



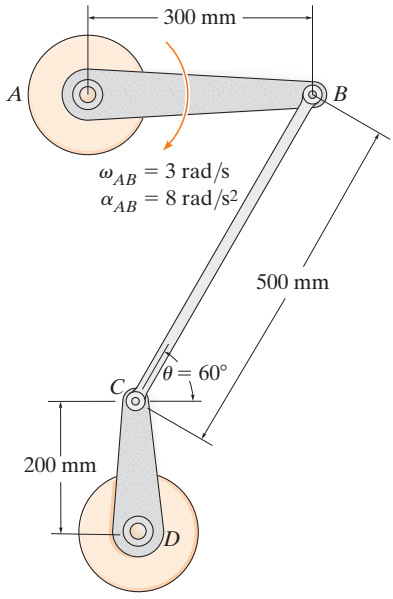
Prob. 16-121

16-122. Si el elemento AB tiene el movimiento angular que se muestra, determine la velocidad y la aceleración angulares del elemento CD en el instante mostrado.



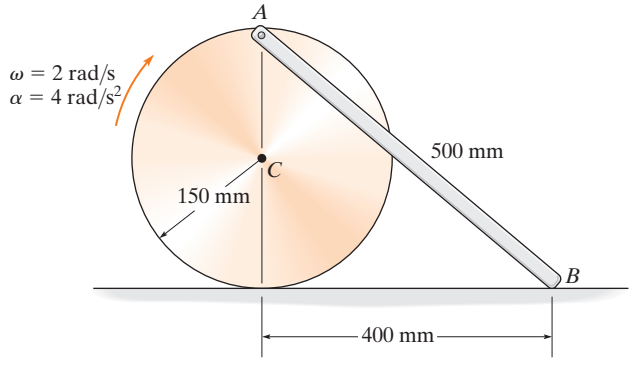
Prob. 16-122

16-123. Si elemento AB tiene el movimiento angular que se muestra, determine la velocidad y la aceleración del punto C en el instante mostrado.



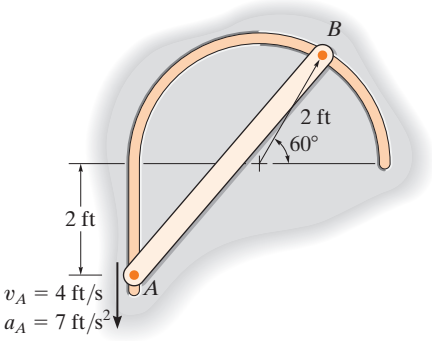
Prob. 16-123

***16-124.** El disco rueda sin deslizarse, de modo que tiene una aceleración angular de $\alpha = 4$ rad/s^2 y una velocidad angular de $\omega = 2$ rad/s en el instante mostrado. Determine la aceleración de los puntos A y B sobre el eslabón y la aceleración angular del eslabón en este instante. Suponga que el punto A se encuentra en la periferia del disco, a 150 mm de C.



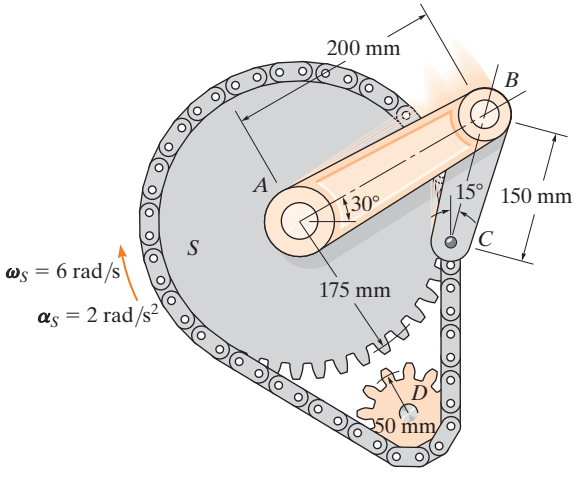
Prob. 16-124

16-125. Los extremos de la barra AB están limitados a moverse a lo largo de las trayectorias mostradas. En un instante dado, A tiene una velocidad de $v_A = 4$ ft/s y una aceleración de $a_A = 7$ ft/s^2. Determine la velocidad y la aceleración angulares de AB en este instante.



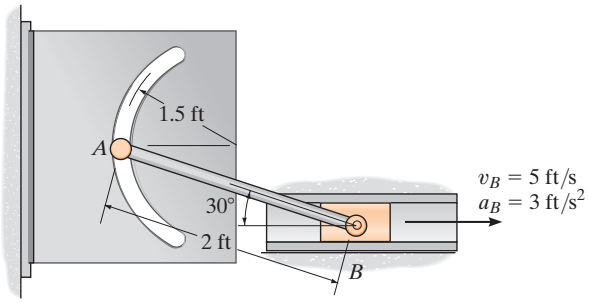
Prob. 16-125

16-126. El mecanismo produce movimiento intermitente del eslabón AB. Si la rueda dentada S gira con una aceleración angular $\alpha_S = 2$ rad/s^2 y tiene la velocidad angular $\omega_S = 6$ rad/s en el instante mostrado, determine la velocidad angular y la aceleración angular del eslabón AB en este instante. La rueda dentada S está montada en una flecha *separada* de una flecha colineal conectada a AB en A. El pasador en C está conectado a uno de los eslabones de la cadena, de modo que éste se mueve verticalmente hacia abajo.



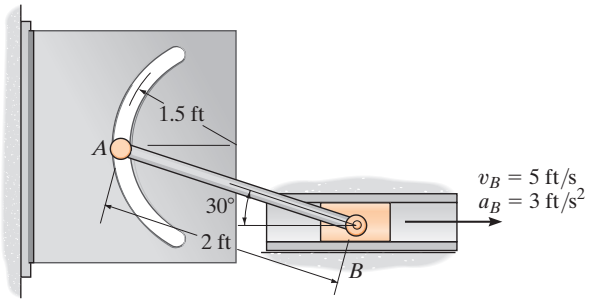
Prob. 16-126

16-127. El bloque deslizante se mueve con una velocidad de $v_B = 5$ ft/s y una aceleración de $a_B = 3$ ft/s^2. Determine la aceleración angular de la varilla AB en el instante mostrado.



Prob. 16-127

*16-128. El bloque deslizante se mueve con una velocidad de $v_B = 5$ ft/s y una aceleración de $a_B = 3$ ft/s^2. Determine la aceleración de A en el instante mostrado.



Prob. 16-128

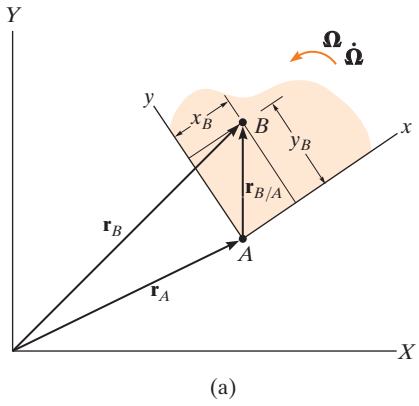
16

16.8 Análisis del movimiento relativo mediante ejes rotatorios

En las secciones anteriores, se describió el análisis del movimiento relativo en cuanto a velocidad y aceleración usando un sistema de coordenadas trasladante. Este tipo de análisis es útil para determinar el movimiento de puntos situados en el *mismo* cuerpo rígido, o el movimiento de puntos localizados en varios cuerpos conectados por un pasador. Sin embargo, en algunos problemas, los cuerpos rígidos (mecanismos) están construidos para que sus conexiones se *deslicen*. El análisis cinemático de casos como ésos se lleva a cabo mejor, si el movimiento se analiza por medio de un sistema de coordenadas que se *traslade* y *gire*. Además, este marco de referencia es útil para analizar los movimientos de dos puntos en un mecanismo que *no* están en el *mismo* cuerpo, y para especificar la cinemática del movimiento de una partícula cuando ésta se mueve a lo largo de una trayectoria rotatoria.

En el análisis siguiente se desarrollarán dos ecuaciones, las cuales relacionan la velocidad y aceleración de dos puntos, uno de los cuales es el origen de un marco de referencia móvil sometido tanto a traslación como a rotación en el plano*.

Posición. Considere los dos puntos A y B de la figura 16-32*a*. Los vectores de posición $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ especifican su ubicación, y se miden con respecto al sistema de coordenadas X, Y, Z fijo. Como se muestra en la figura, el "punto base" A representa el origen del sistema de coordenadas x, y, z, el cual se supone que se traslada y rota con respecto al sistema X, Y, Z. El vector de posición relativa $\mathbf{r}_{B/A}$ especifica la posición de B con respecto a A. Las componentes de este vector pueden expresarse ya sea en función de vectores unitarios a lo largo de los ejes X, Y, es decir $\mathbf{I}$ y $\mathbf{J}$, o bien, en función de vectores unitarios a lo largo de los ejes x, y, es decir, $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. Para el desarrollo siguiente, $\mathbf{r}_{B/A}$ se medirá con respecto al marco de referencia x, y móvil. Por lo tanto, si las coordenadas de B son (x_B, y_B) (fig. 16-32*a*), entonces



(a)

Fig. 16-32

$$\mathbf{r}_{B/A} = x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}$$

Por adición vectorial, los tres vectores de posición en la figura 16-32*a* están relacionados por la ecuación

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \tag{16-21}$$

En el instante considerado, la velocidad del punto A es $\mathbf{v}_A$ y su aceleración $\mathbf{a}_A$, en tanto que la velocidad y aceleración angulares de los ejes x y y son $\boldsymbol{\Omega}$ (omega) y $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = d\boldsymbol{\Omega}/dt$, respectivamente.

*El movimiento tridimensional más general de los puntos se desarrolla en la sección 20.4.

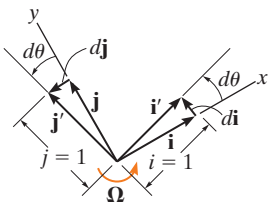
Velocidad. La velocidad del punto B se determina al considerar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 16-21, de lo cual resulta

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} \tag{16-22}$$

El último término de la ecuación se evalúa como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} &= \frac{d}{dt}(x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}) \\ &= \frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt} \\ &= \left(\frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j}\right) + \left(x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right)\end{aligned} \tag{16-23}$$

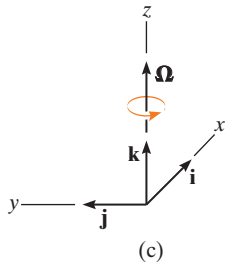
Los dos términos en el primer par de paréntesis representan las componentes de velocidad del punto B medidas por un observador situado en el sistema de coordenadas móvil x, y, z. Estos términos serán denotados por el vector $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$. En el segundo par de paréntesis, el cambio instantáneo con respecto al tiempo de los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ es medido por un observador situado en el sistema de coordenadas fijo X, Y, Z. Estos cambios, $d\mathbf{i}$ y $d\mathbf{j}$, se deben *sólo* a la *rotación* $d\theta$ de los ejes x, y, z, que hace que $\mathbf{i}$ se vuelva $\mathbf{i}' = \mathbf{i} + d\mathbf{i}$ y que $\mathbf{j}$ se vuelva $\mathbf{j}' = \mathbf{j} + d\mathbf{j}$ (fig. 16-32*b*). Como se muestra, las *magnitudes* tanto de $d\mathbf{i}$ como de $d\mathbf{j}$ son iguales a 1 $d\theta$, puesto que $i = i' = j = j' = 1$. La *dirección* de $d\mathbf{i}$ está definida por $+\mathbf{j}$, ya que $d\mathbf{i}$ es tangente a la trayectoria descrita por la punta de flecha de $\mathbf{i}$ en el límite conforme $\Delta t \rightarrow dt$. Asimismo, $d\mathbf{j}$ actúa en la dirección $-\mathbf{i}$ (fig. 16-32*b*). Por consiguiente,



(b)

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(\mathbf{j}) = \Omega\mathbf{j} \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\mathbf{i}) = -\Omega\mathbf{i}$$

Si vemos los ejes en tres dimensiones (fig. 16-32*c*) y observamos que $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{k}$, podemos expresar las derivadas anteriores en función del producto vectorial como



(c)

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i} \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j} \tag{16-24}$$

Al sustituir estos resultados en la ecuación 16-23 y utilizar la propiedad distributiva del producto vectorial, obtenemos

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}) = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{16-25}$$

Fig. 16-32 (cont.)

Por lo tanto, la ecuación 16-22 se escribe

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \tag{16-26}$$

donde

$\mathbf{v}_B =$ velocidad de B, medida con respecto al marco de referencia X, Y, Z

$\mathbf{v}_A =$ velocidad del origen A del marco de referencia x, y, z medida con respecto al marco de referencia X, Y, Z

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} =$ velocidad de "B con respecto a A", medida por un observador situado en el marco de referencia rotatorio x, y, z

$\boldsymbol{\Omega} =$ velocidad angular del marco de referencia x, y, z medida con respecto al marco de referencia X, Y, Z

$\mathbf{r}_{B/A} =$ posición de B con respecto a A

Al comparar la ecuación 16-26 con la ecuación 16-16 ($\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$), la cual es válida para un marco de referencia trasladante, se observa que la única diferencia entre estas dos ecuaciones está representada por el término $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$.

Cuando se aplica la ecuación 16-26 suele ser útil entender lo que representa cada uno de los términos. En orden de aparición, son los siguientes:

$\mathbf{v}_B$ { velocidad absoluta de B } } movimiento de B observado desde el marco de referencia X, Y, Z

(es igual a)

$\mathbf{v}_A$ { la velocidad absoluta del origen del marco de referencia x, y, z

(más)

$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ { el efecto de velocidad angular provocado por la rotación del marco de referencia x, y, z } } movimiento del marco de referencia x, y, z observado desde el marco de referencia X, Y, Z

(más)

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ { velocidad de B con respecto a A } } movimiento de B observado desde el marco de referencia x, y, z

16

Aceleración. La aceleración de B, observada desde el sistema de coordenadas X, Y, Z, puede expresare en función de su movimiento medido con respecto al sistema rotatorio de coordenadas, si se considera la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 16-26.

$$\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} \qquad (16\text{-}27)$$

En este caso $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = d\boldsymbol{\Omega}/dt$ es la aceleración angular del sistema de coordenadas x, y, z. Como $\boldsymbol{\Omega}$ siempre es perpendicular al plano de movimiento, entonces $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ mide *sólo el cambio de magnitud de* $\boldsymbol{\Omega}$. La derivada $d\mathbf{r}_{B/A}/dt$ está definida por la ecuación 16-25, de modo que

$$\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \qquad (16\text{-}28)$$

16

Se determina la derivada con respecto al tiempo de $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} = (v_{B/A})_x\mathbf{i} + (v_{B/A})_y\mathbf{j}$,

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = \left[\frac{d(v_{B/A})_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{d(v_{B/A})_y}{dt}\mathbf{j}\right] + \left[(v_{B/A})_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + (v_{B/A})_y\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right]$$

Los dos términos en el primer par de paréntesis representan las componentes de la aceleración del punto B, medida por un observador situado en el sistema de coordenadas rotatorio. Estos términos denotarán mediante $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$. Los términos en el segundo par de paréntesis pueden simplificarse con las ecuaciones 16-24.

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

Al sustituir ésta y la ecuación 16-28 en la ecuación 16-27 y reordenar los términos,

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} \qquad (16\text{-}29)$$

donde

$\mathbf{a}_B =$ aceleración de B, medida con respecto al marco de referencia X, Y, Z

$\mathbf{a}_A =$ aceleración del origen A del marco de referencia x, y, z, medida con respecto al marco de referencia X, Y, Z

$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}, (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} =$ aceleración y velocidad de B con respecto a A, medida por un observador situado en el marco de referencia rotatorio x, y, z

$\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \boldsymbol{\Omega} =$ aceleración y velocidad angulares del marco de referencia x, y, z, medidas con respecto al marco de referencia X, Y, Z

$\mathbf{r}_{B/A} =$ posición de B con respecto a A

Si se compara la ecuación 16-29 con la ecuación 16-18, escrita en la forma $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$, la cual es válida para un marco de referencia trasladante, se observa que la diferencia entre estas dos ecuaciones está representada por los términos $2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$. En particular, $2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ se llama *aceleración de Coriolis*, en honor del ingeniero francés G. C. Coriolis, quien fue el primero en determinarlo. Este término representa la diferencia de la aceleración de B medida desde ejes x, y, z no rotatorios y rotatorios. Como se indica mediante el producto vectorial, la aceleración de Coriolis *siempre* será perpendicular tanto a $\boldsymbol{\Omega}$ como a $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$. Es una componente importante de la aceleración, la cual debe considerarse siempre que se utilizan marcos de referencia rotatorios. Esto ocurre con frecuencia, por ejemplo, cuando se estudian las aceleraciones y fuerzas que actúan en cohetes, proyectiles de largo alcance, u otros cuerpos que tienen movimientos cuyas mediciones se ven significativamente afectadas por la rotación de la Tierra.

La siguiente interpretación de los términos de la ecuación 16-29 puede ser útil cuando se aplica esta ecuación a la solución de problemas.

16

$\mathbf{a}_B$ — aceleración absoluta de B — movimiento de B observado desde el marco de referencia X, Y, Z

(es igual a)

$\mathbf{a}_A$ — aceleración absoluta del origen del marco x, y, z

(más)

$\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A}$ — el efecto de la aceleración angular provocado por la rotación del marco de referencia x, y, z

(más)

$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$ — el efecto de la velocidad angular provocado por la rotación del marco de referencia x, y, z

movimiento del marco de referencia x, y, z observado desde el marco de referencia X, Y, Z

(más)

$2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ — el efecto combinado de B al moverse con respecto a las coordenadas x, y, z y a la rotación del marco de referencia x, y, z — movimiento interactuante

(más)

$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$ — la aceleración de B con respecto a A — movimiento de B observado desde el marco de referencia x, y, z

Procedimiento para el análisis

Las ecuaciones 16-26 y 16-29 pueden aplicarse a la solución de problemas que implican el movimiento plano de partículas o cuerpos rígidos por el siguiente procedimiento.

Ejes de coordenadas

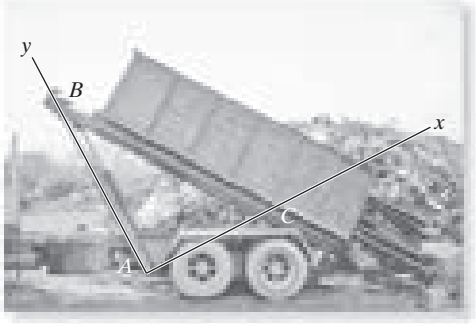
- Seleccione un lugar adecuado para el origen y la orientación adecuada de los ejes, para los marcos de referencia tanto fijos X, Y, Z como móviles x, y, z.
- Con mucha frecuencia las soluciones son fáciles de obtener, si en el instante considerado:
  1. los orígenes coinciden
  2. los ejes correspondientes son colineales
  3. los ejes correspondientes son paralelos
- El marco móvil debe seleccionarse fijo en el cuerpo o dispositivo a lo largo del cual ocurre el movimiento relativo.

Ecuaciones cinemáticas

- Después de definir el origen A de la referencia móvil y de especificar el punto B en movimiento, las ecuaciones 16-26 y 16-29 deben escribirse en forma simbólica como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

- Las componentes cartesianas de todos estos vectores pueden expresarse a lo largo de los ejes X, Y, Z o los ejes x, y, z. La selección es arbitraria siempre que se utilice un conjunto consistente de vectores unitarios.
- El movimiento de la referencia móvil se expresa por $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{a}_A$, $\boldsymbol{\Omega}$ y $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$; al movimiento de B con respecto a la referencia móvil lo expresa $\mathbf{r}_{B/A}$, $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$.



La rotación de la caja de volteo del camión alrededor del punto C funciona por la extensión del cilindro hidráulico AB. Para determinar la rotación de la caja producida por esta extensión, podemos utilizar las ecuaciones de movimiento relativo y determinar los ejes x, y en el cilindro, para que el movimiento relativo de la extensión del cilindro ocurra a lo largo del eje y. (© R. C. Hibbeler)

EJEMPLO 16.18

En el instante $\theta = 60°$, la varilla de la figura 16-33 tiene una velocidad angular de 3 rad/s y una aceleración angular de 2 rad/s^2. En este mismo instante, el collarín se desplaza hacia fuera a lo largo de la varilla, de modo que cuando $x = 0.2$ m la velocidad es de 2 m/s y la aceleración de 3 m/s^2, medidas ambas con respecto a la varilla. Determine la aceleración de Coriolis y la velocidad y aceleración del collarín en este instante.

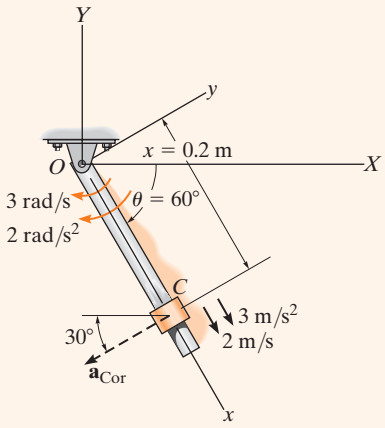


Fig. 16-33

SOLUCIÓN

Ejes de coordenadas. El origen de los dos sistemas de coordenadas se encuentra en el punto O (fig. 16-33). Como el movimiento del collarín se reporta con respecto a la varilla, el marco de referencia x, y, z móvil se *fija* a ésta.

Ecuaciones cinemáticas

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O} + (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} \tag{1}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/O} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/O})_{xyz} \tag{2}$$

Será más sencillo expresar los datos en función de vectores de componentes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ que de componentes $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$. Por lo tanto,

Movimiento de la referencia móvil	Movimiento de C con respecto a la referencia móvil
$\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$	$\mathbf{r}_{C/O} = \{0.2\mathbf{i}\}$ m
$\mathbf{a}_O = \mathbf{0}$	$(\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} = \{2\mathbf{i}\}$ m/s
$\boldsymbol{\Omega} = \{-3\mathbf{k}\}$ rad/s	$(\mathbf{a}_{C/O})_{xyz} = \{3\mathbf{i}\}$ m/s^2
$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \{-2\mathbf{k}\}$ rad/s^2	

La aceleración de Coriolis se define como

$$\mathbf{a}_{\text{Cor}} = 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} = 2(-3\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i}) = \{-12\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Éste es el vector de rayas que aparece en la figura 16-33. Si se desea, puede dividirse en componentes $\mathbf{I}, \mathbf{J}$ que actúan a lo largo de los ejes X y Y, respectivamente.

La velocidad y aceleración del collarín se determinan mediante la sustitución de los datos en las ecuaciones 1 y 2 y la evaluación de los productos vectoriales, de lo cual resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O} + (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} \\ &= \mathbf{0} + (-3\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i}) + 2\mathbf{i} \\ &= \{2\mathbf{i} - 0.6\mathbf{j}\} \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/O} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/O})_{xyz} \\ &= \mathbf{0} + (-2\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i}) + (-3\mathbf{k}) \times [(-3\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i})] + 2(-3\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i}) + 3\mathbf{i} \\ &= \mathbf{0} - 0.4\mathbf{j} - 1.80\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3\mathbf{i} \\ &= \{1.20\mathbf{i} - 12.4\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}\end{aligned}$$

16

EJEMPLO 16.19

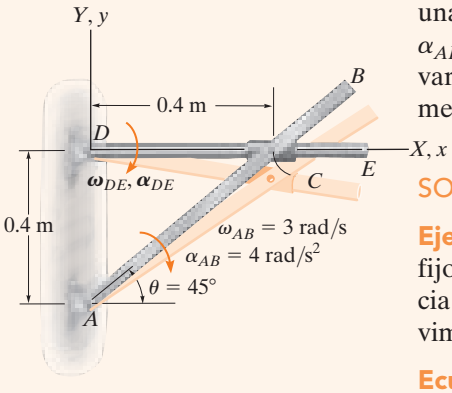


Fig. 16-34

La varilla AB mostrada en la figura 16-34, gira en sentido horario con una velocidad angular $\omega_{AB} = 3$ rad/s y una aceleración angular $\alpha_{AB} = 4$ rad/s^2 cuando $\theta = 45°$. Determine el movimiento angular de la varilla DE en este instante. El collarín en C está conectado a AB y por medio de un pasador se desliza sobre la varilla DE.

SOLUCIÓN

Ejes de coordenadas. El origen tanto de los marcos de referencia fijos como móviles se encuentra en D (fig. 16-34). Además, la referencia x, y, z está fija en la varilla DE y gira con ésta, de modo que el movimiento relativo del collarín es fácil de seguir.

Ecuaciones cinemáticas

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D} + (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} \tag{1}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/D} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/D})_{xyz}$$

Todos los vectores se expresarán en función de componentes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Movimiento de la referencia móvil	Movimiento de C con respecto a la referencia móvil
$\mathbf{v}_D = \mathbf{0}$	$\mathbf{r}_{C/D} = \{0.4\mathbf{i}\}$ m
$\mathbf{a}_D = \mathbf{0}$	$(\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} = (v_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$
$\boldsymbol{\Omega} = -\omega_{DE}\mathbf{k}$	$(\mathbf{a}_{C/D})_{xyz} = (a_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$
$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = -\alpha_{DE}\mathbf{k}$	

Movimiento de C: como el collarín se mueve a lo largo de una *trayectoria circular* de radio AC, su velocidad y aceleración se determinan con las ecuaciones 16-9 y 16-14.

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{C/A} = (-3\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}) = \{1.2\mathbf{i} - 1.2\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$

$$\mathbf{a}_C = \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_{C/A} - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_{C/A}$$
$$= (-4\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}) - (3)^2(0.4\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}) = \{-2\mathbf{i} - 5.2\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$$

Al sustituir los datos en las ecuaciones 1 y 2, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D} + (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} \\ 1.2\mathbf{i} - 1.2\mathbf{j} &= \mathbf{0} + (-\omega_{DE}\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i}) + (v_{C/D})_{xyz}\mathbf{i} \\ 1.2\mathbf{i} - 1.2\mathbf{j} &= \mathbf{0} - 0.4\omega_{DE}\mathbf{j} + (v_{C/D})_{xyz}\mathbf{i} \\ (v_{C/D})_{xyz} &= 1.2 \text{ m/s} \\ \omega_{DE} &= 3 \text{ rad/s} \circlearrowright \end{aligned}$$ *Resp.*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_D + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/D} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/D})_{xyz} \\ -2\mathbf{i} - 5.2\mathbf{j} &= \mathbf{0} + (-\alpha_{DE}\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i}) + (-3\mathbf{k}) \times [(-3\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i})] \\ &\quad + 2(-3\mathbf{k}) \times (1.2\mathbf{i}) + (a_{C/D})_{xyz}\mathbf{i} \\ -2\mathbf{i} - 5.2\mathbf{j} &= -0.4\alpha_{DE}\mathbf{j} - 3.6\mathbf{i} - 7.2\mathbf{j} + (a_{C/D})_{xyz}\mathbf{i} \\ (a_{C/D})_{xyz} &= 1.6 \text{ m/s}^2 \\ \alpha_{DE} &= -5 \text{ rad/s}^2 = 5 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \end{aligned}$$ *Resp.*

EJEMPLO 16.20

Los aviones A y B vuelan a la misma altura y con los movimientos que se muestran en la figura 16-35. Determine la velocidad y la aceleración de A medidas por el piloto de B.

SOLUCIÓN

Ejes de coordenadas. Como se busca el movimiento relativo de A con respecto al piloto de B, los ejes x, y, z se fijan al avión B (fig. 16-35). En el *instante* considerado, el origen B coincide con el origen del marco fijo X, Y, Z.

Ecuaciones cinemáticas

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} \tag{1}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{A\,B})_{xyz} \tag{2}$$

Movimiento de la referencia móvil:

$$\mathbf{v}_B = \{600\mathbf{j}\}\ \text{km/h}$$

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(600)^2}{400} = 900\ \text{km/h}^2$$

$$\mathbf{a}_B = (\mathbf{a}_B)_n + (\mathbf{a}_B)_t = \{900\mathbf{i} - 100\mathbf{j}\}\ \text{km/h}^2$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{v_B}{\rho} = \frac{600\ \text{km/h}}{400\ \text{km}} = 1.5\ \text{rad/h}\ \circlearrowright \qquad \boldsymbol{\Omega} = \{-1.5\mathbf{k}\}\ \text{rad/h}$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{(a_B)_t}{\rho} = \frac{100\ \text{km/h}^2}{400\ \text{km}} = 0.25\ \text{rad/h}^2\ \circlearrowleft \qquad \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \{0.25\mathbf{k}\}\ \text{rad/h}^2$$

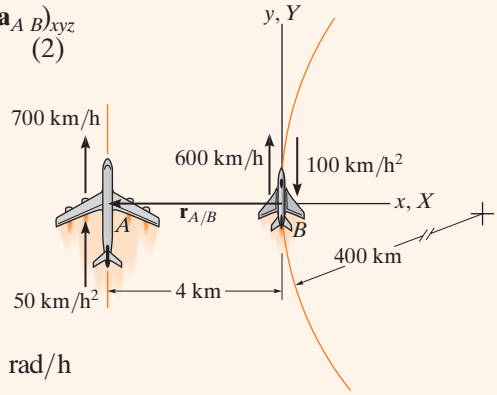


Fig. 16-35

Movimiento de A con respecto a la referencia móvil:

$$\mathbf{r}_{A/B} = \{-4\mathbf{i}\}\ \text{km} \quad (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} = ? \quad (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} = ?$$

Al sustituir los datos en las ecuaciones 1 y 2, y como $\mathbf{v}_A = \{700\mathbf{j}\}$ km/h y $\mathbf{a}_A = \{50\mathbf{j}\}$ km/h^2, tenemos

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz}$$

$$700\mathbf{j} = 600\mathbf{j} + (-1.5\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i}) + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz}$$

$$(\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} = \{94\mathbf{j}\}\ \text{km/h} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz}$$

$$50\mathbf{j} = (900\mathbf{i} - 100\mathbf{j}) + (0.25\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i}) + (-1.5\mathbf{k}) \times [(-1.5\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i})] + 2(-1.5\mathbf{k}) \times (94\mathbf{j}) + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz}$$

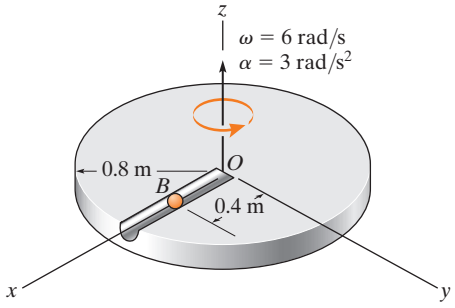
$$(\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} = \{-1191\mathbf{i} + 151\mathbf{j}\}\ \text{km/h}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: La solución de este problema deberá compararse con la del ejemplo 12.26, donde se observa que $(v_{B/A})_{xyz} \neq (v_{A/B})_{xyz}$ y $(a_{B/A})_{xyz} \neq (a_{A/B})_{xyz}$.

16

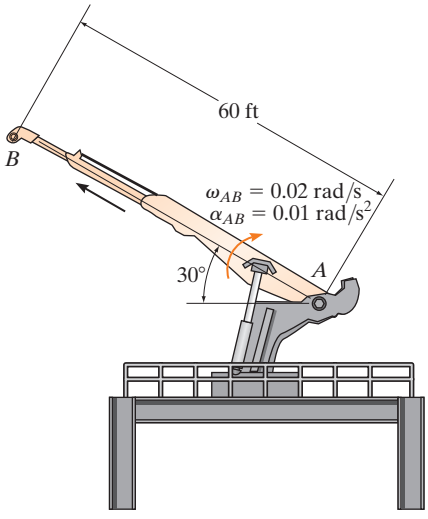
PROBLEMAS

16-129. En el instante que se muestra, la bola B rueda a lo largo de la ranura en el disco con una velocidad de 600 mm/s y una aceleración de 150 mm/s^2, ambas medidas con respecto al disco y al alejarse de O. Si en el mismo instante el disco tiene la velocidad y aceleración angulares que se indican, determine la velocidad y aceleración de la bola en este instante.



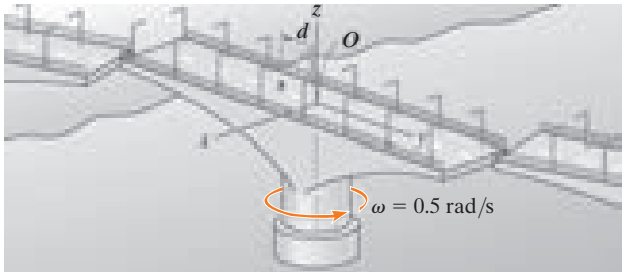
Prob. 16-129

16-130. La pluma telescópica de la grúa gira con la velocidad y la aceleración angulares mostradas. En el mismo instante, la pluma se extiende a una rapidez constante de 0.5 ft/s, medidos en relación con la pluma. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto B en este instante.



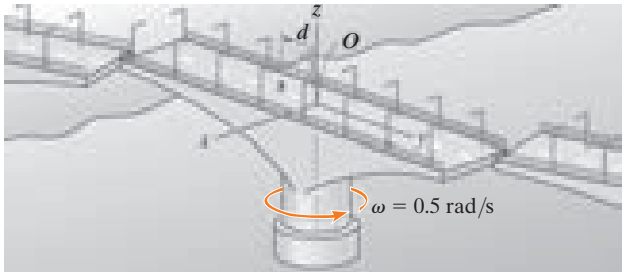
Prob. 16-130

16-131. Mientras el puente giratorio se está cerrando con una rotación constante de 0.5 rad/s, un hombre corre a lo largo del camino a una velocidad constante de 5 ft/s con respecto al camino. Determine su velocidad y aceleración en el instante $d = 15$ ft.



Prob. 16-131

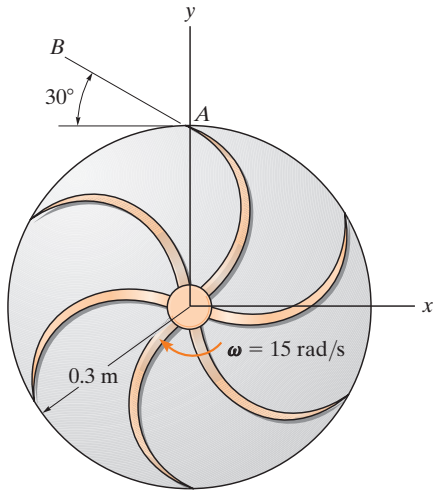
***16-132.** Mientras el puente giratorio se está cerrando con una rotación constante de 0.5 rad/s, un hombre corre a lo largo del camino, de modo que cuando $d = 10$ ft corre del centro hacia afuera a 5 ft/s con una aceleración de 2 ft/s^2, ambas medidas con respecto al camino. Determine su velocidad y aceleración en este instante.



Prob. 16-132

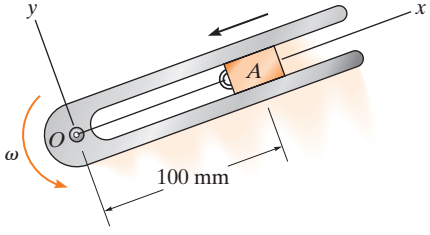
16

16-133. El agua sale del impulsor de la bomba centrífuga con una velocidad de 25 m/s y una aceleración de 30 m/s^2, ambas medidas con respecto al impulsor a lo largo de la línea del aspa AB. Determine la velocidad y la aceleración de una partícula de agua en A, cuando sale del impulsor en el instante que se muestra. El impulsor gira a una velocidad angular constante de $\omega = 15$ rad/s.



Prob. 16-133

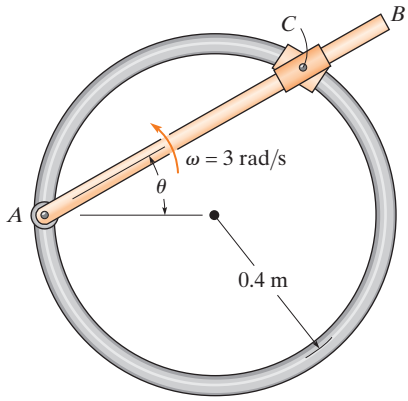
16-134. El bloque A, que está unido a una cuerda, se mueve a lo largo de la ranura de una varilla en forma de horquilla horizontal. En el instante indicado, la cuerda se jala hacia abajo a través del orificio en O con una aceleración de 4 m/s^2 y su velocidad es de 2 m/s. Determine la aceleración del bloque en este instante. La varilla gira alrededor de O con una velocidad angular constante $\omega = 4$ rad/s.



Prob. 16-134

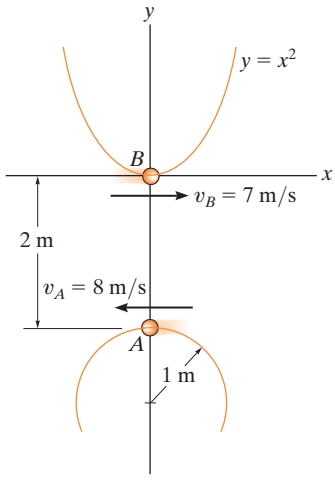
16-135. La varilla AB gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante $\omega = 3$ rad/s. Determine la velocidad del punto C localizado sobre el collarín doble cuando $\theta = 30°$. El collarín se compone de dos bloques deslizantes conectados por pasadores, que están restringidos a moverse a lo largo de la trayectoria circular y de la varilla AB.

***16-136.** La varilla AB gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante $\omega = 3$ rad/s. Determine la velocidad y la aceleración del punto C situado en el collarín doble cuando $\theta = 45°$. El collarín se compone de dos bloques deslizantes conectados por pasadores, que están restringidos a moverse a lo largo de la trayectoria circular y de la varilla AB.



Probs. 16-135/136

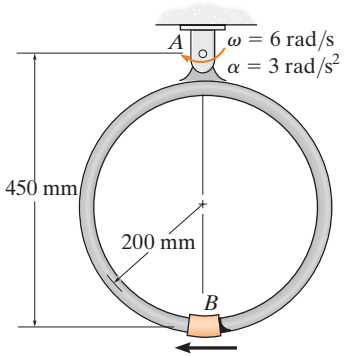
16-137. Las partículas B y A se mueven a lo largo de las trayectorias parabólica y circular, respectivamente. Si B tiene una velocidad de 7 m/s en la dirección mostrada y su rapidez está aumentando a 4 m/s^2, mientras que A tiene una velocidad de 8 m/s en la dirección mostrada y su rapidez está disminuyendo a 6 m/s^2, determine la velocidad relativa y la aceleración relativa de B con respecto a A.



Prob. 16-137

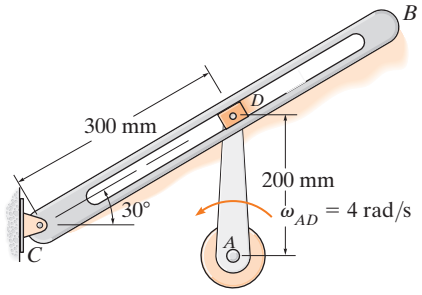
16

16-138. El collarín B se mueve hacia la izquierda con una velocidad de 5 m/s, que está aumentando a una velocidad constante de 1.5 m/s^2, en relación con el aro, mientras éste gira con la velocidad angular y la aceleración angular mostradas. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del collarín en este instante.



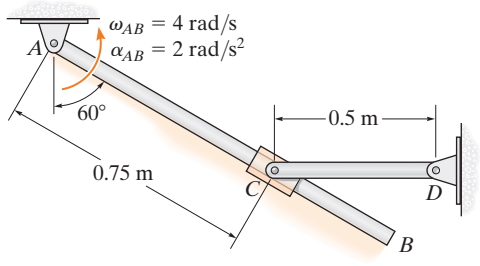
Prob. 16-138

16-139. El bloque D del mecanismo está limitado a moverse dentro de la ranura del elemento CB. Si el eslabón AD gira a una velocidad constante de $\omega_{AD} = 4$ rad/s, determine la velocidad angular y la aceleración angular del elemento CB en el instante mostrado.



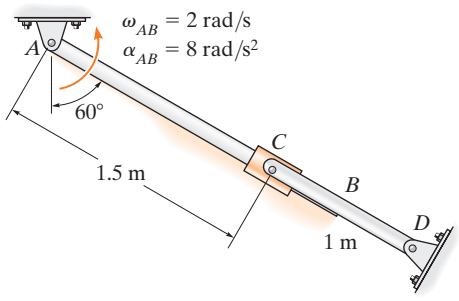
Prob. 16-139

***16-140.** En el instante mostrado, la varilla AB tiene una velocidad angular $\omega_{AB} = 4$ rad/s y una aceleración angular $\alpha_{AB} = 2$ rad/s^2. Determine la velocidad y la aceleración angulares de la varilla CD en este instante. El collarín en C está conectado mediante un pasador a CD y se desliza libremente a lo largo de AB.



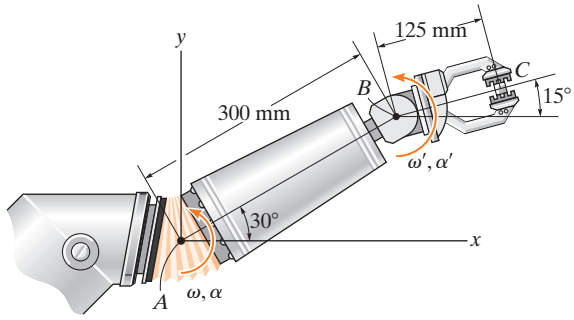
Prob. 16-140

16-141. El collarín C está articulado a la varilla CD mientras se desliza sobre la varilla AB. Si la varilla AB tiene una velocidad angular de 2 rad/s y una aceleración angular de 8 rad/s^2, ambas en sentido antihorario, determine la velocidad y la aceleración angulares de la varilla CD en el instante mostrado.



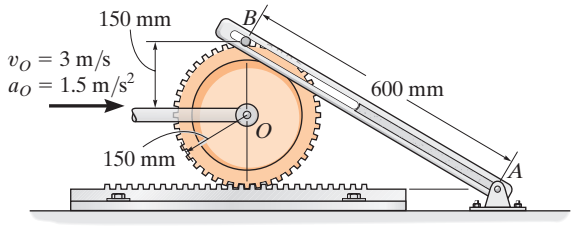
Prob. 16-141

16-142. En el instante mostrado, el brazo robótico AB gira en sentido antihorario a $\omega = 5$ rad/s, y tiene una aceleración angular $\alpha = 2$ rad/s^2. Simultáneamente, la tenaza BC gira en sentido antihorario a $\omega' = 6$ rad/s y $\alpha' = 2$ rad/s^2, ambas medidas con respecto a una referencia *fija*. Determine la velocidad y la aceleración del objeto que sostiene la tenaza en C.



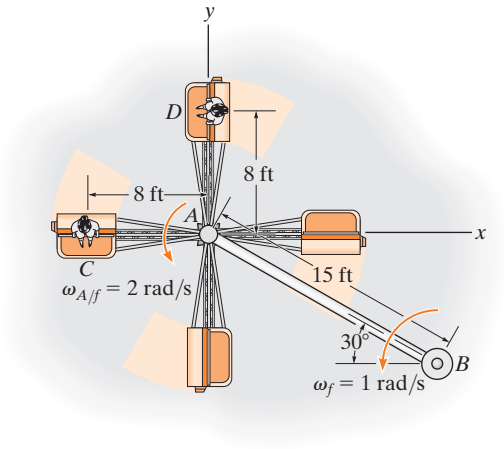
Prob. 16-142

16-143. La clavija B sobre el engrane se desliza libremente a lo largo de la ranura del eslabón AB. Si el centro del engrane O se mueve con la velocidad y la aceleración mostradas, determine la velocidad y la aceleración angulares del eslabón en este instante.



Prob. 16-143

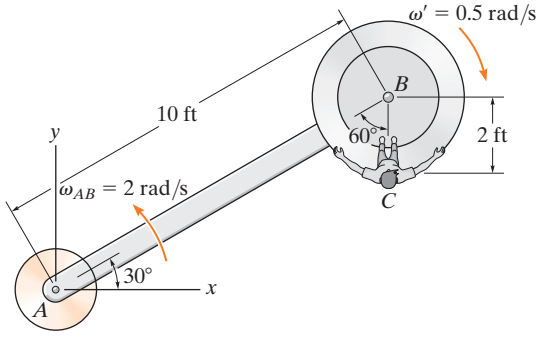
***16-144.** Los carros de un juego mecánico de un parque de diversiones giran alrededor del eje en A, con una velocidad angular constante $\omega_{A/f} = 2$ rad/s, medida en relación con el bastidor AB. Al mismo tiempo, el bastidor gira alrededor del soporte del eje principal en B con una velocidad angular constante $\omega_f = 1$ rad/s. Determine la velocidad y la aceleración del pasajero en C en el instante mostrado.



Prob. 16-144

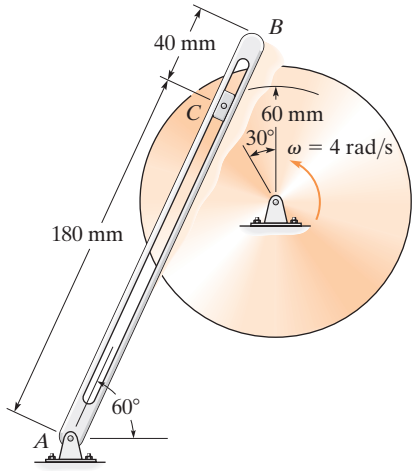
16-145. Un juego mecánico de un parque de diversiones se compone de un brazo rotatorio AB que gira a una velocidad angular constante de $\omega_{AB} = 2$ rad/s, alrededor del punto A y un carro montado en el extremo del brazo, el cual tiene una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}' = \{-0.5\mathbf{k}\}$ rad/s, medida con respecto al brazo. En el instante que se muestra, determine la velocidad y aceleración del pasajero en C.

16-146. Un juego mecánico de un parque de diversiones se compone de un brazo rotatorio AB que gira a una aceleración angular constante de $\alpha_{AB} = 1$ rad/s^2 cuando $\omega_{AB} = 2$ rad/s en el instante que se muestra. Asimismo, en este instante el carro montado en el extremo del brazo tiene una aceleración angular constante de $\boldsymbol{\alpha} = \{-0.6\mathbf{k}\}$ rad/s^2 y una velocidad angular de $\boldsymbol{\omega}' = \{-0.5\mathbf{k}\}$ rad/s, medidas con respecto al brazo. Determine la velocidad y aceleración del pasajero C en este instante.



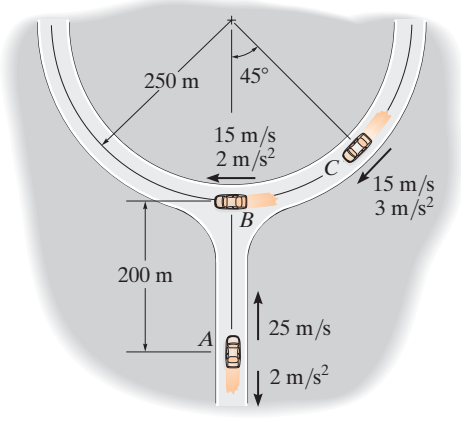
Probs. 16-145/146

16-147. Si el bloque deslizante C se fija en el disco, que tiene una velocidad angular constante en sentido antihorario de 4 rad/s, determine la velocidad y la aceleración angulares del brazo ranurado AB en el instante mostrado.



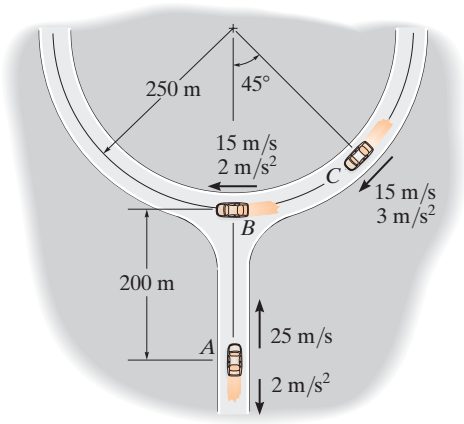
Prob. 16-147

***16-148.** En el instante mostrado, el automóvil A se desplaza con una rapidez de 25 m/s, la cual disminuye a razón constante de 2 m/s^2, mientras que el automóvil C se desplaza con una velocidad de 15 m/s, la cual aumenta a razón constante de 3 m/s. Determine la velocidad y la aceleración del auto A con respecto al auto C.



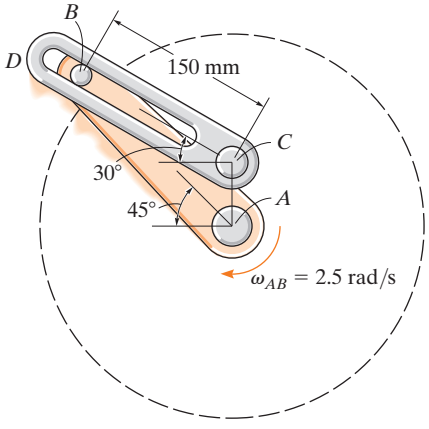
Prob. 16-148

16-149. En el instante indicado, el automóvil B se desplaza con una rapidez de 15 m/s, la cual aumenta a razón constante de 2 m/s^2, mientras que el automóvil C se desplaza con una rapidez de 15 m/s, la cual aumenta a razón constante de 3 m/s^2. Determine la velocidad y la aceleración del auto B con respecto al auto C.



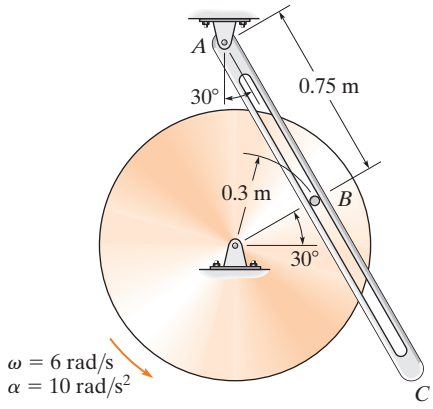
Prob. 16-149

16-150. El mecanismo de dos eslabones sirve para amplificar el movimiento angular. El eslabón AB tiene un pasador en B que está limitado a moverse dentro de la ranura del eslabón CD. Si en el instante mostrado, AB (entrada) tiene una velocidad angular de $\omega_{AB} = 2.5$ rad/s, determine la velocidad angular de CD (salida) en este instante.



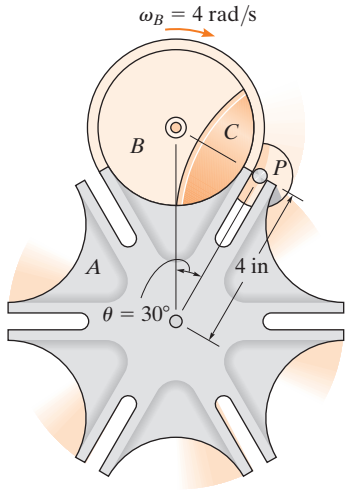
Prob. 16-150

16-151. El disco gira con el movimiento angular mostrado. Determine la velocidad y la aceleración angulares del eslabón ranurado AC en este instante. La clavija en B está fija al disco.



Prob. 16-151

***16-152.** El mecanismo Ginebra se utiliza en un sistema empacador para convertir el movimiento angular constante en movimiento angular intermitente. La rueda de estrella A realiza un sexto de revolución por cada revolución completa de la rueda propulsora B y la guía anexa C. Para hacer esto, el pasador P, el cual está fijo en B, se desliza hacia dentro de una de las ranuras radiales de A, por lo que la rueda A gira y luego sale de la ranura. Si B tiene una velocidad angular constante de $\omega_B = 4$ rad/s, determine $\boldsymbol{\omega}_A$ y $\boldsymbol{\alpha}_A$ de la rueda A en el instante que se muestra.



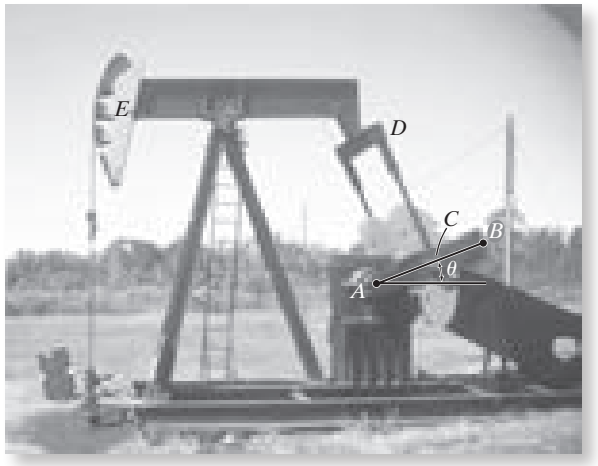
Prob. 16-152

PROBLEMAS CONCEPTUALES

C16-1. Un motor eléctrico hace girar la llanta A a una velocidad angular constante y la fricción origina que la rueda gire sin deslizarse sobre el borde interno de la rueda de la fortuna. Con los valores numéricos apropiados, determine la magnitud de la velocidad y la aceleración de los pasajeros en una de las canastas. ¿Los pasajeros en las demás canastas experimentan este mismo movimiento? Explique su respuesta.

Prob. C16-1 (© R. C. Hibbeler)

C16-2. La manivela AB gira en sentido antihorario a una velocidad constante $\boldsymbol{\omega}$ que hace que se muevan el brazo de conexión CD y el balancín DE. Trace un bosquejo que muestre la ubicación del CI del brazo de conexión cuando $\theta = 0°, 90°, 180°$ y $270°$. Además, ¿cómo se determinó la curvatura de la cabeza E y por qué se curva de esta manera?



Prob. C16-2 (© R. C. Hibbeler)

C16-3. La puerta plegadiza del hangar se abre por medio de cables que se mueven hacia arriba a una rapidez constante de 0.5 m/s. Determine la velocidad angular de BC y la velocidad angular de AB cuando $\theta = 45°$. El panel BC está articulado en C y tiene una altura que es igual a la de BA. Use valores numéricos adecuados para explicar su resultado.

Prob. C16-3 (© R. C. Hibbeler)

C16-4. Si los neumáticos no patinan en el pavimento, determine los puntos en el neumático que tienen una rapidez máxima y mínima, así como los puntos que tienen una aceleración máxima y mínima. Use valores numéricos adecuados para la rapidez del automóvil y el tamaño de las llantas para explicar su resultado.

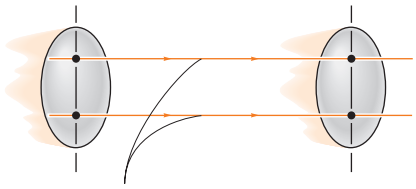
Prob. C16-4 (© R. C. Hibbeler)

16

REPASO DEL CAPÍTULO

Movimiento plano de un cuerpo rígido

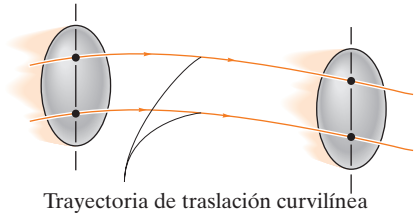
Un cuerpo rígido experimenta tres tipos de movimiento plano: traslación, rotación alrededor de un eje fijo y movimiento plano general.



Trayectoria de traslación rectilínea

Traslación

Cuando un cuerpo se traslada en línea recta, todas sus partículas viajan a lo largo de trayectorias paralelas en línea recta. Si las trayectorias tienen el mismo radio de curvatura, entonces la traslación es curvilínea. Siempre que conozcamos el movimiento de una de las partículas, entonces también conoceremos el movimiento de todas las demás.



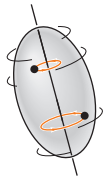
Trayectoria de traslación curvilínea

Rotación alrededor de un eje fijo

En este tipo de movimiento, todas las partículas se mueven a lo largo de trayectorias circulares. Aquí, todos los segmentos de línea en el cuerpo experimentan un desplazamiento angular, una velocidad angular y una aceleración angular iguales.

Una vez que se conoce el movimiento angular del cuerpo, entonces puede obtenerse la velocidad de cualquier partícula situada a una distancia r del eje.

La aceleración de cualquier partícula tiene dos componentes. La componente tangencial responde al cambio de la magnitud de la velocidad; y la componente normal, al cambio de la dirección de la velocidad.



Rotación alrededor de un eje fijo

$$\omega = d\theta/dt \qquad \omega = \omega_0 + \alpha_c t$$

$$\alpha = d\omega/dt \quad \text{o bien} \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2$$

$$\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

Constante α_c

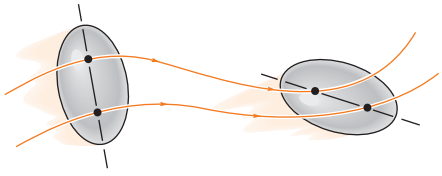
$$v = \omega r \qquad a_t = \alpha r, \quad a_n = \omega^2 r$$

Movimiento plano general

Cuando un cuerpo experimenta movimiento plano general, se traslada y gira al mismo tiempo. Se cuenta con varios tipos de métodos para analizar este movimiento.

Análisis del movimiento absoluto

Si se conocen el movimiento de un punto en el cuerpo o el movimiento angular de una línea, entonces es posible relacionar este movimiento con el de otro punto o línea usando un análisis del movimiento absoluto. Para hacerlo, se establecen coordenadas de posición lineal o angular θ (medidas con respecto a un punto o una línea fijos). Estas coordenadas de posición se relacionan entonces por medio de la geometría del cuerpo. La derivada con respecto al tiempo de esta ecuación da la relación entre las velocidades y/o las velocidades angulares. Una segunda derivada con respecto al tiempo relaciona la aceleración y/o las aceleraciones angulares.



Movimiento plano general

Movimiento relativo mediante ejes trasladantes

El movimiento plano general también puede analizarse por medio de un análisis de movimiento relativo entre dos puntos A y B localizados en el cuerpo. Este método considera el movimiento en partes: primero una traslación del punto base A seleccionado y, en seguida, una "rotación" relativa del cuerpo alrededor del punto A, el cual se mide con respecto a un eje trasladante. Como el movimiento relativo se observa como movimiento circular alrededor del punto base, el punto B tendrá una velocidad $\mathbf{v}_{B/A}$ tangente al círculo. También tiene dos componentes de aceleración, $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_n$. Además, es importante darse cuenta de que $\mathbf{a}_A$ y $\mathbf{a}_B$ tendrán componentes tangenciales y normales, si estos puntos se mueven a lo largo de trayectorias curvas.

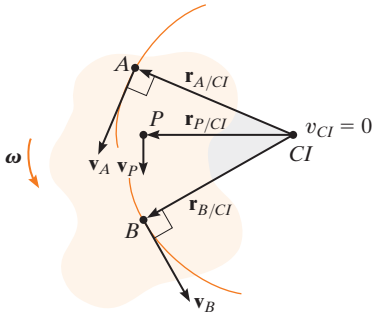
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

Centro instantáneo de velocidad cero

Si se considera que el punto base A tiene una velocidad cero, entonces la ecuación de velocidad relativa se escribe $\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$. En este caso, parece que el cuerpo girará alrededor de un eje instantáneo que pasa por A.

El centro instantáneo de rotación (CI) puede establecerse siempre que se conozcan las direcciones de las velocidades o la velocidad angular de dos puntos cualesquiera del cuerpo. Como una línea radial r siempre será perpendicular a cada velocidad, entonces el CI está en el punto de intersección de estas dos líneas radiales. Su ubicación medida se determina con la geometría del cuerpo. Una vez que se establece, entonces puede determinarse la velocidad de cualquier punto P del cuerpo con $v = \omega r$, donde r se extiende del CI al punto P.



Movimiento relativo por medio de ejes rotatorios

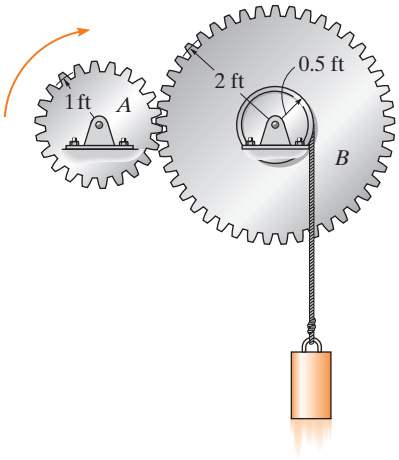
Los problemas que implican elementos conectados que se deslizan uno con respecto al otro o puntos que no están en el mismo cuerpo pueden estudiarse por medio de un análisis de movimiento relativo con respecto a un marco rotatorio. Esto da lugar al término $2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ conocido como aceleración de Coriolis.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

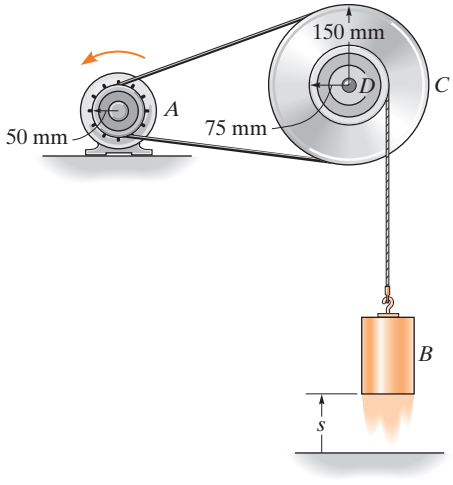
PROBLEMAS DE REPASO

R16-1. El engrane de elevación A tiene una velocidad angular inicial de 60 rad/s y una desaceleración constante de 1 rad/s^2. Determine la velocidad y la desaceleración del bloque que está siendo elevado mediante el eje del engrane B cuando $t = 3$ s.



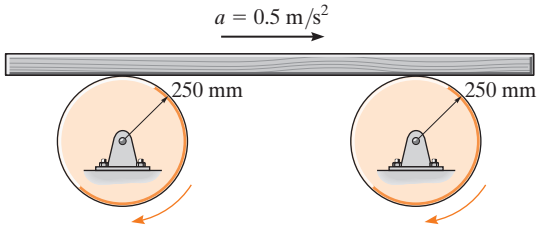
Prob. R16-1

R16-2. A partir de $(\omega_A)_0 = 3$ rad/s, cuando $\theta = 0, s = 0$, la polea A recibe una aceleración angular $\alpha = (0.6\theta)$ rad/s^2, donde θ está en radianes. Determine la velocidad del bloque B cuando se haya elevado $s = 0.5$ m. La polea tiene un eje interno D que está fijo a C y gira junto con él.



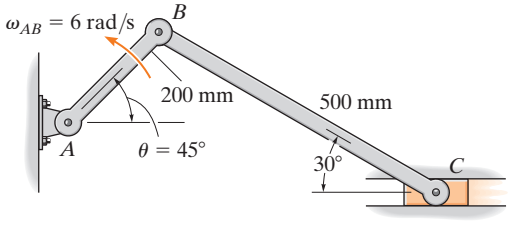
Prob. R16-2

R16-3. La tabla descansa sobre la superficie de dos tambores. En el instante mostrado, tiene una aceleración de 0.5 m/s^2 hacia la derecha, mientras que en el mismo instante, los puntos en el borde exterior de cada tambor tienen una aceleración con una magnitud de 3 m/s^2. Si la tabla no se desliza sobre los tambores, determine su velocidad debida al movimiento.



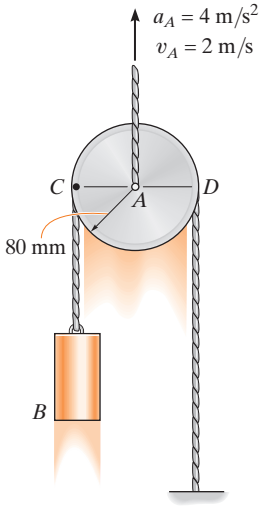
Prob. R16-3

R16-4. Si la barra AB tiene una velocidad angular $\omega_{AB} = 6$ rad/s, determine la velocidad del bloque deslizante C en el instante mostrado.



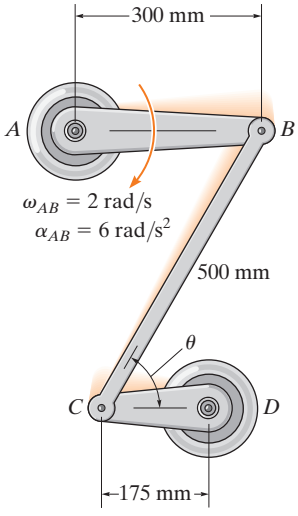
Prob. R16-4

R16-5. El centro de la polea se eleva verticalmente con una aceleración de 4 m/s^2 en el instante en que tiene una velocidad de 2 m/s. Si el cable no se desliza sobre la superficie de la polea, determine las aceleraciones del cilindro B y el punto C sobre la polea.



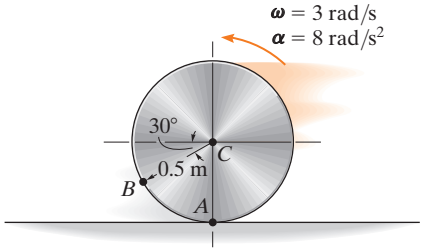
Prob. R16-5

R16-6. En el instante indicado, el eslabón AB tiene una velocidad angular $\omega_{AB} = 2$ rad/s y una aceleración angular $\alpha_{AB} = 6$ rad/s^2. Determine la aceleración del pasador en C y la aceleración angular del eslabón CB en este instante, cuando $\theta = 60°$.



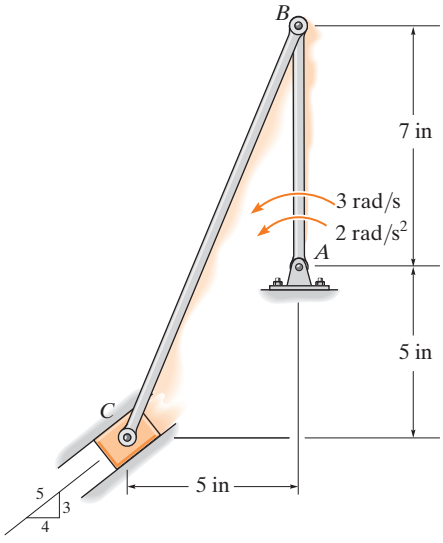
Prob. R16-6

R16-7. El disco se mueve hacia la izquierda de modo que tiene una aceleración angular $\alpha = 8$ rad/s^2 y la velocidad angular $\omega = 3$ rad/s en el instante mostrado. Si no se desliza en A, determine la aceleración del punto B.



Prob. R16-7

R16-8. En el instante dado, el elemento AB tiene los movimientos angulares mostrados. Determine la velocidad y la aceleración del bloque deslizante C en este instante.



Prob. R16-8

Capítulo 17

(© Surasaki/Fotolia)

Los tractores y otros equipos pesados pueden someterse a cargas severas debido a las cargas dinámicas que generan al acelerar. En este capítulo se mostrará la forma de determinar esas cargas para el movimiento plano.

Cinética plana de un cuerpo rígido: fuerza y aceleración

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Presentar los métodos utilizados para determinar el momento de inercia de masa de un cuerpo.
- Desarrollar las ecuaciones de movimiento de cinética plana para un cuerpo rígido simétrico.
- Analizar las aplicaciones de estas ecuaciones a cuerpos que experimentan traslación, rotación alrededor de un eje fijo y movimiento plano general.

17.1 Momento de inercia de masa

Como un cuerpo tiene tamaño y forma definidos, un sistema de fuerzas no concurrentes aplicadas puede hacer que el cuerpo se traslade y gire. Los aspectos de traslación del movimiento se estudiaron en el capítulo 13 y están regidos por la ecuación $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. En la siguiente sección se demostrará que los aspectos de rotación, provocados por un momento $\mathbf{M}$, están regidos por una ecuación de la forma $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\alpha}$. El símbolo I aquí se denomina momento de inercia de masa. Por comparación, el *momento de inercia* mide la resistencia de un cuerpo a la *aceleración angular* ($\mathbf{M} = I\boldsymbol{\alpha}$), de la misma forma que la *masa* mide la resistencia de un cuerpo a la *aceleración* ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$).

El volante del motor de este tractor genera un momento grande de inercia con respecto a su eje de rotación. Una vez que se ponga en movimiento, será difícil detenerlo, lo cual también evitará que el motor se pare y, por lo tanto, le permitirá mantener una potencia constante.

(© R. C. Hibbeler)

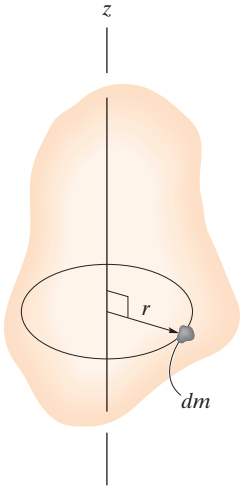


Fig. 17-1

Definimos el *momento de inercia* como la integral del "segundo momento" alrededor del eje de todos los elementos de masa dm que componen el cuerpo*. Por ejemplo, el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje z en la figura 17-1 es

$$I = \int_m r^2 \, dm \tag{17-1}$$

En este caso, el "brazo de momento" r es la distancia perpendicular del eje z al elemento arbitrario dm. Como la fórmula implica r, el valor de I es diferente con cada eje con respecto al cual se calcula. En el estudio de cinética plana, por lo general, el eje seleccionado para el análisis pasa por el centro de masa G del cuerpo y siempre es perpendicular al plano de movimiento. El momento de inercia con respecto a este eje se denotará como I_G. Como r está elevado al cuadrado en la ecuación 17-1, el momento de inercia de masa siempre es una cantidad *positiva*. Las unidades comunes para medirlo son kg × m^2 o slug × ft^2.

Si el cuerpo se compone de material de densidad variable, $\rho = \rho(x, y, z)$, la masa elemental dm del cuerpo se expresa en función de su densidad y volumen como $dm = \rho dV$. Si se sustituye dm en la ecuación 17-1, entonces se calcula el momento de inercia del cuerpo con *elementos de volumen* en la integración, es decir,

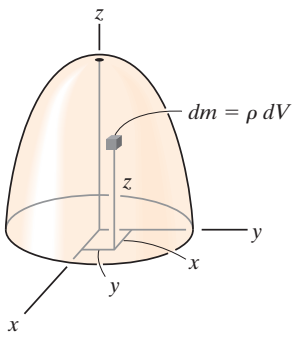
$$I = \int_V r^2 \rho \, dV \tag{17-2}$$

*Otra propiedad del cuerpo que mide la simetría de su masa, con respecto a un sistema de coordenadas, es el producto de inercia. Esta propiedad se aplica para el movimiento tridimensional de un cuerpo y se analizará en el capítulo 21.

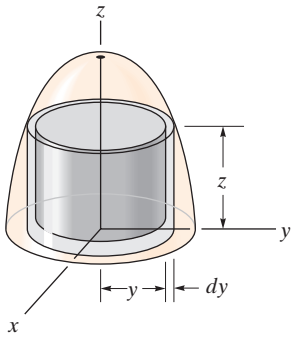
En el caso especial en que r sea una *constante*, este término se saca de la integral y la integración es entonces puramente una función de geometría.

$$I = \rho \int_V r^2 \, dV \tag{17-3}$$

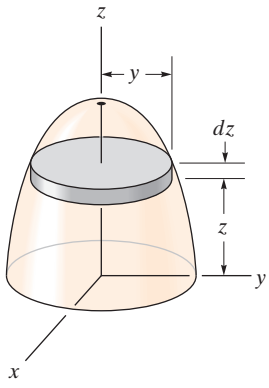
Cuando el elemento de volumen seleccionado para la integración tiene dimensiones infinitesimales en las tres direcciones (fig. 17-2*a*), el momento de inercia del cuerpo se determina mediante una "integración triple". Sin embargo, el proceso de integración puede simplificarse a una *integración simple*, siempre que el elemento de volumen seleccionado tenga un tamaño o espesor diferencial en sólo *una dirección*. Para tal propósito, a menudo se utilizan elementos en forma de casquillo o de disco.



(a)



(b)



(c)

Fig. 17-2

Procedimiento para el análisis

Para obtener el momento de inercia por integración, consideraremos únicamente cuerpos simétricos de volúmenes generados al hacer girar una curva alrededor de un eje. Un ejemplo de un cuerpo como ese aparece en la figura 17-2*a*. Pueden elegirse dos tipos de elementos diferenciales.

Elemento en forma de casquillo

- Si para la integración se elige un *elemento en forma de casquillo* de altura z, radio $r =$ y espesor dy (fig. 17-2b), entonces el volumen es $dV = (2\pi y)(z)dy$.

- Este elemento puede utilizarse en la ecuación 17-2 o 17-3 para determinar el momento de inercia I_z del cuerpo con respecto al eje z, ya que debido su "espesor" *todo el elemento* queda a la *misma* distancia perpendicular $r = y$ del eje z (vea el ejemplo 17.1).

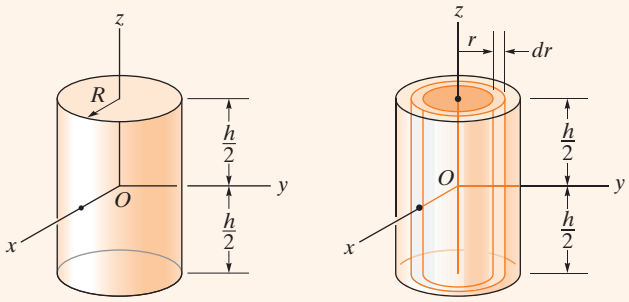
Elemento en forma de disco

- Si para la integración se selecciona un elemento en forma de disco de radio y y espesor dz (fig. 17-2*c*), entonces el volumen es $dV = (\pi y^2)dz$.

- Este elemento es *finito* en la dirección radial y, por consiguiente, *no* todas su partes quedan a la *misma distancia radial r* del eje z. En consecuencia, *no puede* utilizarse la ecuación 17-2 o 17-3 para determinar I_Z directamente. En su lugar, para realizar la integración primero es necesario determinar el momento de inercia *del elemento* con respecto al eje z y, luego, integrar este resultado (vea el ejemplo 17.2).

EJEMPLO 17.1

Determine el momento de inercia del cilindro que se muestra en la figura 17-3*a* con respecto al eje z. La densidad del material, ρ, es constante.



(a) (b)

Fig. 17-3

SOLUCIÓN

Elemento en forma de casquillo. Este problema se resuelve con el *elemento en forma de casquillo* de la figura 17-3*b* y una integración simple. El volumen del elemento es $dV = (2\pi r)(h)dr$, de modo que su masa es $dm = \rho dV = r(2\pi hr\, dr)$. Como *todo el elemento* queda a la misma distancia r del eje z, el momento de inercia *del elemento* es

$$dI_z = r^2 dm = \rho 2\pi h r^3\, dr$$

Al integrar a lo largo de toda la región del cilindro se obtiene

$$I_z = \int_m r^2\, dm = \rho 2\pi h \int_0^R r^3\, dr = \frac{\rho\pi}{2} R^4 h$$

La masa del cilindro es

$$m = \int_m dm = \rho 2\pi h \int_0^R r\, dr = \rho\pi h R^2$$

de modo que

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2 \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 17.2

Si la densidad del material es de 5 slug/ft^3, determine el momento de inercia del sólido que se muestra en la figura 17-4*a* con respecto al eje y.

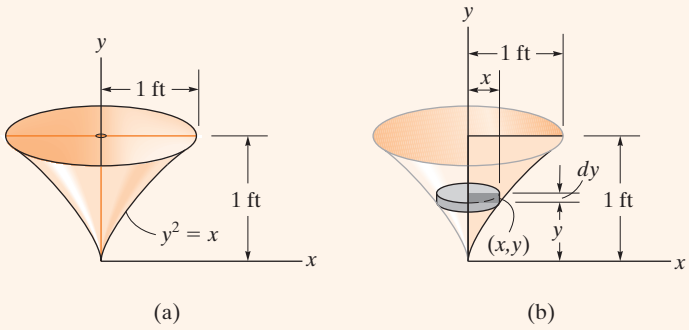


Fig. 17-4

SOLUCIÓN

Elemento en forma de disco. El momento de inercia se determinará con un *elemento en forma de disco*, como se indica en la figura 17-4*b*. En este caso, el elemento corta la curva en el punto arbitrario (x, y) y su masa es

$$dm = \rho\, dV = \rho(\pi x^2)\, dy$$

Aunque *no* todas las partes del elemento se encuentran a la misma distancia del eje y, aun así es posible determinar el momento de inercia dI_y *del elemento* con respecto al eje y. En el ejemplo anterior se demostró que el momento de inercia de un cilindro con respecto a su eje longitudinal es $I = \frac{1}{2}mR^2$, donde m y R son la masa y el radio del cilindro. Como la altura no interviene en esta fórmula, el disco puede considerarse un cilindro. Por lo tanto, para el elemento del disco de la figura 17-4*b*, tenemos

$$dI_y = \tfrac{1}{2}(dm)x^2 = \tfrac{1}{2}[\rho(\pi x^2)\, dy]x^2$$

Si sustituimos $x = y^2$, $\rho = 5$ slug/ft^3, e integramos con respecto a y, desde $y = 0$ hasta $y = 1$ ft, obtenemos el momento de inercia de todo el sólido.

$$I_y = \frac{\pi(5\ \text{slug/ft}^3)}{2}\int_0^{1\ \text{ft}} x^4\, dy = \frac{\pi(5)}{2}\int_0^{1\ \text{ft}} y^8\, dy = 0.873\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

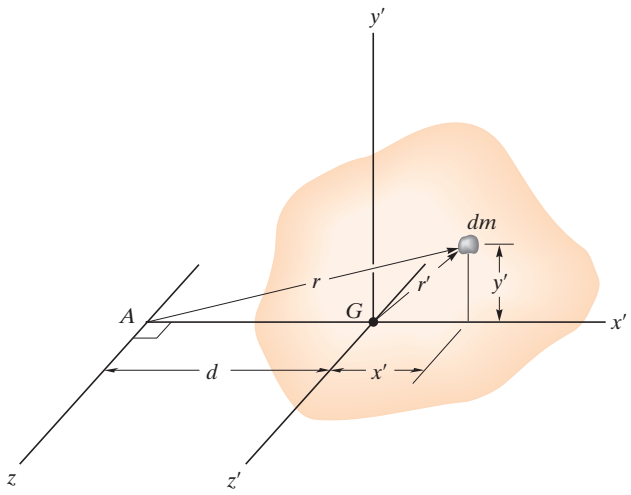


Fig. 17-5

17

Teorema de los ejes paralelos. Si se conoce el momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje que pasa por su centro de masa, entonces puede determinarse el momento de inercia con respecto a cualquier otro *eje paralelo* mediante el *teorema de los ejes paralelos*, el cual se deriva de la consideración del cuerpo que se muestra en la figura 17-5. Aquí el eje z' pasa por el centro de masa G, mientras que el *eje z paralelo* correspondiente queda a una distancia d constante. Al seleccionar el elemento de masa diferencial dm, localizado en el punto (x', y') y utilizar el teorema de Pitágoras, $r^2 = (d + x')^2 + y'^2$, expresamos el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje z como

$$I = \int_m r^2\, dm = \int_m [(d + x')^2 + y'^2]\, dm$$

$$= \int_m (x'^2 + y'^2)\, dm + 2d \int_m x'\, dm + d^2 \int_m dm$$

Dado que $r'^2 = x'^2 + y'^2$, la primera integral representa I_G. La segunda es igual a *cero*, ya que el eje z' pasa por el centro de masa del cuerpo, es decir, $\int x'\, dm = \bar{x}' m = 0$ puesto que $\bar{x}' = 0$. Por último, la tercera integral

representa la masa total m del cuerpo. Por lo tanto, el momento de inercia con respecto al eje z puede escribirse como

$$I = I_G + md^2 \tag{17-4}$$

donde

$I_G =$ momento de inercia con respecto al eje z' que pasa por el centro de masa G
$m =$ masa del cuerpo
$d =$ distancia perpendicular entre los ejes paralelos z y z'

Radio de giro. De vez en cuando, el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje especificado se reporta en manuales por medio del *radio de giro*, k, que es una propiedad geométrica con unidades de longitud. Cuando se conocen el radio de giro y la masa m del cuerpo, el momento de inercia del cuerpo se determina con la ecuación

$$I = mk^2 \quad \text{o} \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{17-5}$$

Observe la *similitud* entre la definición de k en esta fórmula y r en la ecuación $dI = r^2 dm$, que define el momento de inercia de una masa elemental dm del cuerpo con respecto a un eje.

Cuerpos compuestos. Si un cuerpo se compone de varias formas simples como discos, esferas y varillas, su momento de inercia con respecto a cualquier eje se determina con la suma algebraica de los momentos de inercia de todas las formas compuestas calculadas con respecto al eje. La suma algebraica es necesaria pues una parte compuesta debe considerarse como una cantidad negativa, si ya se contó como una pieza de otra parte —por ejemplo, de un "orificio" restado de una placa sólida. El teorema de los ejes paralelos se requiere para los cálculos si el centro de masa de cada parte compuesta no queda en el eje. Para el cálculo, entonces, $I = \Sigma(I_G + md^2)$. Aquí, el I_G de cada una de las partes compuesta se determina por integración, o por formas simples, como varillas y discos, que puede hallarse en una tabla, como la que se incluye en los forros y guardas de este libro.

EJEMPLO 17.3

Si la placa que se muestra en la figura 17-6*a* tiene una densidad de 8000 kg/m^3 y un espesor de 10 mm, determine su momento de inercia con respecto a un eje dirigido perpendicular a la página y que pasa por el punto O.

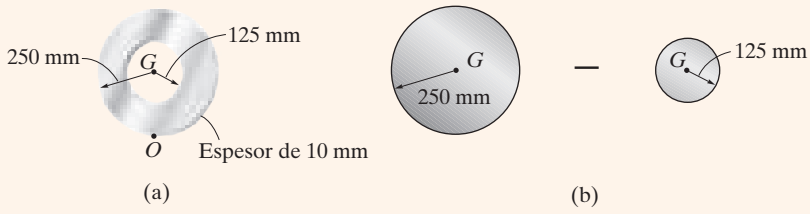


Fig. 17-6

SOLUCIÓN

La placa consta de dos partes compuestas, el disco de 250 mm de radio *menos* un disco de 125 mm de radio (fig. 17-6*b*). El momento de inercia con respecto a O se determina calculando el momento de inercia de cada una de estas partes con respecto a O y, luego, sumando *algebraicamente* los resultados. Los cálculos se realizan por el teorema de los ejes paralelos junto con los datos listados en la tabla que aparece en los forros y las guardas de este libro.

Disco. El momento de inercia de un disco con respecto al eje centroidal perpendicular al plano del disco es $I_G = \frac{1}{2}mr^2$. El centro de masa del disco se encuentra a una distancia de 0.25 m del punto O. Por lo tanto,

$$m_d = \rho_d V_d = 8000 \text{ kg/m}^3\,[\pi(0.25 \text{ m})^2(0.01 \text{ m})] = 15.71 \text{ kg}$$

$$(I_d)_O = \tfrac{1}{2}m_d r_d^2 + m_d d^2$$

$$= \frac{1}{2}(15.71 \text{ kg})(0.25 \text{ m})^2 + (15.71 \text{ kg})(0.25 \text{ m})^2$$

$$= 1.473 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Orificio. Para el disco (orificio) de 125 mm de radio, tenemos

$$m_h = \rho_h V_h = 8000 \text{ kg m}^3\,[\pi(0.125 \text{ m})^2(0.01 \text{ m})] = 3.927 \text{ kg}$$

$$(I_h)_O = \tfrac{1}{2}m_h r_h^2 + m_h d^2$$

$$= \frac{1}{2}(3.927 \text{ kg})(0.125 \text{ m})^2 + (3.927 \text{ kg})(0.25 \text{ m})^2$$

$$= 0.276 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

El momento de inercia de la placa con respecto al punto O es, por consiguiente,

$$I_O = (I_d)_O - (I_h)_O$$

$$= 1.473 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 - 0.276 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$= 1.20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 17.4

El péndulo de la figura 17-7 cuelga del perno en O y se compone de dos varillas delgadas. La varilla OA pesa 10 lb y la varilla BC pesa 8 lb. Determine el momento de inercia del péndulo con respecto a un eje que pasa por (a) el punto O y (b) el centro de masa G del péndulo.

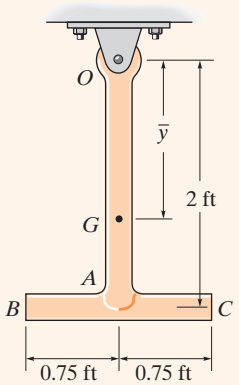


Fig. 17-7

SOLUCIÓN

Parte (a). Al usar la tabla que aparece en los forros de este libro, el momento de inercia de la varilla OA con respecto al eje perpendicular a la página que pasa por el punto O de la varilla es $I_O = \frac{1}{3}ml^2$. Por ende,

$$(I_{OA})_O = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(2\text{ ft})^2 = 0.414\text{ slug}\cdot\text{ft}^2$$

Este mismo valor se obtiene con $I_G = \frac{1}{12}ml^2$ y el teorema de los ejes paralelos,

$$(I_{OA})_O = \frac{1}{12}ml^2 + md^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(2\text{ ft})^2 + \left(\frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(1\text{ ft})^2$$
$$= 0.414\text{ slug}\cdot\text{ft}^2$$

Para la varilla BC tenemos

$$(I_{BC})_O = \frac{1}{12}ml^2 + md^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{8\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(1.5\text{ ft})^2 + \left(\frac{8\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(2\text{ ft})^2$$
$$= 1.040\text{ slug}\cdot\text{ft}^2$$

El momento de inercia del péndulo con respecto a O es, por consiguiente,

$$I_O = 0.414 + 1.040 = 1.454 = 1.45\text{ slug}\cdot\text{ft}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Parte (b). El centro de masa G se localizará con respecto al punto O. Si se supone que esta distancia es $\bar{y}$, (fig. 17-7) y se utiliza la fórmula para determinar el centro de masa, entonces

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}m}{\Sigma m} = \frac{1(10/32.2) + 2(8/32.2)}{(10/32.2) + (8/32.2)} = 1.444\text{ ft}$$

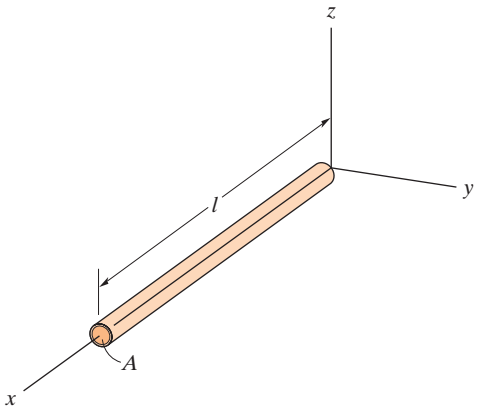
El momento de inercia I_G se determina de la misma manera que I_O, mediante aplicaciones sucesivas del teorema de los ejes paralelos para transferir los momentos de inercia de las varillas OA y BC a G. Una solución más directa, sin embargo, implica utilizar el resultado de I_O, es decir,

$$I_O = I_G + md^2; \quad 1.454\text{ slug}\cdot\text{ft}^2 = I_G + \left(\frac{18\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(1.444\text{ ft})^2$$

$$I_G = 0.288\text{ slug}\cdot\text{ft}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

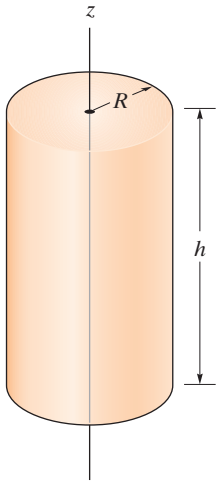
PROBLEMAS

17-1. Determine el momento de inercia I_y de la varilla delgada. Su densidad ρ y área de sección transversal A son constantes. Exprese el resultado en función de su masa total m.



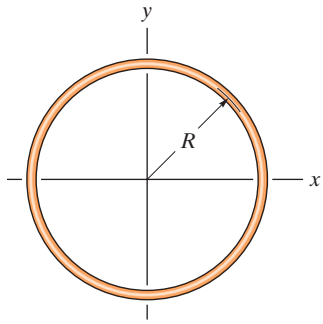
Prob. 17-1

17-2. El cilindro sólido tiene un radio exterior R, una altura h y está hecho de un material cuya densidad varía desde su centro de acuerdo con $\rho = k + ar^2$, donde k y a son constantes. Determine la masa del cilindro y su momento de inercia con respecto al eje z.



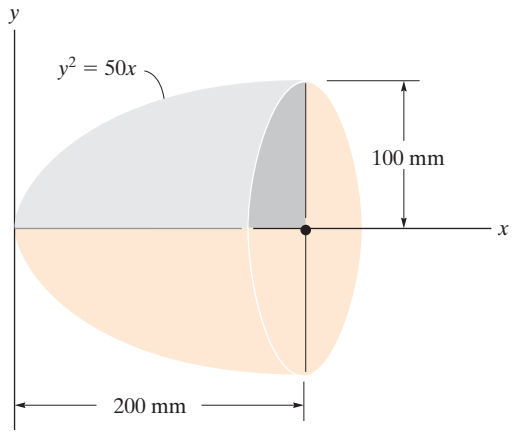
Prob. 17-2

17-3. Determine el momento de inercia del anillo delgado con respecto al eje z. El anillo tiene una masa m.



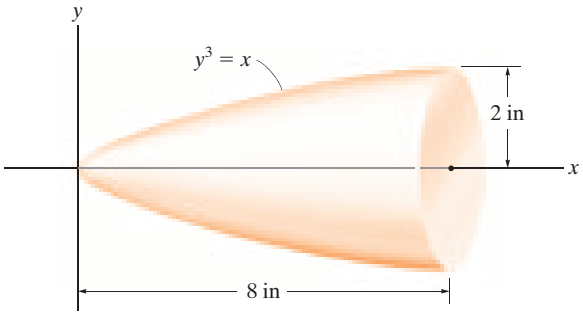
Prob. 17-3

***17-4.** El paraboloide se forma al girar el área sombreada alrededor del eje x. Determine el radio de giro k_x. La densidad del material es $\rho = 5\ \text{Mg/m}^3$.



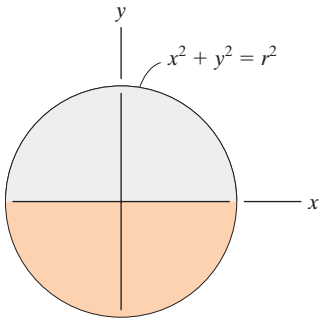
Prob. 17-4

17-5. Determine el radio de giro k_x del cuerpo. El peso específico del material es $\gamma = 380\ \text{lb/ft}^3$.



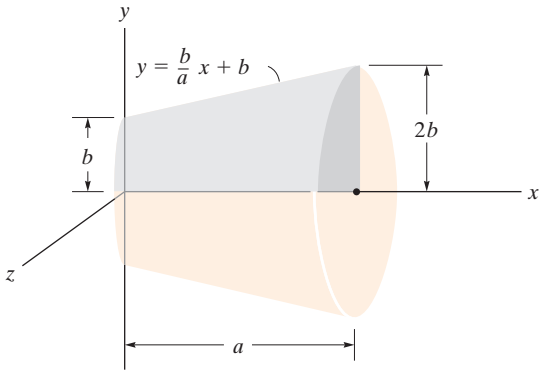
Prob. 17-5

17-6. La esfera se forma al girar el área sombreada alrededor del eje x. Determine el momento de inercia I_x y exprese el resultado en términos de la masa total m de la esfera. El material tiene una densidad constante ρ.



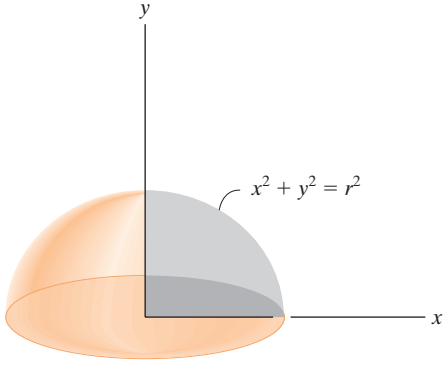
Prob. 17-6

17-7. El tronco se forma al girar el área sombreada alrededor del eje x. Determine el momento de inercia I_x y exprese el resultado en términos de la masa total m del tronco. El tronco tiene una densidad constante ρ.



Prob. 17-7

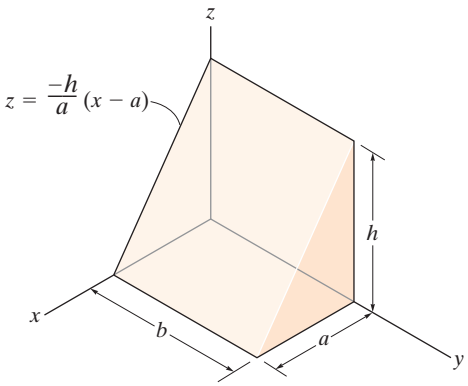
***17-8.** La semiesfera se forma al girar la zona sombreada alrededor del eje y. Determine el momento de inercia I_y y exprese el resultado en términos de la masa total m de la semiesfera. El material tiene una densidad constante ρ.



Prob. 17-8

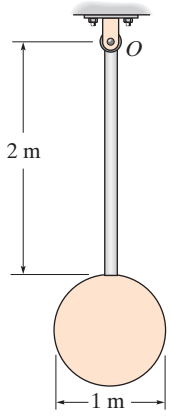
17

17-9. Determine el momento de inercia del prisma triangular homogéneo con respecto al eje y. Exprese el resultado en términos de la masa m del prisma. *Sugerencia:* Para la integración, utilice elementos de una placa delgada, paralelos al plano xy, y que tienen un espesor dz.



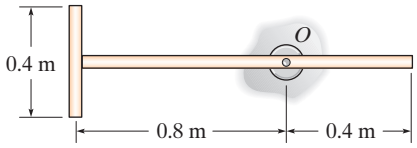
Prob. 17-9

17-10. El péndulo consiste en una placa circular de 4 kg y una varilla delgada de 2 kg. Determine el radio de giro del péndulo alrededor de un eje que es perpendicular a esta hoja y que pasa por el punto O.



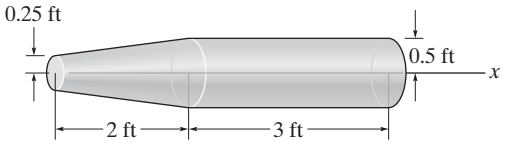
Prob. 17-10

17-11. El ensamble está hecho de las varillas delgadas que tienen una masa por unidad de longitud de 3 kg/m. Determine el momento de inercia de masa del ensamble alrededor de un eje, que es perpendicular a esta página y que pasa por el punto O.



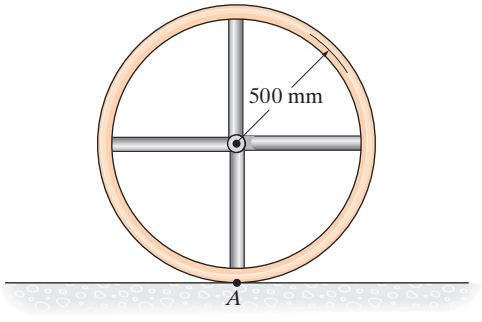
Prob. 17-11

***17-12.** Determine el momento de inercia del ensamble de acero sólido con respecto al eje x. El acero tiene un peso específico de $\gamma_{ac} = 490\ \text{lb/ft}^3$.



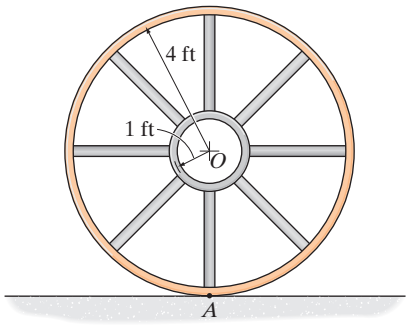
Prob. 17-12

17-13. La rueda consiste en un anillo delgado que tiene una masa de 10 kg y cuatro rayos hechos de varillas delgadas, cada una con una masa de 2 kg. Determine el momento de inercia de la rueda con respecto a un eje que es perpendicular a esta página y que pasa por el punto A.



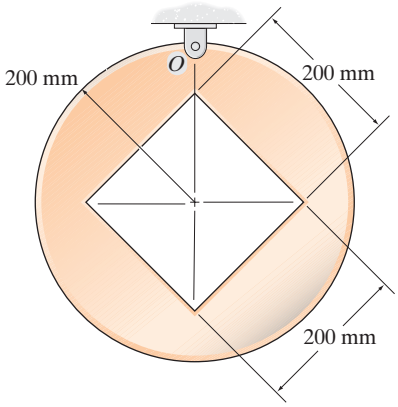
Prob. 17-13

17-14. Si el anillo grande, el anillo pequeño y cada uno de los rayos pesan 100 lb, 15 lb y 20 lb, respectivamente, determine el momento de inercia de masa de la rueda con respecto a un eje que es perpendicular a la página y que pasa por el punto A.



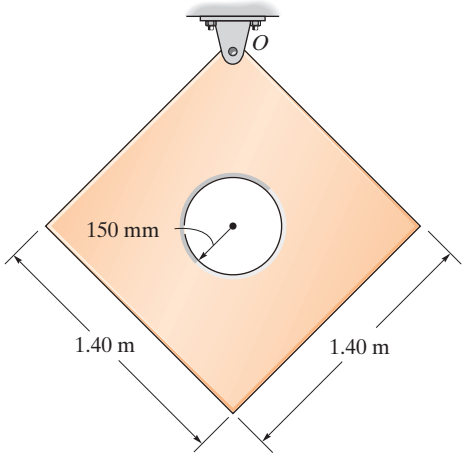
Prob. 17-14

***17-16.** Determine el momento de inercia de masa de la placa delgada con respecto a un eje que es perpendicular a esta página y que pasa por el punto O. El material tiene una masa por unidad de superficie de 20 kg/m^2.



Prob. 17-16

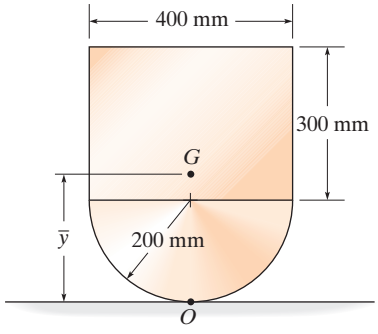
17-15. Determine el momento de inercia con respecto a un eje que es perpendicular a esta página y que pasa a través del pasador en O. La placa delgada tiene un orificio en su centro, su grosor es de 50 mm y el material tiene una densidad $\rho = 50$ kg/m^3.



Prob. 17-15

17-17. Determine la ubicación $\bar{y}$ del centro de masa G del ensamble y, después, calcule el momento de inercia con respecto a un eje que es perpendicular a esta página y que pasa a través de G. El bloque tiene una masa de 3 kg y el semicilindro tiene una masa de 5 kg.

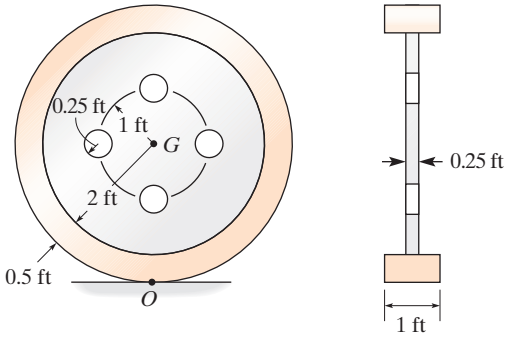
17-18. Determine el momento de inercia del ensamble con respecto a un eje que es perpendicular a esta página y que pasa por el punto O. El bloque tiene una masa de 3 kg y el semicilindro tiene una masa de 5 kg.



Probs. 17-17/18

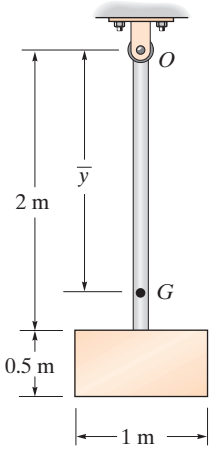
17-19. Determine el momento de inercia de la rueda con respecto a un eje que es perpendicular a esta página y que pasa a través del centro de masa G. El material tiene un peso específico $\gamma = 90\ \text{lb/ft}^3$.

***17-20.** Determine el momento de inercia de la rueda con respecto a un eje que es perpendicular a esta página y que pasa por el punto O. El material tiene un peso específico $\gamma = 90\ \text{lb/ft}^3$.



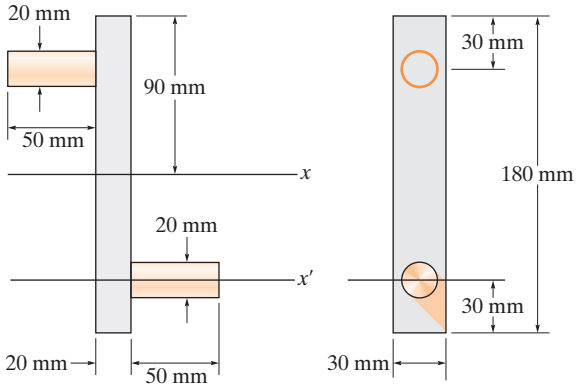
Probs. 17-19/20

17-21. El péndulo consiste en la varilla delgada de 3 kg y la placa delgada de 5 kg. Determine la ubicación $\bar{y}$ del centro de masa G del péndulo; después, calcule el momento de inercia del péndulo con respecto a un eje que es perpendicular a esta página y que pasa por G.



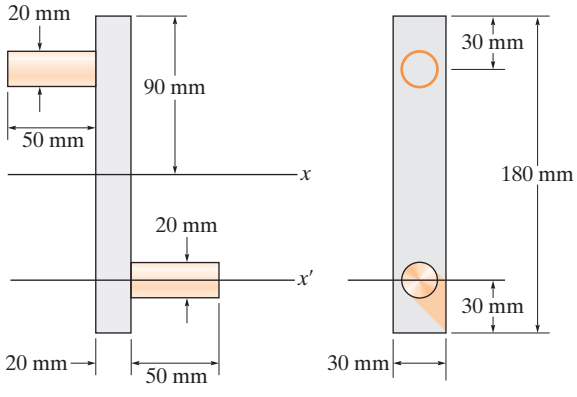
Prob. 17-21

17-22. Determine el momento de inercia de la manivela en voladizo con respecto al eje x. El material es acero que tiene una densidad de $\rho = 7.85\ \text{Mg/m}^3$.



Prob. 17-22

17-23. Determine el momento de inercia de la manivela en voladizo con respecto al eje x'. El material es acero que tiene una densidad de $\rho = 7.85\ \text{Mg/m}^3$.

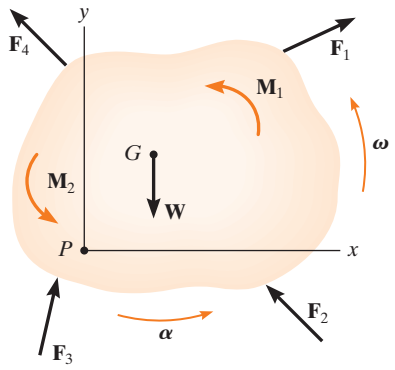


Prob. 17-23

17

17.2 Ecuaciones de movimiento de cinética plana

En el análisis siguiente limitaremos nuestro estudio de cinética plana a cuerpos rígidos los cuales, junto con sus cargas, se consideran *simétricos* con respecto a un plano de referencia fijo*. Como el movimiento de un cuerpo se puede observar dentro del plano de referencia, todas las fuerzas (y momentos de par) que actúan en el cuerpo pueden proyectarse entonces en el plano. Un ejemplo de un cuerpo arbitrario de este tipo se muestra en la figura 17-8*a*. Aquí el origen del *marco de referencia inercial* x, y, z *coincide* con el punto arbitrario P en el cuerpo. Por definición, *estos ejes no giran y están fijos o se trasladan a velocidad constante*.



(a)

Fig. 17-8

Ecuación de movimiento de traslación. Las fuerzas externas que actúan en el cuerpo de la figura 17-8*a* representan el efecto de las fuerzas gravitacional, eléctrica, magnética o de contacto entre cuerpos adyacentes. Como este sistema de fuerzas se consideró previamente en la sección 13.3 en el análisis de una sistema de partículas, aquí puede usarse la ecuación 13-6 resultante, en cuyo caso

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación de movimiento de traslación* del centro de masa de un cuerpo rígido, y plantea que la *suma de todas las fuerzas externas que actúan en el cuerpo es igual a la masa del cuerpo por la aceleración de su centro de masa G*.

Para movimiento del cuerpo en el plano x-y, la ecuación de movimiento de traslación puede escribirse en la forma de dos ecuaciones escalares independientes, es decir,

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$

*Al hacer esto, la ecuación de movimiento de rotación se reduce a una forma un tanto simplificada. El caso más general de la forma y carga de un cuerpo se examina en el capítulo 21.

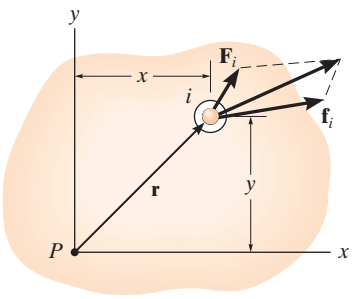


Diagrama de cuerpo libre de una partícula

(b)

||

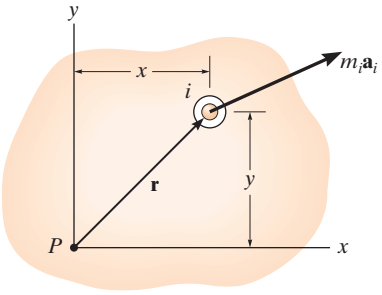
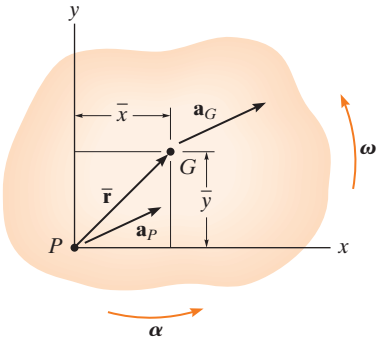


Diagrama cinético de una partícula

(c)



(d)

Fig. 17-8 (cont.)

Ecuación de movimiento de rotación. Ahora examinaremos los efectos provocados por los momentos del sistema de fuerzas externas calculados con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento (el eje z) y que pasa por el punto P. Como se indica en el diagrama de cuerpo libre de la *i*ésima partícula (fig. 17-8*b*), $\mathbf{F}_i$ representa la *fuerza externa resultante* que actúa en la partícula, y $\mathbf{f}_i$ es la *resultante de las fuerzas internas* provocadas por interacciones con partículas adyacentes. Si la masa de la partícula es m_i y su aceleración es $\mathbf{a}_i$, entonces su diagrama cinético se muestra en la figura 17-8*c*. Si sumamos los momentos con respecto al punto P, requerimos

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r} \times \mathbf{f}_i = \mathbf{r} \times m_i\mathbf{a}_i$$

o bien,

$$(\mathbf{M}_P)_i = \mathbf{r} \times m_i\mathbf{a}_i$$

Los momentos con respecto a P también pueden expresarse en función de la aceleración del punto P (fig. 17-8*d*). Si la aceleración angular del cuerpo es $\boldsymbol{\alpha}$ y su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, entonces, al utilizar la ecuación 16-18, tenemos

$$\begin{aligned}(\mathbf{M}_P)_i &= m_i\mathbf{r} \times (\mathbf{a}_P + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2\mathbf{r}) \\ &= m_i[\mathbf{r} \times \mathbf{a}_P + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) - \omega^2(\mathbf{r} \times \mathbf{r})]\end{aligned}$$

El último término es cero, puesto que $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$. Al expresar los vectores con componentes cartesianos y al realizar las operaciones de producto vectorial, el resultado es

$$\begin{aligned}(M_P)_i\mathbf{k} &= m_i\{(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [(a_P)_x\mathbf{i} + (a_P)_y\mathbf{j}] \\ &\quad + (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [\alpha\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})]\} \\ (M_P)_i\mathbf{k} &= m_i[-y(a_P)_x + x(a_P)_y + \alpha x^2 + \alpha y^2]\mathbf{k} \\ \curvearrowright (M_P)_i &= m_i[-y(a_P)_x + x(a_P)_y + \alpha r^2]\end{aligned}$$

Si establecemos que $m_i \rightarrow dm$ e integramos con respecto a toda la masa m del cuerpo, obtenemos la ecuación de momentos resultante

$$\curvearrowright \Sigma M_P = -\left(\int_m y\,dm\right)(a_P)_x + \left(\int_m x\,dm\right)(a_P)_y + \left(\int_m r^2 dm\right)\alpha$$

Aquí ΣM_P representa sólo el momento de las *fuerzas externas* que actúan en el cuerpo con respecto al punto P. El momento resultante de las fuerzas internas es cero, ya que estas fuerzas actúan en pares colineales iguales y opuestos en todo el cuerpo y, por lo tanto, se elimina el momento de cada par de fuerzas con respecto a P. Las integrales y el primero y segundo términos del lado derecho se utilizan para localizar el centro de masa G del cuerpo con respecto a P, pues P, ya que $\bar{y}m = \int y\,dm$ y $\bar{x}m = \int x\,dm$, (fig. 17-8*d*). Asimismo, la última integral representa el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje z, es decir, $I_P = \int r^2 dm$. Por lo tanto,

$$\curvearrowright \Sigma M_P = -\bar{y}m(a_P)_x + \bar{x}m(a_P)_y + I_P\alpha \qquad (17\text{-}6)$$

Es posible reducir esta ecuación a una forma más simple, si el punto P coincide con el centro de masa G del cuerpo. Si éste es el caso, entonces $\bar{x} = \bar{y} = 0$ y, por consiguiente*,

$$\Sigma M_G = I_G\alpha \tag{17-7}$$

Esta ecuación de movimiento de rotación P plantea que la suma de los momentos de todas las fuerzas externas con respecto al centro de masa del cuerpo G es igual al producto del momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje que pasa por G y a la aceleración angular del cuerpo.

La ecuación 17-6 también puede reescribirse en función de las componentes x y y de $\mathbf{a}_G$ y el momento de inercia I_G del cuerpo. Si el punto G está en $(\bar{x}, \bar{y})$, (fig. 17-8*d*), entonces, de acuerdo con el teorema de los ejes paralelos, $I_P = I_G + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$. Si sustituimos en la ecuación 17-6 y reordenamos los términos:

$$\circlearrowleft \Sigma M_P = \bar{y}m[-(a_P)_x + \bar{y}\alpha] + \bar{x}m[(a_P)_y + \bar{x}\alpha] + I_G\alpha \tag{17-8}$$

De acuerdo con el diagrama cinemático de la figura 17-8*d*, $\mathbf{a}_P$ puede expresarse en función de $\mathbf{a}_G$ como

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_P + \boldsymbol{\alpha} \times \bar{\mathbf{r}} - \omega^2\bar{\mathbf{r}}$$
$$(a_G)_x\mathbf{i} + (a_G)_y\mathbf{j} = (a_P)_x\mathbf{i} + (a_P)_y\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k} \times (\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j}) - \omega^2(\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j})$$

Si se realiza el producto vectorial y se igualan las componentes **i** y **j** respectivas se obtienen las dos ecuaciones escalares

$$(a_G)_x = (a_P)_x - \bar{y}\alpha - \bar{x}\omega^2$$
$$(a_G)_y = (a_P)_y + \bar{x}\alpha - \bar{y}\omega^2$$

Según estas ecuaciones $[-(a_P)_x + \bar{y}\alpha] = [-(a_G)_x - \bar{x}\omega^2]$ y $[(a_P)_y + \bar{x}\alpha] = [(a_G)_y + \bar{y}\omega^2]$. Al sustituir estos resultados en la ecuación 17-8 y simplificar, el resultado es

$$\circlearrowleft \Sigma M_P = -\bar{y}m(a_G)_x + \bar{x}m(a_G)_y + I_G\alpha \tag{17-9}$$

Este importante resultado indica que cuando los momentos de las fuerzas externas mostradas en el diagrama de cuerpo libre se suman con respecto al punto P (fig. 17-8e), equivalen a la suma de los "momentos cinéticos" de las componentes de $m\mathbf{a}_G$ con respecto a P más el "momento cinético" de $I_G\boldsymbol{\alpha}$ (fig. 17-8f). En otras palabras, cuando se calculan los "momentos cinéticos" $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$ (fig. 17-8*f*), los vectores $m(\mathbf{a}_G)_x$ y $m(\mathbf{a}_G)_y$ se tratan como vectores deslizantes; es decir, pueden actuar *en cualquier punto a lo largo de su línea de acción*. Del mismo modo, $I_G\boldsymbol{\alpha}$ puede tratarse como un vector libre y, por consiguiente, actuar en *cualquier punto*. Es importante tener en cuenta, sin embargo, que $m\mathbf{a}_G$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$ no son lo mismo que una fuerza o un momento de par. En cambio, son provocados por los efectos externos de las fuerzas y los momentos de par que actúan en el cuerpo. Por lo tanto, con esto en mente escribimos la ecuación 17-9 de una forma más general como

$$\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P \tag{17-10}$$

*También se reduce a esta misma forma simple $\Sigma M_P = I_P\alpha$ si el punto P es un *punto fijo* (vea la ecuación 17-16) o la aceleración del punto P se dirige a lo largo de la línea PG.

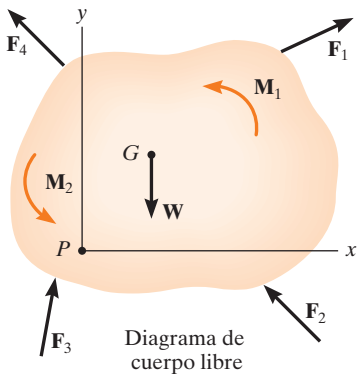


Diagrama de cuerpo libre

(e)

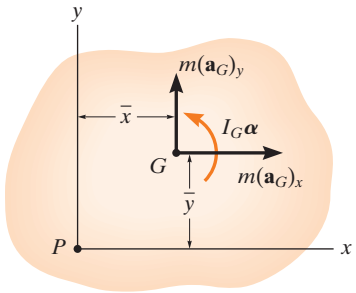


Diagrama cinético

(f)

Fig. 17-8(e y f)

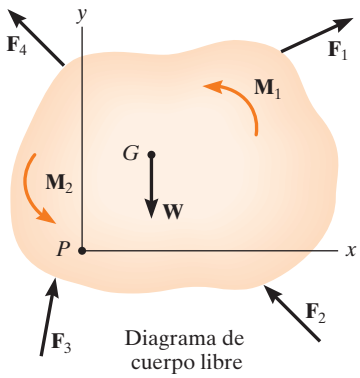


Diagrama de cuerpo libre

(e)

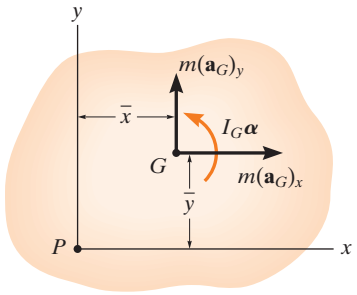


Diagrama cinético

(f)

Fig. 17-8(e y f) (reiterada)

Aplicación general de las ecuaciones de movimiento. Para resumir este análisis, se pueden escribir *tres* ecuaciones escalares independientes que describan el movimiento plano general de un cuerpo rígido simétrico.

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha$$

o

$$\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P \qquad (17\text{-}11)$$

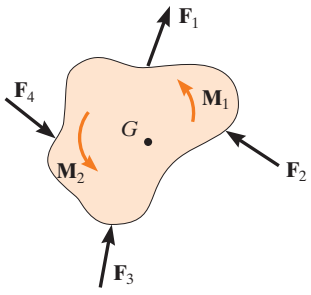
Cuando se aplican estas ecuaciones, deberíamos trazar *siempre* un diagrama de cuerpo libre (fig. 17-8*e*), que incluya todos los términos que intervienen en ΣF_x, ΣF_y, ΣM_G o ΣM_P. En algunos problemas también resulta útil trazar el *diagrama cinético* del cuerpo (fig. 17-8*f*). Este diagrama explica gráficamente los términos $m(\mathbf{a}_G)_x$, $m(\mathbf{a}_G)_y$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$. Es muy conveniente, en especial cuando se utiliza para determinar las componentes de $m\mathbf{a}_G$ y el momento de dichas componentes en $\Sigma(M_k)_P$*.

17.3 Ecuaciones de movimiento: traslación

Cuando el cuerpo rígido que se muestra en la figura 17-9*a* experimenta una *traslación*, todas sus partículas tienen la *misma aceleración*. Asimismo, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, en cuyo caso la ecuación de movimiento de rotación aplicada en el punto G se reduce a una forma simplificada, a saber, $\Sigma M_G = 0$. A continuación se analizará la aplicación de ésta y de todas las ecuaciones de movimiento producido por fuerzas para cada uno de los dos tipos de traslación.

Traslación rectilínea. Cuando un cuerpo se somete a *traslación rectilínea*, todas sus partículas viajan a lo largo de trayectorias de línea recta paralelas. El diagrama de cuerpo libre y el diagrama cinético se ilustran en la figura 17-9*b*. Como $I_G\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, sólo $m\mathbf{a}_G$ se muestra en el diagrama cinético. Por lo tanto, en este caso las ecuaciones de movimiento pertinentes son

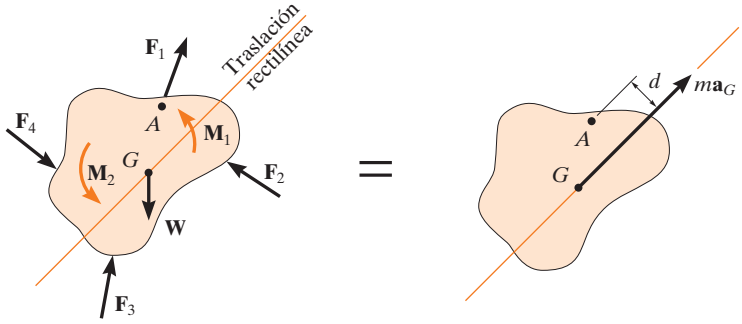
$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_G = 0 \qquad (17\text{-}12)$$



(a)

Fig. 17-9

*Por tal razón, el diagrama cinético se utilizará en la solución de un problema de ejemplo, siempre que se aplique $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.



(b)

También es posible sumar momentos con respecto a otros puntos en el cuerpo o fuera de éste, en cuyo caso debe tenerse en cuenta el momento de $m\mathbf{a}_G$. Por ejemplo, si se selecciona el punto A, situado a una distancia perpendicular d de la línea de acción de $m\mathbf{a}_G$, se aplican las siguientes ecuaciones de momentos:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = \Sigma (\mathcal{M}_k)_A; \qquad \Sigma M_A = (ma_G)d$$

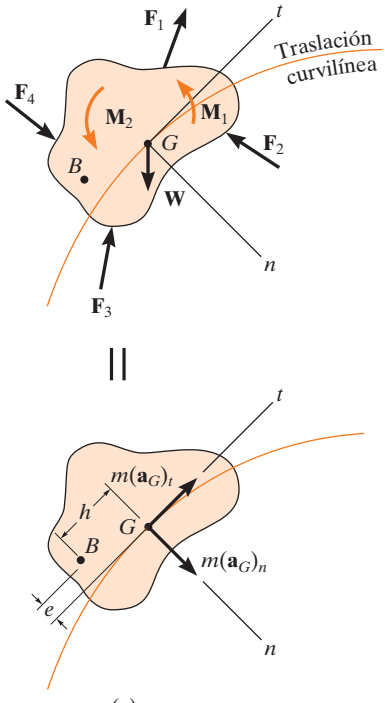
Aquí la suma de los momentos de las fuerzas externas y los momentos de par con respecto a A (ΣM_A, diagrama de cuerpo libre) es igual al momento de $m\mathbf{a}_G$ con respecto a A ($\Sigma(\mathcal{M}_k)_A$, diagrama cinético).

Traslación curvilínea. Cuando un cuerpo rígido se somete a *traslación curvilínea*, todas sus partículas tienen la misma aceleración mientras viajan a lo largo de *trayectorias curvas*, como se indicó en la sección 16.1. En un análisis, con frecuencia resulta conveniente utilizar un sistema de coordenadas inercial con su origen que coincida con el centro de masa del cuerpo en el instante considerado, y sus ejes orientados en las direcciones normal y tangencial a la trayectoria del movimiento (fig. 17-9*c*). De este modo, las tres ecuaciones escalares de movimiento son

$$\begin{aligned} \Sigma F_n &= m(a_G)_n \\ \Sigma F_t &= m(a_G)_t \\ \Sigma M_G &= 0 \end{aligned} \qquad (17\text{-}13)$$

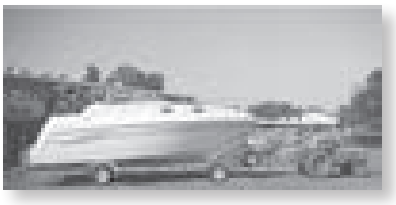
Si se suman los momentos con respecto al punto arbitrario B (fig. 17-9*c*), entonces es necesario tener en cuenta los momentos, $\Sigma(\mathcal{M}_k)_B$, de las dos componentes $m(\mathbf{a}_G)_n$ y $m(\mathbf{a}_G)_t$ con respecto a este punto. De acuerdo con el diagrama cinético, h y e representan las distancias perpendiculares (o "brazos de momento") de B a las líneas de acción de las componentes. Por consiguiente, la ecuación de momentos requerida es

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = \Sigma (\mathcal{M}_k)_B; \qquad \Sigma M_B = e[m(a_G)_t] - h[m(a_G)_n]$$

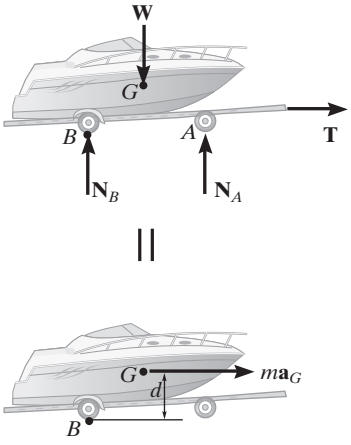


(c)

Fig. 17-9



Los diagramas de cuerpo libre y cinético para este bote y el remolque se trazan primero para aplicar las ecuaciones de movimiento. Aquí las fuerzas en el diagrama de cuerpo libre causan el efecto que se muestra en el diagrama cinético. Si se suman los momentos con respecto al centro de masa G, entonces $\Sigma M_G = 0$. Sin embargo, si los momentos se suman con respecto al punto B entonces $\curvearrowright +\Sigma M_B = ma_G(d)$ (© R. C. Hibbeler)



Procedimiento para el análisis

Los problemas cinéticos que implican la *traslación* de un cuerpo rígido pueden resolverse con el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre

- Establezca el sistema de coordenadas x, y o n, t inercial y trace el diagrama de cuerpo libre que incluya todas las fuerzas externas y momentos de par que actúan en el cuerpo.
- Deberá establecer la dirección y el sentido de la aceleración del centro de masa $\mathbf{a}_G$ del cuerpo.
- Identifique las incógnitas en el problema.
- Si se decide que en la solución va a utilizarse la ecuación de movimiento de rotación $\Sigma M_P = \Sigma(M_k)_P$, entonces considere trazar el diagrama cinético, puesto que gráficamente incluye las componentes $m(\mathbf{a}_G)_x$, $m(\mathbf{a}_G)_y$ o $m(\mathbf{a}_G)_t$, $m(\mathbf{a}_G)_n$ y, por consiguiente, es conveniente "visualizar" los términos requeridos en la suma de momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.

Ecuaciones de movimiento

- Aplique las tres ecuaciones de movimiento según la convención de signos establecida.
- Para simplificar el análisis, la ecuación de momentos $\Sigma M_G = 0$ puede reemplazarse con la ecuación más general $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$, donde el punto P casi siempre se encuentra en la intersección de las líneas de acción de tantas fuerzas desconocidas como sea posible.
- Si el cuerpo está en contacto con una *superficie rugosa* y ocurre deslizamiento, use la ecuación de fricción $F = \mu_k N$. Recuerde, que $\mathbf{F}$ siempre actúa en el cuerpo de modo que se opone a su movimiento con respecto a la superficie con la cual está en contacto.

Cinemática

- Use cinemática para determinar la velocidad y la posición del cuerpo.
- Para traslación rectilínea con *aceleración variable*,

$$a_G = dv_G/dt \quad a_G ds_G = v_G dv_G$$

- Para traslación rectilínea con *aceleración constante*,

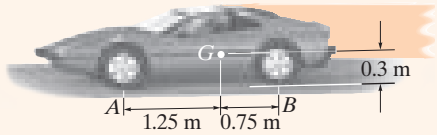
$$v_G = (v_G)_0 + a_G t \quad v_G^2 = (v_G)_0^2 + 2a_G[s_G - (s_G)_0]$$
$$s_G = (s_G)_0 + (v_G)_0 t + \tfrac{1}{2} a_G t^2$$

- Para traslación curvilínea,

$$(a_G)_n = v_G^2/\rho$$
$$(a_G)_t = dv_G/dt \quad (a_G)_t ds_G = v_G dv_G$$

EJEMPLO 17.5

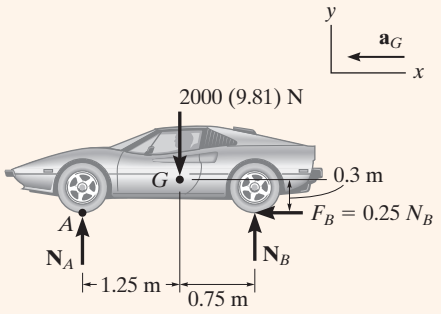
El automóvil de la figura 17-10*a* tiene una masa de 2 Mg y un centro de masa en *G*. Determine la aceleración, si las ruedas traseras "propulsoras" siempre patinan, en tanto que las delanteras ruedan libremente. Ignore la masa de las ruedas. El coeficiente de fricción cinética entre las ruedas y la carretera es $\mu_k = 0.25$.



(a)

SOLUCIÓN 1

Diagrama de cuerpo libre. Como se indica en la figura 17-10*b*, la fuerza de fricción $\mathbf{F}_B$ en las ruedas traseras empuja el carro hacia delante y como *ocurre deslizamiento*, $F_B = 0.25\ N_B$. Las fuerzas de fricción que actúan en las *ruedas delanteras* son *cero*, ya que su masa es insignificante*. En el problema hay tres incógnitas, N_A, N_B y a_G. Aquí sumaremos los momentos con respecto al centro de masa. El automóvil (punto *G*) acelera hacia la izquierda, es decir, en la dirección *x* negativa (fig. 17-10*b*).



(b)

Ecuaciones de movimiento

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad -0.25N_B = -(2000\ \text{kg})a_G \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_A + N_B - 2000(9.81)\ \text{N} = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0; \quad -N_A(1.25\ \text{m}) - 0.25N_B(0.3\ \text{m}) + N_B(0.75\ \text{m}) = 0 \qquad (3)$$

Al resolver,

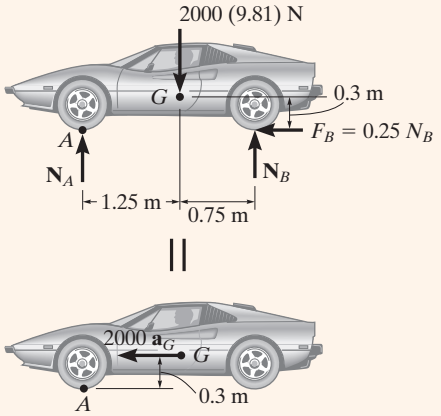
$$a_G = 1.59\ \text{m/s}^2 \leftarrow \qquad \textit{Resp.}$$

$$N_A = 6.88\ \text{kN}$$

$$N_B = 12.7\ \text{kN}$$

SOLUCIÓN II

Diagramas de cuerpo libre y cinético. Si se aplica la ecuación de "momento" con respecto al punto *A*, entonces se eliminará la incógnita N_A de la ecuación. Para "visualizar" el momento de $m\mathbf{a}_G$ con respecto a *A*, incluiremos el diagrama cinético como parte del análisis (fig. 17-10*c*).



(c)

Fig. 17-10

Ecuación de movimiento

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A; \qquad N_B(2\ \text{m}) - [2000(9.81)\ \text{N}](1.25\ \text{m}) = (2000\ \text{kg})a_G(0.3\ \text{m})$$

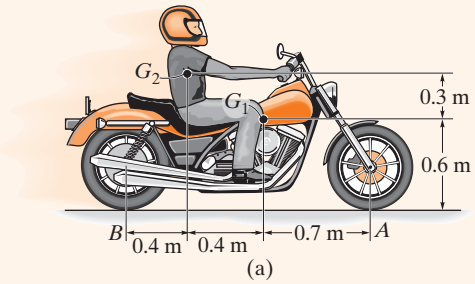
Para despejar a_G en ésta y en la ecuación 1 obtenemos una solución más sencilla que la que se obtuvo con las ecuaciones 1 a 3.

*Si se ignora la masa de la rueda, $I\alpha = 0$ y la fuerza de fricción en *A* requerida para hacer girar la rueda es cero. Si se incluyera la masa de las ruedas, entonces la solución sería más complicada, puesto que tendría que considerarse un análisis de movimiento plano general de las ruedas (vea la sección 17.5).

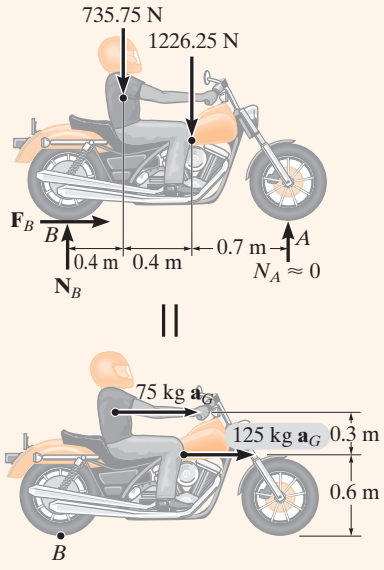
EJEMPLO 17.6

(© R. C. Hibbeler)

La motocicleta de la figura 17-11*a* tiene una masa de 125 kg y un centro de masa G_1, mientras que el piloto tiene una masa de 75 kg y un centro de masa en G_2. Determine el coeficiente mínimo de fricción estática entre las ruedas y el pavimento para que el motociclista realice un "caballito", es decir, que levante del suelo la rueda delantera, como se muestra en la fotografía. ¿Qué aceleración se requiere para hacer esto? Ignore la masa de las ruedas y suponga que la rueda delantera gira libremente.



(a)



(b)

Fig. 17-11

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre y cinético. En este problema consideraremos tanto la motocicleta como al piloto como un solo *sistema*. Es posible localizar primero el centro de masa de este "sistema" con las ecuaciones $\bar{x} = \Sigma \tilde{x}m/\Sigma m$ y $\bar{y} = \Sigma \tilde{y}m/\Sigma m$. En este caso, sin embargo, consideraremos el peso de la masa de la motocicleta y del piloto por separado, como se indica en los diagramas de cuerpo libre y cinético (fig. 17-11*b*). Estas dos partes se mueven con la *misma* aceleración. Hemos supuesto que la rueda delantera *está a punto* de separarse del suelo, de modo que la reacción normal $N_A \approx 0$. Las tres incógnitas en el problema son N_B, F_B y a_G.

Ecuaciones de movimiento

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad F_B = (75\text{ kg} + 125\text{ kg})a_G \tag{1}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_B - 735.75\text{ N} - 1226.25\text{ N} = 0$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = \Sigma (\mathcal{M}_k)_B; \; -(735.75\text{ N})(0.4\text{ m}) - (1226.25\text{ N})(0.8\text{ m}) =$$
$$-(75\text{ kg}\, a_G)(0.9\text{ m}) - (125\text{ kg}\, a_G)(0.6\text{ m}) \tag{2}$$

Al resolver,

$$a_G = 8.95\text{ m/s}^2 \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$
$$N_B = 1962\text{ N}$$
$$F_B = 1790\text{ N}$$

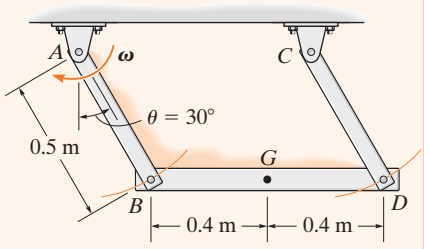
Por lo tanto, el coeficiente mínimo de fricción estática es

$$(\mu_s)_{\text{mín}} = \frac{F_B}{N_B} = \frac{1790\text{ N}}{1962\text{ N}} = 0.912 \qquad \textit{Resp.}$$

17

EJEMPLO 17.7

La viga BD de 100 kg que se muestra en la figura 17.12*a* está sostenida por dos varillas cuya masa no se toma en cuenta. Determine la fuerza desarrollada en cada varilla si cuando $\theta = 30°$, $\omega = 6$ rad/s.



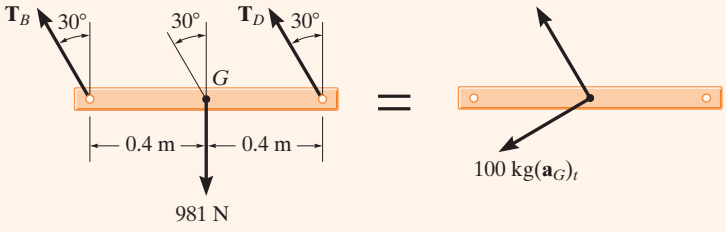
(a)

SOLUCIÓN

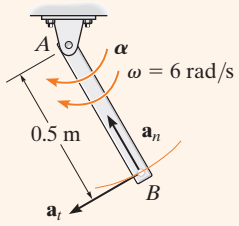
Diagramas de cuerpo libre y cinético. La viga se mueve con *traslación curvilínea*, ya que todos sus puntos se mueven a lo largo de trayectorias circulares, que tienen el mismo radio de 0.5 m, pero centros de curvatura diferentes. Con coordenadas normales y tangenciales, los diagramas de cuerpo libre y cinético de la viga se ilustran en la figura 17-12*b*. Debido a la *traslación*, G tiene el *mismo* movimiento que el pasador en B, el cual está conectado tanto a la varilla como a la viga. Observe que la componente tangencial de la aceleración actúa hacia abajo y a la izquierda, debido a la dirección en sentido horario de $\boldsymbol{\alpha}$ (fig. 17-12*c*). Además, la componente normal de la aceleración *siempre* está dirigida hacia el centro de curvatura (hacia el punto A para la varilla AB). Puesto que la velocidad angular de AB es de 6 rad/s cuando $\theta = 30°$, entonces

$$(a_G)_n = \omega^2 r = (6 \text{ rad/s})^2(0.5 \text{ m}) = 18 \text{ m/s}^2$$

Las tres incógnitas son T_B, T_D y $(a_G)_t$.



(b)



(c)

Fig. 17-12

Ecuaciones de movimiento

$$+\nwarrow \Sigma F_n = m(a_G)_n; \quad T_B + T_D - 981 \cos 30° \text{ N} = 100 \text{ kg}(18 \text{ m/s}^2) \qquad (1)$$

$$+\swarrow \Sigma F_t = m(a_G)_t; \quad 981 \operatorname{sen} 30° = 100 \text{ kg}(a_G)_t \qquad (2)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0; \quad -(T_B \cos 30°)(0.4 \text{ m}) + (T_D \cos 30°)(0.4 \text{ m}) = 0 \qquad (3)$$

El resultado de la solución simultánea de estas tres ecuaciones es

$$T_B = T_D = 1.32 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

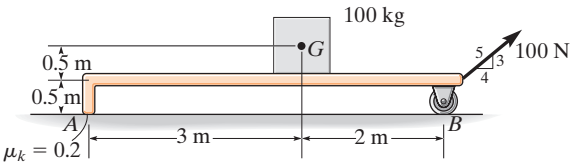
$$(a_G)_t = 4.905 \text{ m/s}^2$$

NOTA: También es posible aplicar las ecuaciones de movimiento a lo largo de los ejes x y y, horizontal y vertical, pero la solución se vuelve más complicada.

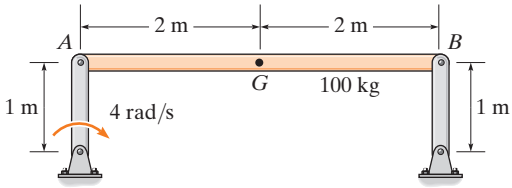
17

PROBLEMAS PRELIMINARES

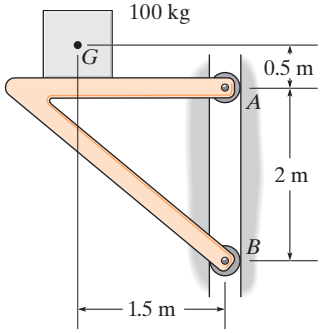
P17-1. Trace el diagrama de cuerpo libre y el diagrama cinético del objeto *AB*.



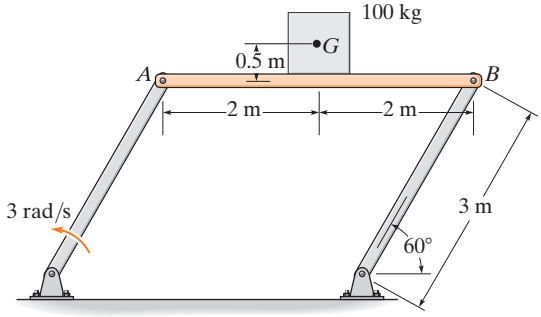
(a)



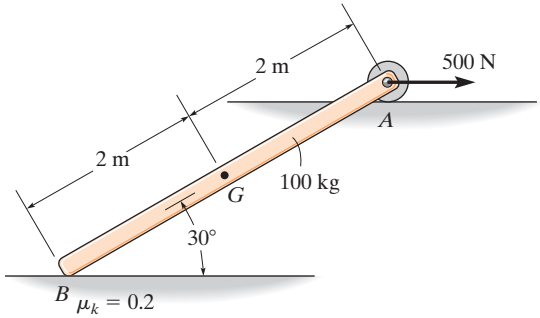
(d)



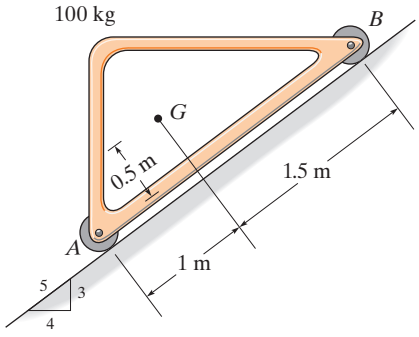
(b)



(e)



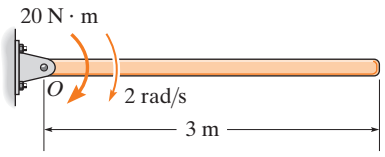
(c)



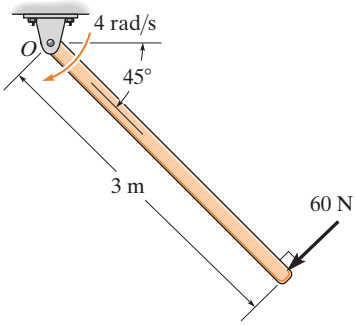
(f)

Prob. P17-1

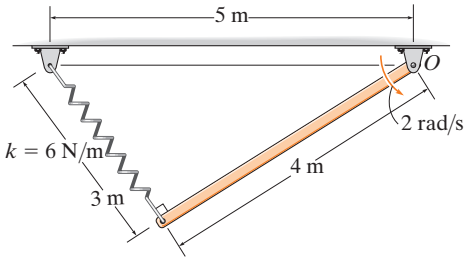
P17-2. Dibuje el diagrama de cuerpo libre y el diagrama cinético del objeto de 100 kg.



(a)

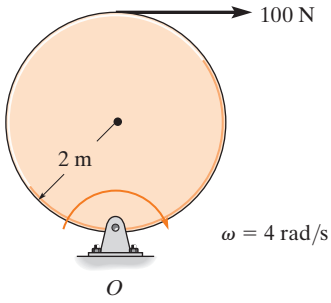


(b)

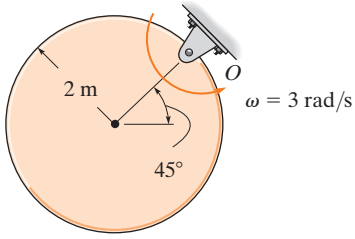


La longitud sin estirar del resorte es 1 m

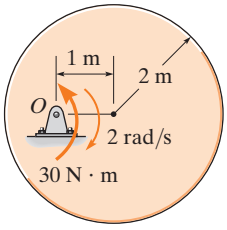
(c)



(d)



(e)



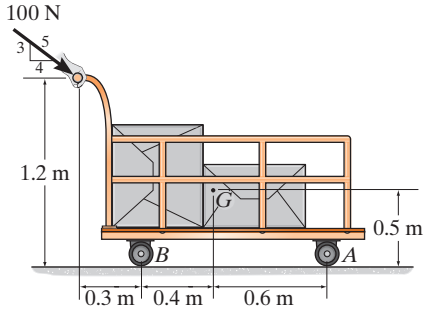
(f)

Prob. P17-2

17

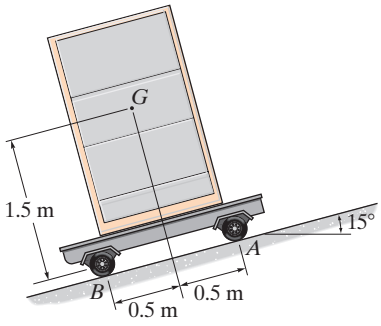
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F17-1. La carretilla y su carga tienen una masa total de 100 kg. Determine la aceleración de la carretilla y la reacción normal en el par de ruedas A y B. Ignore la masa de éstas.



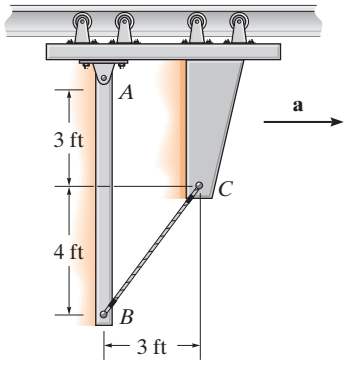
Prob. F17-1

F17-2. Si se permite que el gabinete de 80 kg ruede hacia abajo del plano inclinado, determine su aceleración y las reacciones normales en el par de rodillos A y B cuya masa se pasa por alto.



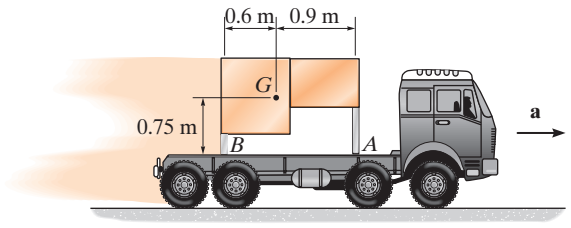
Prob. F17-2

F17-3. La articulación AB de 20 lb está conectada con un pasador a un marco móvil en A y sostenida en posición vertical por la cuerda BC, la cual puede soportar una tensión máxima de 10 lb. Determine la aceleración máxima del marco sin que se rompa la cuerda. ¿Cuáles son las componentes correspondientes de la reacción en el pasador A?



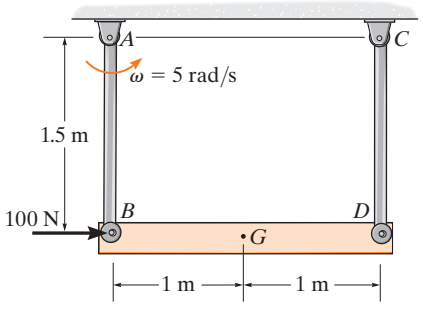
Prob. F17-3

F17-4. Determine la aceleración máxima del camión sin que el ensamble se mueva con respecto al camión. Además, ¿cuál es la reacción normal correspondiente en las patas A y B? La mesa de 100 kg tiene su centro de masa en G y el coeficiente de fricción estática entre las patas de la mesa y la plataforma del camión es $\mu_s = 0.2$.



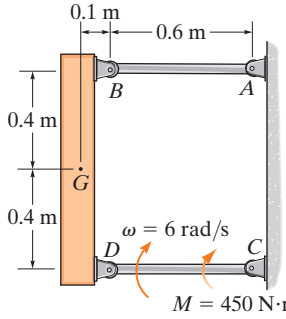
Prob. F17-4

F17-5. En el instante que se muestra, las dos varillas cuya masa se ignora oscilan con una velocidad angular en sentido antihorario de $\omega = 5$ rad/s, mientras que la varilla de 50 kg se somete a la fuerza horizontal de 100 N. Determine la tensión desarrollada en las varillas y su aceleración angular en este instante.



Prob. F17-5

F17-6. En el instante que se muestra, la articulación CD gira con una velocidad angular de $\omega = 6$ rad/s. Si se somete a un momento de par $M = 450$ N · m, determine la fuerza desarrollada en la articulación AB, las componentes horizontal y vertical de la reacción en el perno D, y la aceleración angular del eslabón CD en este instante. La masa del bloque es de 50 kg y su centro de masa está en G. Ignore la masa de las articulaciones AB y CD.

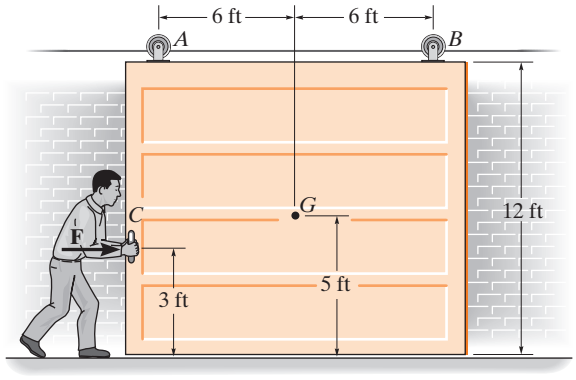


Prob. F17-6

PROBLEMAS

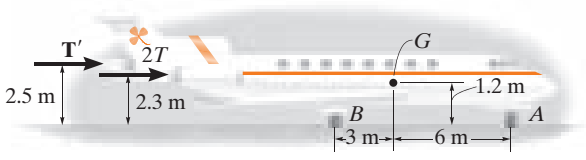
***17-24.** La puerta tiene un peso de 200 lb y un centro de gravedad en G. Determine hasta dónde se mueve la puerta en 2 s, si parte desde el reposo y un hombre la empuja en C con una fuerza horizontal $F = 30$ lb. Asimismo, encuentre las reacciones verticales en los rodillos A y B.

17-25. La puerta tiene un peso de 200 lb y un centro de gravedad en G. Determine la fuerza constante F que debe aplicarse a la puerta para abrirla empujándola 12 ft hacia la derecha en 5 s, partiendo desde el reposo. Además, encuentre las reacciones verticales en los rodillos A y B.



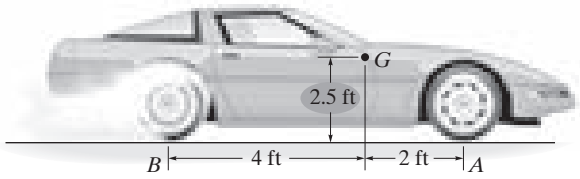
Probs. 17-24/25

17-26. El avión de propulsión a chorro tiene una masa total de 22 Mg y un centro de masa en G. Inicialmente en el despegue, los motores proporcionan un empuje $2T = 4$ kN y $T' = 1.5$ kN. Determine la aceleración del avión y las reacciones normales sobre la rueda de la nariz en A y en cada una de las *dos* ruedas del ala localizadas en B. Desprecie la masa de las ruedas y, debido a la baja velocidad, cualquier sustentación causada por las alas.



Prob. 17-26

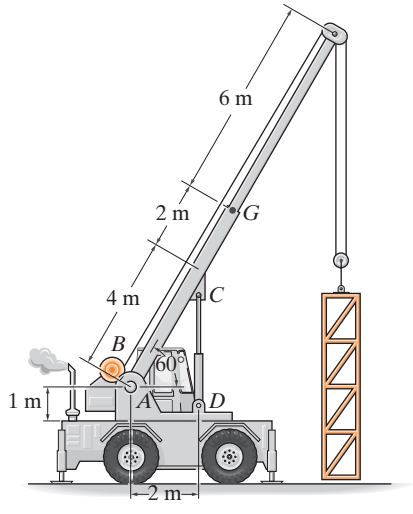
17-27. El automóvil deportivo tiene un peso de 4500 lb y centro de gravedad en G. Si parte desde el reposo, sus ruedas traseras se deslizan mientras acelera. Determine cuánto tiempo requiere para alcanzar una rapidez de 10 ft/s. Además, ¿cuáles son las reacciones normales en cada una de las cuatro ruedas sobre la carretera? Los coeficientes de fricción estática y cinética en la carretera son $\mu_s = 0.5$ y $\mu_k = 0.3$, respectivamente. Desprecie la masa de las ruedas.



Prob. 17-27

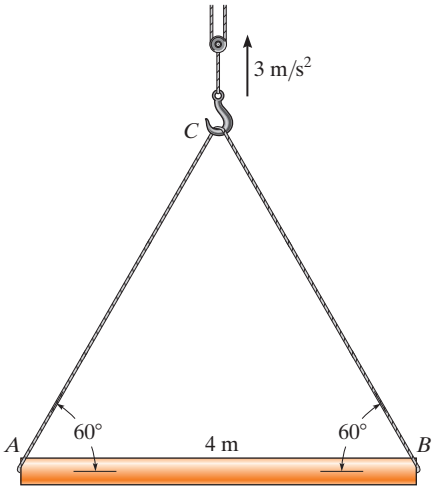
***17-28.** El ensamble tiene una masa de 8 Mg y se eleva mediante el sistema de pluma y poleas. Si el cabrestante en B enrolla el cable con una aceleración de 2 m/s^2, determine la fuerza de compresión en el cilindro hidráulico, necesaria para sostener la pluma, que tiene una masa de 2 Mg y un centro de masa en G.

17-29. El ensamble tiene una masa de 4 Mg y se eleva mediante el cabrestante en B. Determine la mayor aceleración del ensamble, tal que la fuerza de compresión en el cilindro hidráulico que sostiene la pluma no exceda 180 kN. ¿Cuál es la tensión en el cable de soporte? La pluma tiene una masa de 2 Mg y un centro de masa en G.



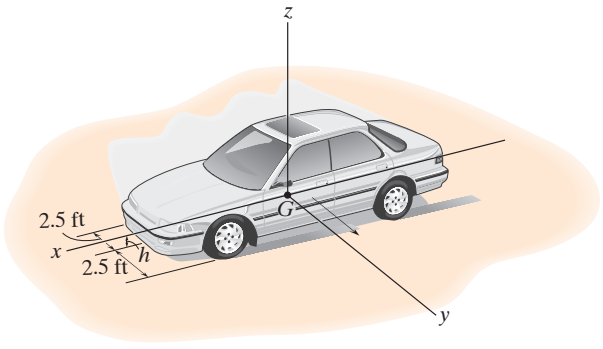
Probs. 17-28/29

17-30. La viga uniforme AB tiene una masa de 8 Mg. Determine las cargas interna axial, cortante y de momento flexionante en el centro de la viga, si una grúa le proporciona una aceleración ascendente de 3 m/s^2.



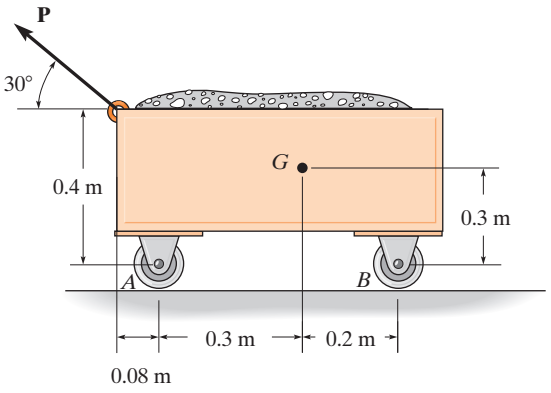
Prob. 17-30

17-31. Un automóvil que tiene un peso de 4000 lb comienza a derrapar y girar con los frenos aplicados en sus cuatro ruedas. Si el coeficiente de fricción cinética entre las ruedas y el camino es $\mu_k = 0.8$, determine la altura crítica máxima h del centro de gravedad G, de modo que el auto no se vuelque. La inclinación comenzará a producirse después de que el vehículo gire 90° desde su dirección original de movimiento y, como se muestra en la figura, se someta a *traslación*, mientras se desliza. *Sugerencia:* Dibuje un diagrama de cuerpo libre del automóvil visto desde el frente. Cuando ocurre la inclinación, las reacciones normales de las ruedas en el lado derecho (o del lado del pasajero) son iguales a cero.



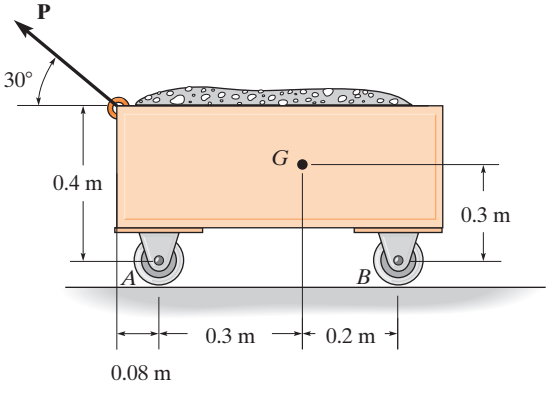
Prob. 17-31

***17-32.** Se aplica una fuerza de $P = 300$ N al carro de 60 kg. Determine las reacciones en las dos ruedas en A y en las dos ruedas en B. Además, ¿cuál es la aceleración del carro? El centro de masa del carro está en G.



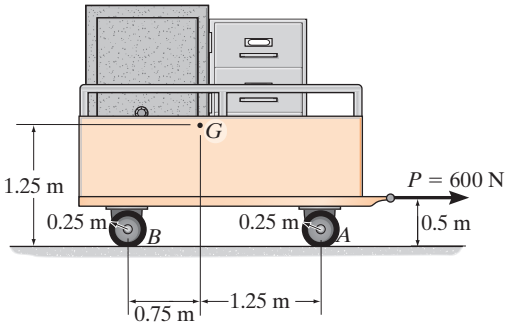
Prob. 17-32

17-33. Determine la mayor fuerza **P** que se puede aplicar al carro de 60 kg, sin causar que una de las reacciones de las ruedas, ya sea en A o en B, sea igual a cero. Además, ¿cuál es la aceleración del carro? El centro de masa del carro está en G.



Prob. 17-33

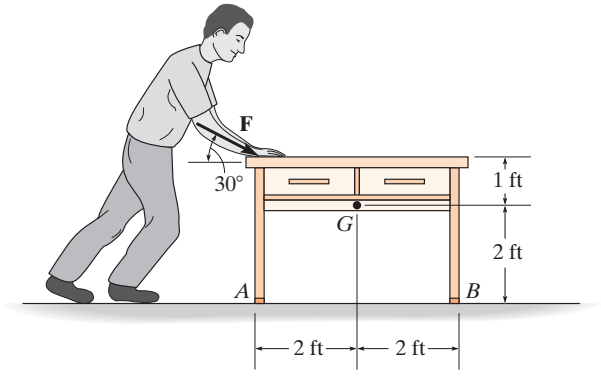
17-34. El remolque con su carga tiene una masa de 150 kg y un centro de masa en G. Si se somete a una fuerza horizontal de $P = 600$ N, determine la aceleración del remolque y la fuerza normal sobre el par de ruedas en A y en B. Las ruedas pueden rodar libremente y tienen una masa despreciable.



Prob. 17-34

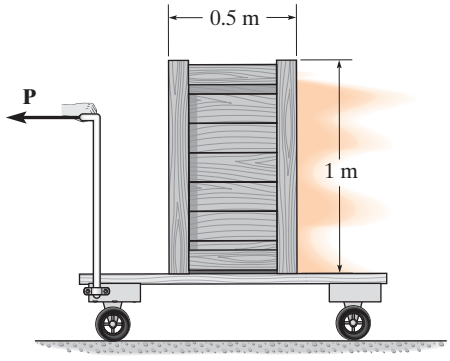
17-35. El escritorio tiene un peso de 75 lb y un centro de gravedad en G. Determine su aceleración inicial, si un hombre lo empuja con una fuerza $F = 60$ lb. El coeficiente de fricción cinética en A y B es $\mu_k = 0.2$.

***17-36.** El escritorio tiene un peso de 75 lb y un centro de gravedad en G. Determine su aceleración inicial, cuando el hombre aplica la fuerza suficiente F para superar la fricción estática en A y B. También, encuentre las reacciones verticales en cada una de las dos patas en A y en B. Los coeficientes de fricción estática y cinética en A y B son $\mu_s = 0.5$ y $\mu_k = 0.2$, respectivamente.



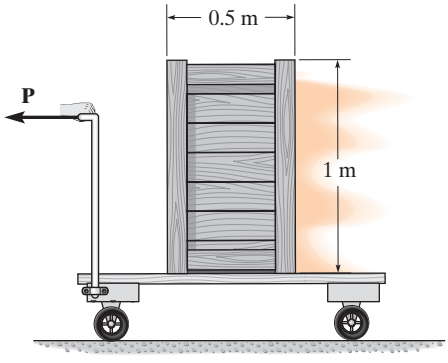
Probs. 17-35/36

17-37. La caja uniforme de 150 kg descansa sobre el carro de 10 kg. Determine la máxima fuerza P que se puede aplicar a la manija sin provocar que la caja se vuelque sobre el carro. No ocurre deslizamiento.



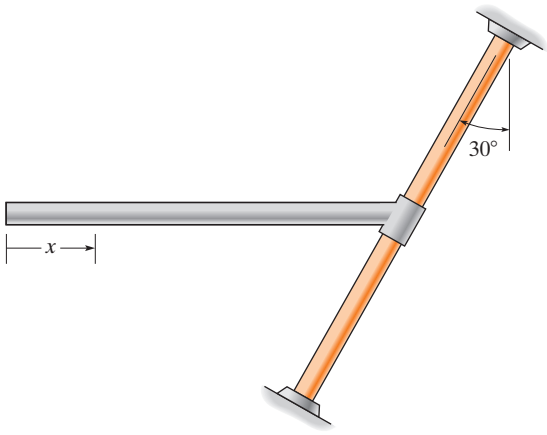
Prob. 17-37

17-38. La caja uniforme de 150 kg descansa sobre el carro de 10 kg. Determine la máxima fuerza P que se puede aplicar a la manija, sin causar que la caja se deslice o se vuelque sobre el carro. El coeficiente de fricción estática entre la caja y el carro es $\mu_s = 0.2$.



Prob. 17-38

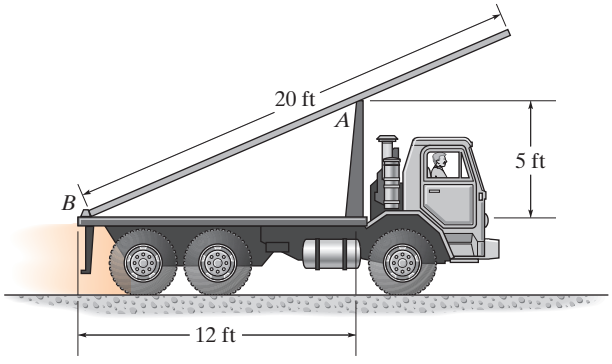
17-39. La barra tiene un peso por longitud w y se sostiene mediante el collarín liso. Si se libera desde el reposo, determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en la barra en función de x.



Prob. 17-39

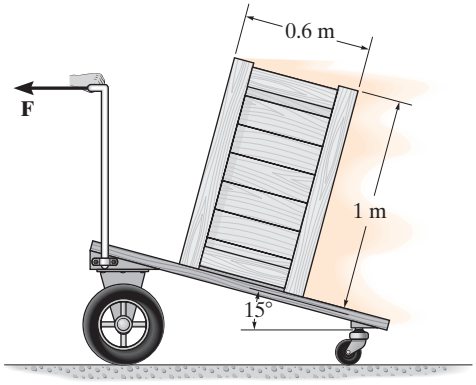
***17-40.** El tubo liso de 180 lb tiene una longitud de 20 ft y un diámetro insignificante. Si se carga en un camión de la manera mostrada. Determine la aceleración máxima que puede tener el camión sin causar que la reacción normal en A sea cero. También determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que ejerce el camión sobre el tubo en B.

17-41. El tubo liso de 180 lb tiene una longitud de 20 ft y un diámetro insignificante. Se carga en un camión de la manera ilustrada. Si el camión se acelera a $a = 5\ \text{ft/s}^2$, determine la reacción normal en A y las componentes horizontal y vertical de la fuerza que el camión ejerce sobre el tubo en B.



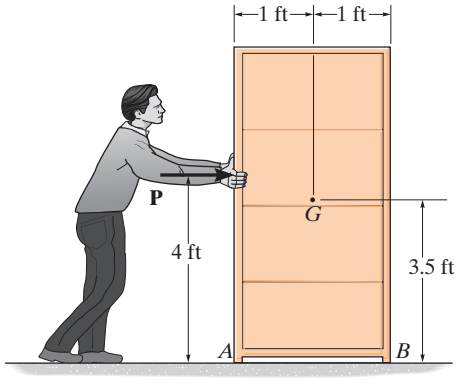
Probs. 17-40/41

17-42. La caja uniforme tiene una masa de 50 kg y descansa sobre el carro que tiene una superficie inclinada. Determine la aceleración mínima que causará que la caja se incline o se deslice en relación con el carro. ¿Cuál es la magnitud de esta aceleración? El coeficiente de fricción estática entre la caja y el carro es $\mu_s = 0.5$.



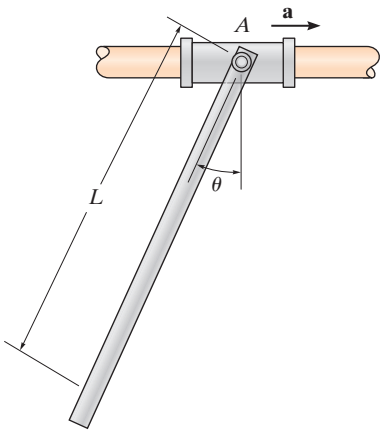
Prob. 17-42

17-43. Determine la aceleración del gabinete de 150 lb y la reacción normal bajo las patas A y B, si $P = 35$ lb. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el gabinete y el plano son $\mu_s = 0.2$ y $\mu_k = 0.15$, respectivamente. El centro de gravedad del gabinete se encuentra en G.



Prob. 17-43

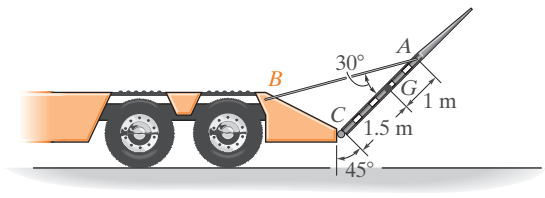
***17-44.** La barra uniforme de masa m está conectada mediante un pasador al collarín, que se desliza a lo largo de la varilla horizontal lisa. Si el collarín recibe una aceleración constante de **a**, determine el ángulo de inclinación θ de la barra. Desprecie la masa del collarín.



Prob. 17-44

17-45. La compuerta de descarga en el extremo del remolque tiene una masa de 1.25 Mg y centro de masa en G. Si se sostiene mediante el cable AB y la bisagra en C, determine la tensión en el cable cuando el camión empieza a acelerar a 5 m/s^2. Además, ¿cuáles son las componentes horizontal y vertical de la reacción en la bisagra C?

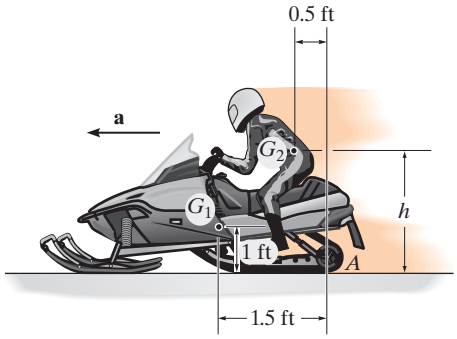
17-46. La compuerta de descarga en el extremo del remolque tiene una masa de 1.25 Mg y centro de masa en G. Si se sostiene mediante el cable AB y la bisagra en C, determine la desaceleración máxima del camión tal que la compuerta no empiece a girar hacia adelante. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la reacción en la bisagra C?



Probs. 17-45/46

17-47. La motonieve tiene un peso de 250 lb, concentrado en G_1, mientras que el piloto tiene un peso de 150 lb, concentrado en G_2. Si la aceleración es $a = 20$ ft/s^2, determine la altura máxima h del G_2 del piloto, de modo que el patín delantero de la motonieve no se levante del suelo. Además, ¿cuáles son la fuerza (horizontal) de tracción y la reacción normal debajo de las orugas traseras en A?

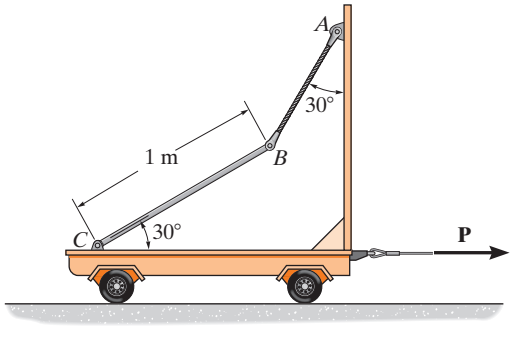
***17-48.** La motonieve tiene un peso de 250 lb, concentrado en G_1, mientras que el piloto tiene un peso de 150 lb, concentrado en G_2. Si $h = 3$ ft, determine la aceleración máxima permisible **a**, de modo que su patín delantero no se levante del suelo. Además, determine la fuerza (horizontal) de tracción y la reacción normal debajo de las orugas traseras en A.



Probs. 17-47/48

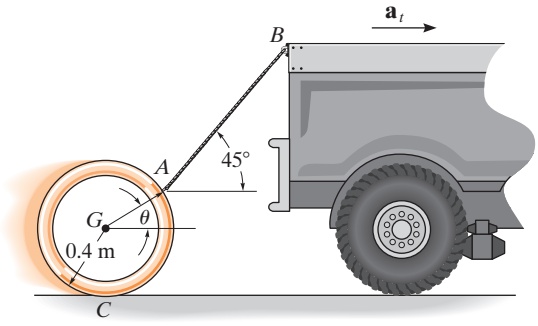
17-49. Si la masa de la carretilla es de 30 kg y se somete a una fuerza horizontal de $P = 90$ N, determine la tensión en la cuerda AB y las componentes horizontal y vertical de la reacción, en el extremo C de la varilla uniforme BC de 15 kg.

17-50. Si la masa de la carretilla es de 30 kg, determine la fuerza horizontal P que se debería aplicar a la carretilla, de modo que la cuerda AB apenas se ponga floja. La varilla uniforme BC tiene una masa de 15 kg.



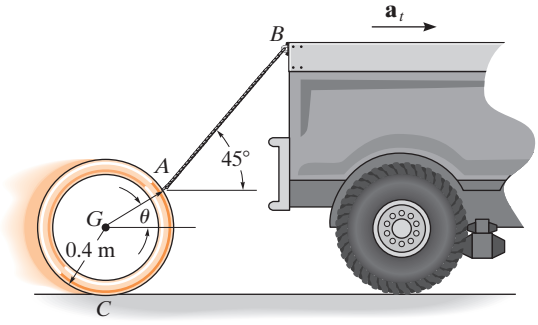
Probs. 17-49/50

17-51. El tubo tiene una masa de 800 kg y está siendo remolcado por una camioneta. Si la aceleración de la camioneta es $a_t = 0.5\ \text{m/s}^2$, determine el ángulo θ y la tensión en el cable. El coeficiente de fricción cinética entre el tubo y el suelo es $\mu_k = 0.1$.



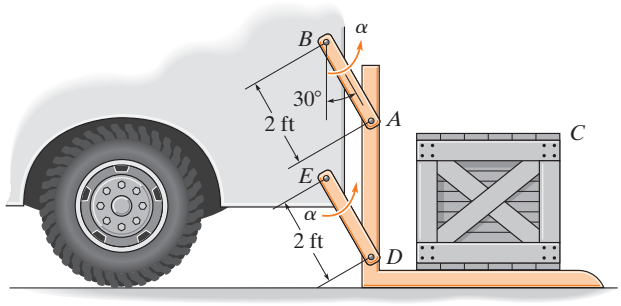
Prob. 17-51

***17-52.** El tubo tiene una masa de 800 kg y está siendo remolcado por una camioneta. Si el ángulo $\theta = 30°$, determine la aceleración de la camioneta y la tensión en el cable. El coeficiente de fricción cinética entre la tubería y el suelo es $\mu_k = 0.1$.



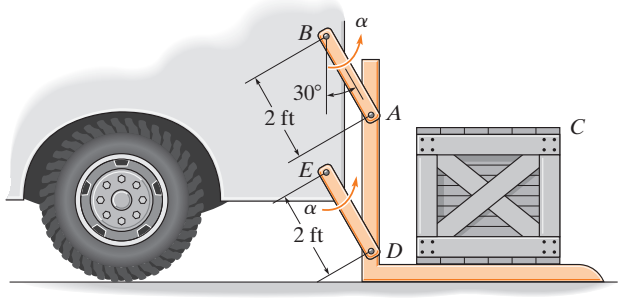
Prob. 17-52

17-53. La caja C tiene un peso de 150 lb y descansa en el elevador del camión, cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.4$. Determine la máxima aceleración angular inicial α, partiendo del reposo, que pueden tener los eslabones paralelos AB y DE, sin ocasionar que la caja se deslice. No se presenta inclinación.



Prob. 17-53

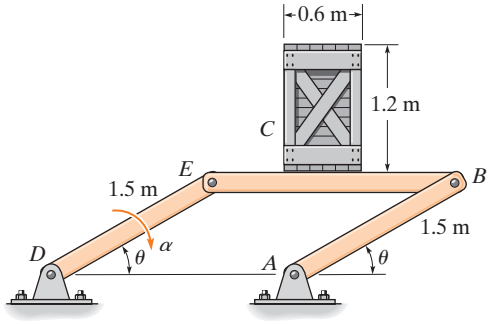
17-54. La caja C tiene un peso de 150 lb y descansa en el elevador del camión. Determine la fricción inicial y la fuerza normal del elevador sobre la caja, si los eslabones paralelos reciben una aceleración angular $\alpha = 2\ \text{rad/s}^2$ partiendo del reposo.



Prob. 17-54

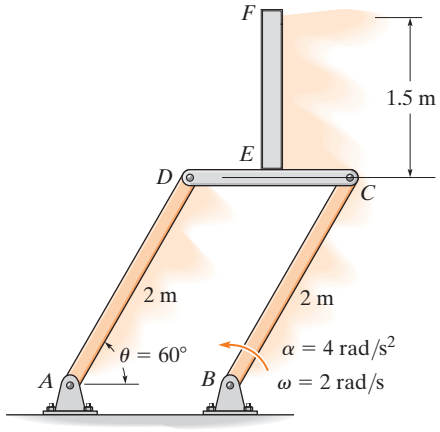
17

17-55. La caja uniforme C de 100 kg descansa sobre el suelo del elevador, donde el coeficiente de fricción estática $\mu_s = 0.4$. Determine la mayor aceleración angular inicial α, partiendo desde el reposo en $\theta = 90°$, sin ocasionar que la caja se deslice. No se produce inclinación.



Prob. 17-55

***17-56.** Las dos barras uniformes de 4 kg DC y EF están fijas (soldadas) a E. Determine la fuerza normal N_E, la fuerza cortante V_E y el momento M_E que DC ejerce sobre EF en E, si en el instante $\theta = 60°$ BC tiene una velocidad angular $\omega = 2$ rad/s y una aceleración angular $\alpha = 4$ rad/s^2 como se indica en la figura.

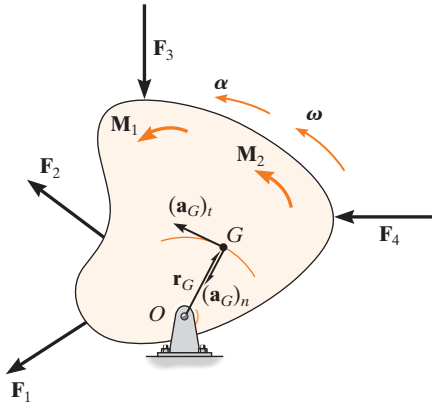


Prob. 17-56

17

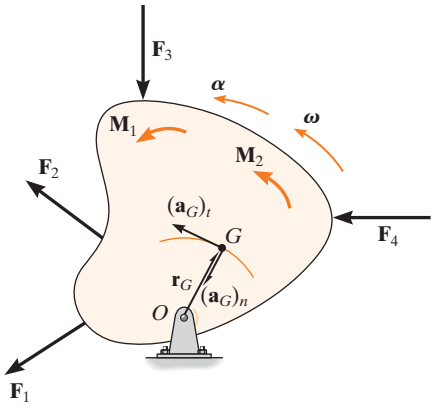
17.4 Ecuaciones de movimiento: rotación alrededor de un eje fijo

Considere el cuerpo rígido (o losa) de la figura 17-13*a*, el cual está limitado a girar en el plano vertical alrededor de un eje fijo perpendicular a la página y que pasa por el pasador en O. El sistema de fuerzas externas y momentos de par que actúa en el cuerpo produce la velocidad y aceleración angulares. Como el centro de masa G del cuerpo describe una *trayectoria circular*, su aceleración se representa mejor usando sus componentes tangencial y normal. La *componente tangencial de la aceleración* tiene una *magnitud* de $(a_G)_t = \alpha r_G$ y debe actuar en la *dirección compatible* con la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo. La *magnitud* de la *componente normal de la aceleración es* $(a_G)_n = \omega^2 r_G$. Esta componente *siempre está dirigida* del punto G a O, sin importar el sentido de rotación de $\boldsymbol{\omega}$.



(a)

Fig. 17-13



(a)

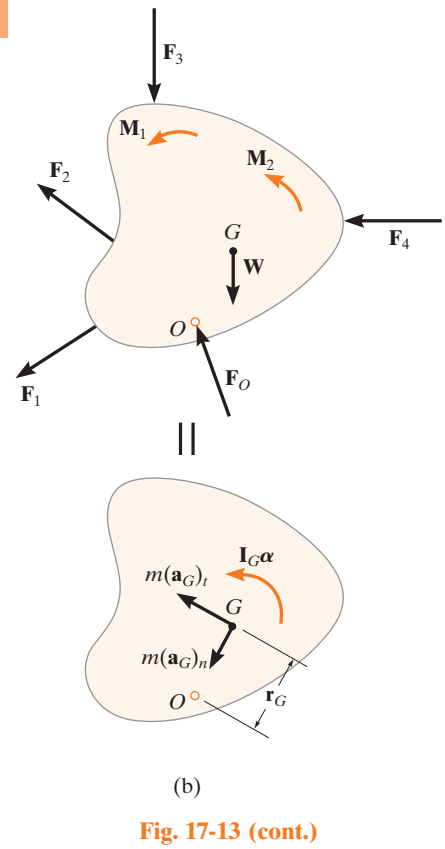
Fig. 17-13 (reiterada)

Los diagramas de cuerpo libre y cinético del cuerpo se muestran en la figura 17-13*b*. Las dos componentes $m(\mathbf{a}_G)_t$ y $m(\mathbf{a}_G)_n$, que se muestran en el diagrama cinético, están asociadas con las componentes tangencial y normal de la aceleración del centro de masa del cuerpo. El vector $I_G\boldsymbol{\alpha}$ actúa en la misma *dirección* que $\boldsymbol{\alpha}$ y su *magnitud* es $I_G\alpha$, donde I_G es el momento de inercia del cuerpo, calculado con respecto a un eje perpendicular a la página y que pasa por G. Según la derivación dada en el sección 17-2, las ecuaciones de movimiento aplicables al cuerpo se escriben en la forma

$$\begin{aligned} \Sigma F_n &= m(a_G)_n = m\omega^2 r_G \\ \Sigma F_t &= m(a_G)_t = m\alpha r_G \\ \Sigma M_G &= I_G\alpha \end{aligned} \tag{17-14}$$

La ecuación de momentos puede ser reemplazada por una suma de momentos con respecto a cualquier punto arbitrario P en el cuerpo o fuera de éste, siempre que se tengan en cuenta los momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$ producidos por $I_G\boldsymbol{\alpha}$, $m(\mathbf{a}_G)_t$ y $m(\mathbf{a}_G)_n$ con respecto al punto.

17



(b)

Fig. 17-13 (cont.)

Ecuación de momentos respecto al punto O. Con frecuencia resulta conveniente sumar los momentos con respecto al pasador en O para eliminar la fuerza *desconocida* $\mathbf{F}_O$. Según el diagrama cinético (fig. 17-13*b*), esto requiere

$$\circlearrowright + \Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O; \qquad \Sigma M_O = r_G m(a_G)_t + I_G\alpha \tag{17-15}$$

Observe que el momento de $m(\mathbf{a}_G)_n$ no se incluye aquí, puesto que la línea de acción de este vector pasa por O. Si sustituimos $(a_G)_t = r_G a$, podemos volver a escribir la ecuación anterior como $\circlearrowright + \Sigma M_O = (I_G + mr_G^2)\alpha$. Según el teorema de los ejes paralelos, $I_O = I_G + md^2$ y, por consiguiente, el término entre paréntesis representa el *momento de inercia del cuerpo con respecto al eje de rotación fijo que pasa por* O*. Entonces, podemos escribir las tres ecuaciones de movimiento para el cuerpo como

$$\begin{aligned} \Sigma F_n &= m(a_G)_n = m\omega^2 r_G \\ \Sigma F_t &= m(a_G)_t = m\alpha r_G \\ \Sigma M_O &= I_O\alpha \end{aligned} \tag{17-16}$$

Cuando se utilicen estas ecuaciones, recuerde que "$I_O\alpha$" incluye el "momento" *tanto* de $m(\mathbf{a}_G)_t$ *como* de $I_G\boldsymbol{\alpha}$ con respecto al punto O (fig. 17-13*b*). Expresado de otra manera, $\Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O = I_O a$, como indican las ecuaciones 17-15 y 17-16.

*El resultado $\Sigma M_O = I_O a$ también puede obtenerse *de forma directa* con la ecuación 17-6, si se selecciona un punto P que coincida con O, habida cuenta de que $(a_P)_x = (a_P)_y = 0$.

Procedimiento para el análisis

Los problemas cinéticos que implican la rotación de un cuerpo alrededor de un eje fijo se resuelven con el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre

- Establezca el sistema de coordenadas n, t inercial y especifique la dirección y el sentido de las aceleraciones $(\mathbf{a}_G)_n$ y $(\mathbf{a}_G)_t$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo. Recuerde que $(\mathbf{a}_G)_t$ debe actuar en una dirección que concuerde con el sentido de rotación de $\boldsymbol{\alpha}$, mientras que $(\mathbf{a}_G)_n$ siempre actúa hacia el eje de rotación, punto O.
- Trace el diagrama de cuerpo libre que incluya todas las fuerzas externas y los momentos de par que actúan en el cuerpo.
- Determine el momento de inercia I_G o I_O.
- Identifique las incógnitas en el problema.
- Si decide utilizar la ecuación de movimiento de rotación $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$, es decir, P es un punto diferente de G u O, entonces considere trazar el diagrama cinético para que le ayude a "visualizar" los "momentos" desarrollados por las componentes $m(\mathbf{a}_G)_n$, $m(\mathbf{a}_G)_t$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$ cuando escriba los términos de la suma de momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.

Ecuaciones de movimiento

- Aplique las tres ecuaciones de movimiento según la convención de signos establecida.
- Si se suman los momentos con respecto al centro de masa, G, del cuerpo, entonces $\Sigma M_G = I_G\alpha$, ya que $(m\mathbf{a}_G)_t$ y $(m\mathbf{a}_G)_n$ no crean momentos con respecto a G.
- Si se suman los momentos con respecto al pasador de soporte O sobre el eje de rotación, entonces $(m\mathbf{a}_G)_n$ no crea momentos con respecto a O y puede demostrarse que $\Sigma M_O = I_O\alpha$.

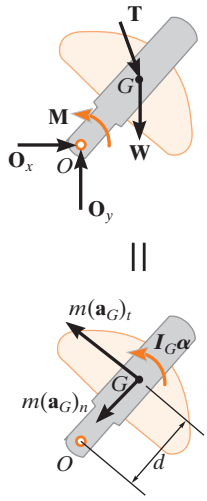
Cinemática

- Use cinemática si no puede obtenerse una solución completa estrictamente con las ecuaciones de movimiento.
- Si la aceleración angular es variable, utilice

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \alpha\, d\theta = \omega\, d\omega \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

- Si la aceleración angular es constante, utilice

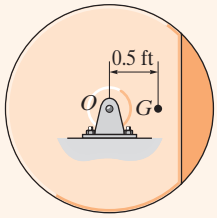
$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$



La manivela del equipo de bombeo de petróleo experimenta rotación con respecto a un eje fijo, generada por un par de torsión impulsor **M** del motor. Las cargas que se muestran en el diagrama de cuerpo libre provocan los efectos mostrados en el diagrama cinético. Si se suman los momentos con respecto al centro de masa, G, entonces $\Sigma M_G = I_G a$. Sin embargo, si los momentos se suman con respecto al punto O, como $(a_G)_t = \alpha d$, entonces $\circlearrowright + \Sigma M_O = I_G\alpha + m(a_G)_t d + m(a_G)_n(0) = (I_G + md^2)\alpha = I_O\alpha$. (© R. C. Hibbeler)

17

EJEMPLO 17.8



(a)

El volante desbalanceado de 50 lb que se muestra en la figura 17-14*a* tiene un radio de giro de $k_G = 0.6$ ft con respecto a un eje que pasa por su centro de masa G. Si se pone en movimiento desde el punto de reposo, determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador O.

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre y cinético. Como G describe una trayectoria circular, la aceleración tendrá componentes tanto tangenciales como normales. Asimismo, como α, la cual es originada por el contrapeso del volante, actúa en sentido horario, la componente tangencial de la aceleración debe actuar hacia abajo. ¿Por qué? Como $\omega = 0$, sólo $m(a_G)_t = m\alpha r_G$ e $I_G\alpha$ aparecen en el diagrama cinemático de la figura 17-14*b*. Aquí, el momento de inercia con respecto a G es

$$I_G = mk_G^2 = (50 \text{ lb}/32.2 \text{ ft/s}^2)(0.6 \text{ ft})^2 = 0.559 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$$

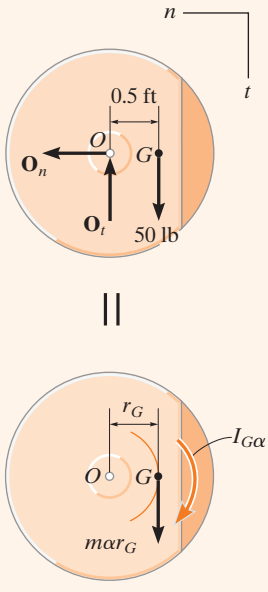
Las tres incógnitas son O_n, O_t y α.

Ecuaciones de movimiento

$$\pm\, \Sigma F_n = m\omega^2 r_G; \qquad O_n = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

$$+\downarrow \Sigma F_t = m\alpha r_G; \qquad -O_t + 50 \text{ lb} = \left(\frac{50 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}\right)(\alpha)(0.5 \text{ ft}) \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = I_G\alpha; \qquad O_t(0.5 \text{ ft}) = (0.5590 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2)\alpha$$



(b)

Fig. 17-14

Resolvemos,

$$\alpha = 26.4 \text{ rad/s}^2 \qquad O_t = 29.5 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

Los momentos también pueden sumarse con respecto al punto O para eliminar $\mathbf{O}_n$ y $\mathbf{O}_t$ y obtener así una *solución directa* de $\boldsymbol{\alpha}$ (fig. 17-14*b*). Esto puede hacerse en una de *dos* maneras.

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O;$$

$$(50 \text{ lb})(0.5 \text{ ft}) = (0.5590 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2)\alpha + \left[\left(\frac{50 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}\right)\alpha(0.5 \text{ ft})\right](0.5 \text{ ft})$$

$$50 \text{ lb}(0.5 \text{ ft}) = 0.9472\alpha \qquad (2)$$

Si se aplica $\Sigma M_O = I_O\alpha$, entonces, de acuerdo con el teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia del volante con respecto a O es

$$I_O = I_G + mr_G^2 = 0.559 + \left(\frac{50}{32.2}\right)(0.5)^2 = 0.9472 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$$

Por consiguiente,

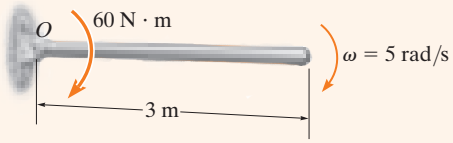
$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha; \quad (50 \text{ lb})(0.5 \text{ ft}) = (0.9472 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2)\alpha$$

la cual es la misma que la ecuación 2. Al despejar α y sustituir en la ecuación 1, se obtiene la respuesta para O_t previamente obtenida.

17

EJEMPLO 17.9

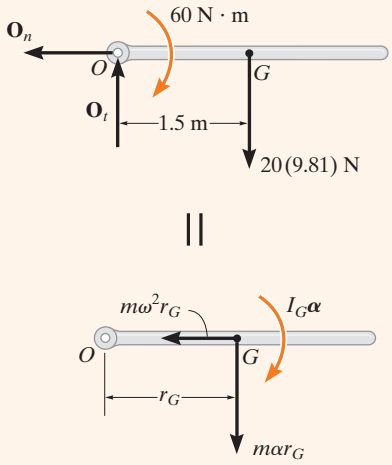
En el instante que se muestra en la figura 17-15a, la varilla de 20 kg tiene una velocidad angular de $\omega = 5$ rad/s. Determine la aceleración angular y las componentes horizontal y vertical de la reacción del pasador en la varilla en este instante.



(a)

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre y cinético. Figura 17-15*b*. Como se indica en el diagrama cinético, el punto G describe una trayectoria circular y, por lo tanto, tiene dos componentes de aceleración. Es importante que la componente tangencial $a_t = \alpha r_G$ actúe hacia abajo, ya que debe concordar con el sentido de rotación de $\boldsymbol{\alpha}$. Las tres incógnitas son O_n, O_t y a.



(b)

Fig. 17-15

Ecuación de movimiento

$$\pm\Sigma F_n = m\omega^2 r_G; \qquad O_n = (20\text{ kg})(5\text{ rad/s})^2(1.5\text{ m})$$

$$+\downarrow\Sigma F_t = m\alpha r_G; \qquad -O_t + 20(9.81)\text{N} = (20\text{ kg})(\alpha)(1.5\text{ m})$$

$$\curvearrowleft +\Sigma M_G = I_G\alpha; \qquad O_t(1.5\text{ m}) + 60\text{ N}\cdot\text{m} = \left[\tfrac{1}{12}(20\text{ kg})(3\text{ m})^2\right]\alpha$$

Al resolver,

$$O_n = 750\text{ N} \quad O_t = 19.05\text{ N} \quad \alpha = 5.90\text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Una solución más directa de este problema sería sumar los momentos con respecto al punto O para eliminar $\mathbf{O}_n$ y $\mathbf{O}_t$ y obtener una *solución directa* para a. Entonces,

$$\curvearrowleft +\Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O;\ 60\text{ N}\cdot\text{m} + 20(9.81)\text{ N}(1.5\text{ m}) = \left[\tfrac{1}{12}(20\text{ kg})(3\text{ m})^2\right]\alpha + [20\text{ kg}(\alpha)(1.5\text{ m})](1.5\text{ m})$$

$$\alpha = 5.90\text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

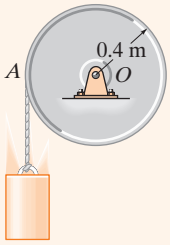
Asimismo, como $I_O = \frac{1}{3}ml^2$ para una varilla delgada, aplicamos

$$\curvearrowleft +\Sigma M_O = I_O\alpha;\ 60\text{ N}\cdot\text{m} + 20(9.81)\text{ N}(1.5\text{ m}) = \left[\tfrac{1}{3}(20\text{ kg})(3\text{ m})^2\right]\alpha$$

$$\alpha = 5.90\text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Por comparación, la última ecuación da la solución más sencilla para a y *no* requiere utilizar el diagrama cinético.

EJEMPLO 17.10



(a)

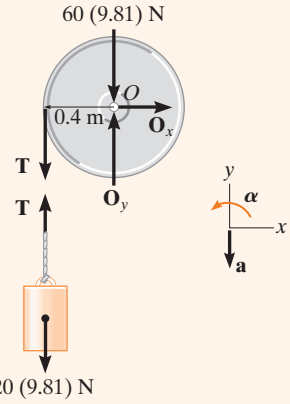
El tambor que se muestra en la figura 17-17*a* tiene una masa de 60 kg y un radio de giro $k_O = 0.25$ m. Una cuerda, cuya masa no se toma en cuenta, se enrolla alrededor de la periferia del tambor y está sujeta a un bloque de 20 kg de masa. Si éste se suelta desde el punto de reposo, determine la aceleración angular del tambor.

SOLUCIÓN 1

Diagrama de cuerpo libre. Consideraremos el tambor y el bloque por separado (fig. 17-16*b*). Supongamos que el bloque se acelera *hacia abajo* a **a,** y crea una aceleración angular en *sentido antihorario* $\boldsymbol{\alpha}$ del tambor. El momento de inercia de éste es

$$I_O = mk_O^2 = (60\text{ kg})(0.25\text{ m})^2 = 3.75\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Hay tres incógnitas, es decir, O_x, O_y, T, a y α.



(b)

Ecuaciones de movimiento. La aplicación de las ecuaciones de movimiento de traslación $\Sigma F_x = m(a_G)_x$ y $\Sigma F_y = m(a_G)_y$ al tambor no afecta la solución, ya que estas ecuaciones implican las incógnitas O_x y O_y. Por lo tanto, para el tambor y el bloque, respectivamente,

$$\curvearrowleft +\Sigma M_O = I_O\alpha; \qquad T(0.4\text{ m}) = (3.75\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha \tag{1}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad -20(9.81)\text{N} + T = -(20\text{ kg})a \tag{2}$$

Cinemática. Como el punto de contacto A entre la cuerda y el tambor tiene una componente tangencial de aceleración **a** (fig. 17-16*a*), entonces

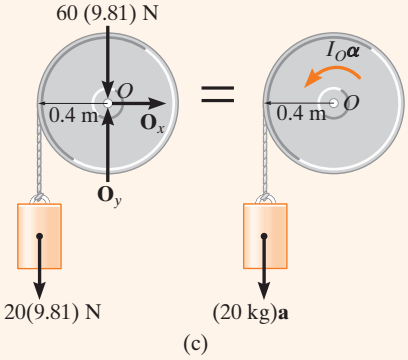
$$\curvearrowleft +a = \alpha r; \qquad a = \alpha(0.4\text{ m}) \tag{3}$$

Al resolver las ecuaciones anteriores,

$$T = 106\text{ N} \quad a = 4.52\text{ m/s}^2$$
$$\alpha = 11.3\text{ rad/s}^2\curvearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

SOLUCIÓN II

Diagramas de cuerpo libre y cinética. La tensión T en el cable puede eliminarse del análisis, si se consideran el tambor y el bloque como un *solo sistema* (fig. 17-16*c*). Se muestra el diagrama cinético pues los momentos se sumarán con respecto al punto O.



(c)

Fig. 17-16

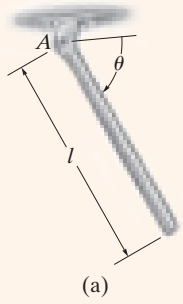
Ecuaciones de movimiento. Si utilizamos la ecuación 3 y aplicamos la ecuación de momentos con respecto a O para eliminar las incógnitas O_x, O_y, tenemos

$$\curvearrowleft +\Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O; \qquad [20(9.81)\text{ N}]\,(0.4\text{ m}) =$$
$$(3.75\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha + [20\text{ kg}(\alpha\ 0.4\text{ m})](0.4\text{ m})$$
$$\alpha = 11.3\text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Si se *quitara* el bloque y se aplicara una fuerza de 20(9.81) N a la cuerda, demuestre que $\alpha = 20.9\text{ rad/s}^2$. Este valor es grande porque el bloque tiene una inercia o resistencia a la aceleración.

EJEMPLO 17.11

La varilla delgada de la figura 17-17*a* tiene una masa m y una longitud l y se suelta del punto de reposo cuando $\theta = 0°$. Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que el pasador A ejerce en la varilla cuando $\theta = 90°$.



(a)

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre y cinemático. El diagrama de cuerpo libre de la varilla en la posición general θ se ilustra en la figura 17-17*b*. Por conveniencia, las componentes de la fuerza en A se muestran al actuar en las direcciones n y t. Observe que $\boldsymbol{\alpha}$ actúa en sentido horario y, por ende, $(\mathbf{a}_G)_t$ actúa en la dirección $+t$.

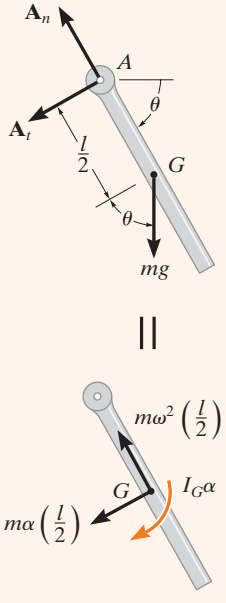
El momento de inercia de la varilla con respecto al punto A es $I_A = \frac{1}{3}ml^2$.

Ecuaciones de movimiento. Los momentos se sumarán con respecto a A para eliminar A_n y A_t.

$$+\nwarrow \Sigma F_n = m\omega^2 r_G; \qquad A_n - mg \operatorname{sen}\theta = m\omega^2(l/2) \tag{1}$$

$$+\swarrow \Sigma F_t = m\alpha r_G; \qquad A_t + mg\cos\theta = m\alpha(l/2) \tag{2}$$

$$\curvearrowright +\Sigma M_A = I_A\alpha; \qquad mg\cos\theta(l/2) = \left(\tfrac{1}{3}ml^2\right)\alpha \tag{3}$$



(b)

Fig. 17-17

Cinemática. Para un ángulo dado θ existen cuatro incógnitas en las tres ecuaciones anteriores: A_n, A_t, ω y α. Como se muestra en la ecuación 3, *a no es constante*; más bien, depende de la posición θ de la varilla. La cuarta ecuación necesaria se obtiene por cinemática, donde α y ω pueden relacionarse con θ mediante la ecuación

$$(\curvearrowright +) \qquad \omega\, d\omega = \alpha\, d\theta \tag{4}$$

Observe que la dirección positiva en sentido horario en esta ecuación *concuerda* con la de la ecuación 3. Esto es importante ya que estamos buscando una solución simultánea.

Para determinar ω cuando $\theta = 90°$, elimine a de las ecuaciones 3 y 4, para obtener

$$\omega\, d\omega = (1.5g/l)\cos\theta\, d\theta$$

Como $\omega = 0$ cuando $\theta = 0°$, tenemos

$$\int_0^{\omega} \omega\, d\omega = (1.5g/l)\int_{0°}^{90°} \cos\theta\, d\theta$$

$$\omega^2 = 3g/l$$

Al sustituir este valor en la ecuación 1 con $\theta = 90°$ y al resolver las ecuaciones 1 a 3 da como resultado

$$\alpha = 0$$

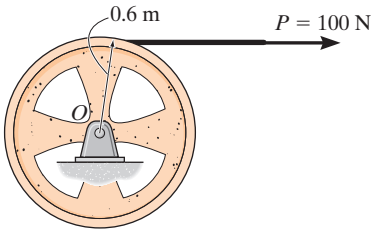
$$A_t = 0 \quad A_n = 2.5\, mg \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Si se utiliza $\Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A$, hay que tener en cuenta los momentos de $I_G\boldsymbol{\alpha}$ y $m(\mathbf{a}_G)_t$ con respecto a A.

17

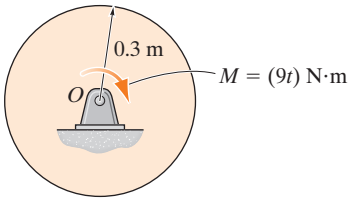
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F17-7. La rueda de 100 kg tiene un radio de giro alrededor de su centro O de $k_O = 500$ mm. Si comienza a rodar desde el punto de reposo, determine su velocidad angular en $t = 3$ s.



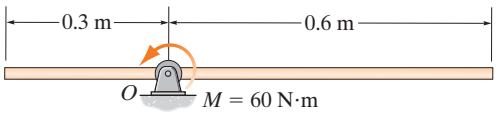
Prob. F17-7

F17-8. El disco de 50 kg se somete a un momento de par de $M = (9t)$ N · m, donde t está en segundos. Determine la velocidad angular del disco cuando $t = 4$ s a partir del punto de reposo.



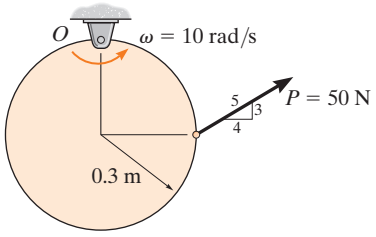
Prob. F17-8

F17-9. En el instante que se muestra, la varilla delgada uniforme de 30 kg tiene una velocidad angular en sentido antihorario de $\omega = 6$ rad/s. Determine las componentes tangencial y normal de la reacción del perno O en la varilla y la aceleración angular de ésta en ese instante.



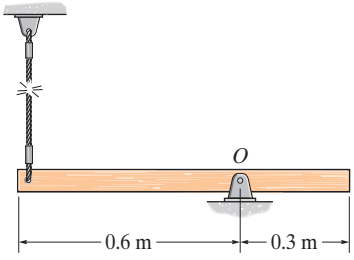
Prob. F17-9

F17-10. En el instante que se muestra, el disco de 30 kg tiene una velocidad angular en sentido antihorario de $\omega = 10$ rad/s. Determine las componentes tangencial y normal de la reacción del perno O en el disco y la aceleración angular del disco en este instante.



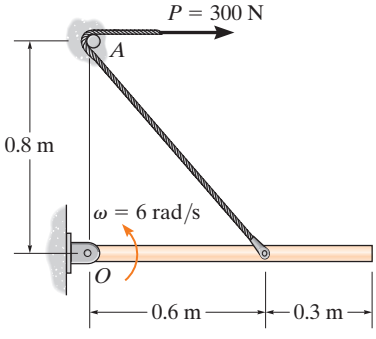
Prob. F17-10

F17-11. La varilla delgada uniforme tiene una masa de 15 kg. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el perno O y la aceleración angular de la varilla justo después de que se corta la cuerda.



Prob. F17-11

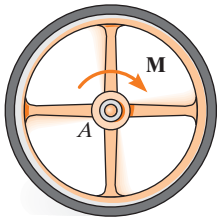
F17-12. A la varilla delgada uniforme de 30 kg la jala la cuerda que pasa sobre la pequeña clavija lisa A. Si la varilla tiene una velocidad angular de $\omega = 6$ rad/s en sentido antihorario en el instante que se indica, determine las componentes tangencial y normal de la reacción en el perno O y la aceleración angular de la varilla.



Prob. F17-12

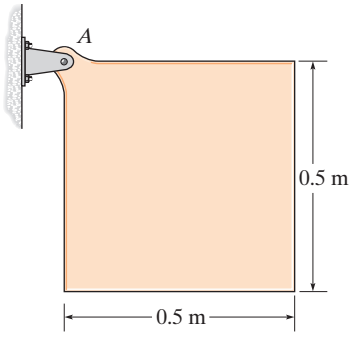
PROBLEMAS

17-57. La rueda de 10 kg tiene un radio de giro $k_A = 200$ mm. Si la rueda se somete a un momento $M = (5t)$ N · m, donde t se da en segundos, determine su velocidad angular cuando $t = 3$ s si parte desde el reposo. Además, calcule las reacciones que ejerce el pasador fijo A sobre la rueda durante el movimiento.



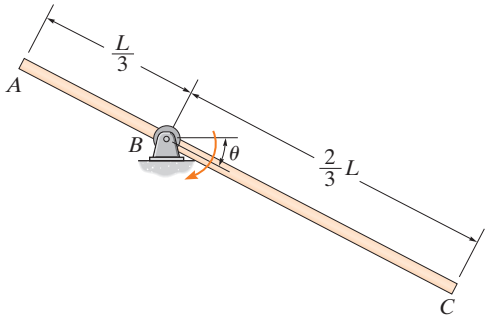
Prob. 17-57

17-58. La placa uniforme de 24 kg se libera desde el reposo en la posición indicada. Determine su aceleración angular inicial y las reacciones horizontal y vertical en el pasador A.



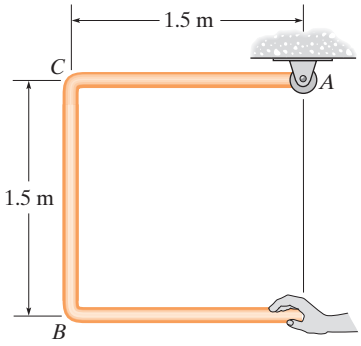
Prob. 17-58

17-59. La varilla delgada uniforme tiene una masa m. Si se libera desde el reposo cuando $\theta = 0°$, determine la magnitud de la fuerza de reacción que ejerce el pasador B sobre ella cuando $\theta = 90°$.



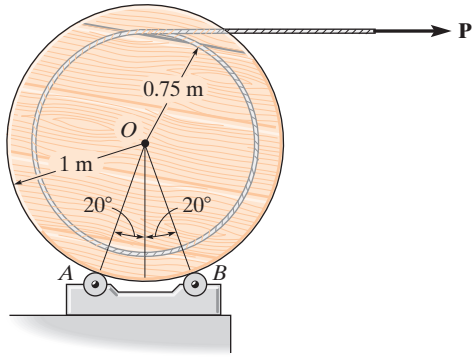
Prob. 17-59

***17-60.** La varilla doblada tiene una masa de 2 kg/m. Si se libera desde el reposo en la posición indicada, determine su aceleración angular inicial y las componentes horizontal y vertical de la reacción en A.



Prob. 17-60

17-61. Si se aplica una fuerza horizontal de $P = 100$ N al carrete de cable de 300 kg, determine su aceleración angular inicial. El carrete descansa sobre rodillos en A y B y tiene un radio de giro de $k_O = 0.6$ m.

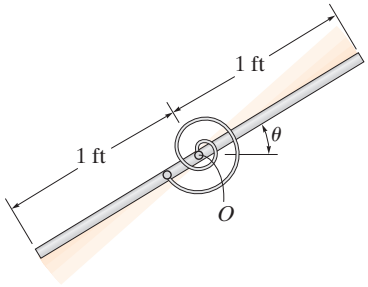


Prob. 17-61

17

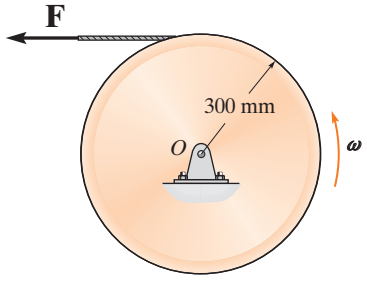
17-62. La barra de 10 lb está articulada en su centro O y conectada a un resorte de torsión. El resorte tiene una rigidez $k = 5$ lb · ft/rad, de modo que el par de torsión desarrollado es $M = (5\theta)$ lb · ft, donde θ está en radianes. Si la barra se libera desde el reposo, cuando está en posición vertical en $\theta = 90°$, determine su velocidad angular en el instante $\theta = 0°$.

17-63. La barra de 10 lb está articulada en su centro O y conectada a un resorte de torsión. El resorte tiene una rigidez $k = 5$ lb · ft/rad, de modo que el par de torsión desarrollado es $M = (5\theta)$ lb · ft, donde θ está en radianes. Si la barra se libera desde el reposo cuando está en posición vertical en $\theta = 90°$, determine su velocidad angular en el instante $\theta = 45°$.



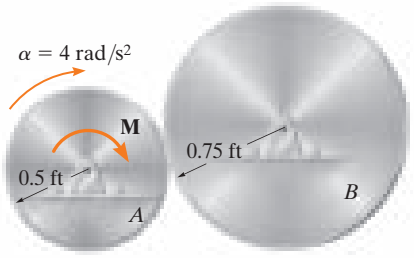
Probs. 17-62/63

***17-64.** Una cuerda se enrolla alrededor de la superficie exterior del disco de 8 kg. Si se aplica sobre la cuerda una fuerza de $F = (¼\theta^2)$N, donde θ está en radianes, determine la aceleración angular del disco cuando ha girado 5 revoluciones. El disco tiene una velocidad angular inicial de $\omega_0 = 1$ rad/s.



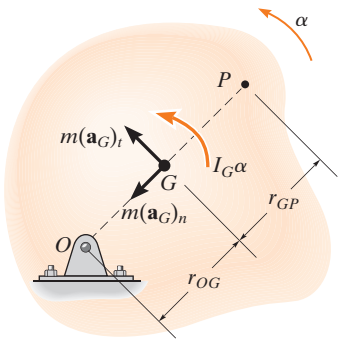
Prob. 17-64

17-65. Un disco A tiene un peso de 5 lb y el disco B tiene un peso de 10 lb. Si no ocurre deslizamiento entre ellos, determine el momento de par **M** que debe aplicarse al disco A para darle una aceleración angular de 4 rad/s^2.



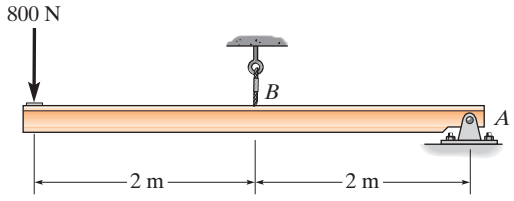
Prob. 17-65

17-66. En la figura se ilustra el diagrama cinético que representa el movimiento de rotación general de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo que pasa por O. Demuestre que $I_G\boldsymbol{\alpha}$ puede eliminarse al mover los vectores $m(\mathbf{a}_G)_t$ y $m(\mathbf{a}_G)_n$ hacia el punto P, ubicado a una distancia $r_{GP} = k^2_G/r_{OG}$ desde el centro de masa G del cuerpo. Aquí k_G representa el radio de giro del cuerpo alrededor de un eje que pasa a través de G. El punto P se denomina el *centro de percusión* del cuerpo.



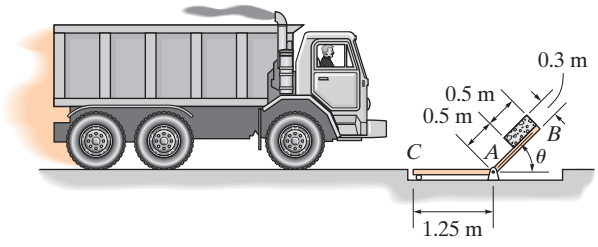
Prob. 17-66

17-67. Si la cuerda en B falla repentinamente, determine las componentes horizontal y vertical de la reacción inicial en el pasador A, y la aceleración angular de la viga de 120 kg. Trate la viga como una varilla delgada uniforme.



Prob. 17-67

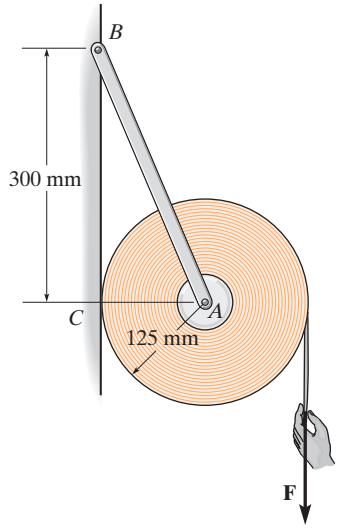
***17-68.** El dispositivo actúa como una barrera emergente para impedir el paso de un vehículo. Se compone de una placa de acero AC de 100 kg y un bloque sólido de concreto de 200 kg, el cual actúa como contrapeso y se ubica de la manera indicada. Determine el momento de inercia de la placa y el bloque con respecto al eje articulado que pasa a través de A. Desprecie la masa de los brazos de soporte AB. Asimismo, determine la aceleración angular inicial del ensamble, cuando se libera desde el reposo en $\theta = 45°$.



Prob. 17-68

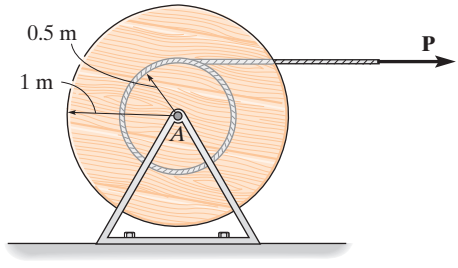
17-69. El rollo de papel de 20 kg tiene un radio de giro $k_A = 90$ mm alrededor de un eje que pasa por el punto A. Se sostiene con pasadores en ambos extremos mediante dos soportes AB. Si el rollo se sostiene contra una pared para la cual el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.2$ y una fuerza vertical $F = 30$ N aplicada en el extremo del papel, determine la aceleración angular del rollo conforme el papel se desenrolla .

17-70. El rollo de papel de 20 kg tiene un radio de giro $k_A = 90$ mm alrededor de un eje que pasa por el punto A. Se sostiene con pasadores en ambos extremos mediante dos soportes AB. Si el rollo se sostiene contra una pared, para la cual el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.2$, determine la fuerza vertical F constante que se debe aplicar al rollo para sacar 1 m de papel en $t = 3$ s partiendo del reposo. Desprecie la masa de papel que se saca.



Probs. 17-69/70

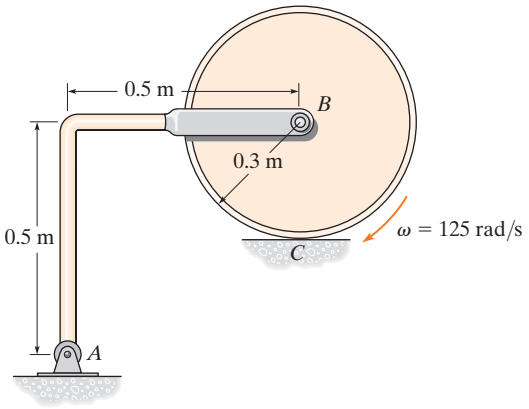
17-71. El carrete de cable tiene una masa de 400 kg y un radio de giro de $k_A = 0.75$ m. Determine su velocidad angular cuando $t = 2$ s, partiendo del reposo, si la fuerza $\mathbf{P} = (20t^2 + 80)$ N, cuando t se da en segundos. Desprecie la masa del cable desenrollado y suponga que siempre está a un radio de 0.5 m.



Prob. 17-71

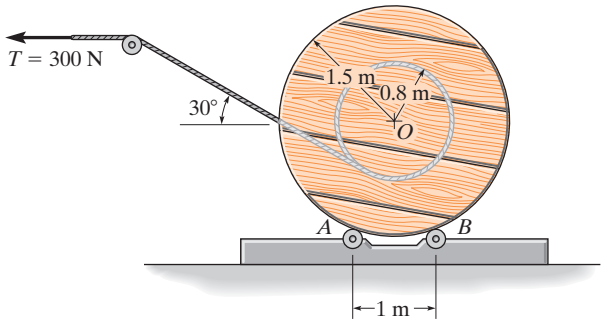
17

***17-72.** El disco de 30 kg está girando originalmente a $\omega = 125$ rad/s. Si se coloca sobre el suelo, cuyo coeficiente de fricción cinética es $\mu_C = 0.5$, determine el tiempo requerido para que termine el movimiento. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza que ejerce el elemento AB sobre el pasador en A durante este tiempo? Desprecie la masa de AB.



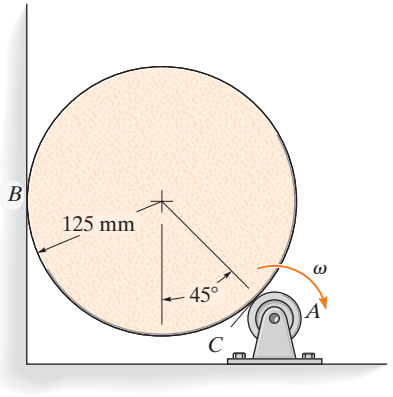
Prob. 17-72

17-73. El cable se desenrolla de un carrete apoyado sobre pequeños rodillos en A y B al ejercer una fuerza $T = 300$ N sobre el cable. Calcule el tiempo necesario para desenrollar 5 m de cable del carrete, si éste y el cable tienen una masa total de 600 kg y un radio de giro de $k_O = 1.2$ m. Para el cálculo, desprecie la masa del cable que se está desenrollando y la masa de los rodillos en A y B. Los rodillos giran sin fricción.



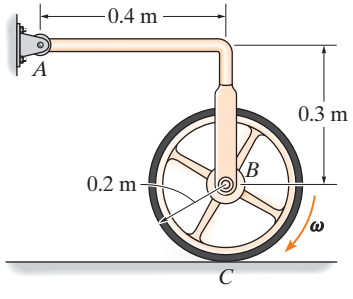
Prob. 17-73

17-74. En principio, el cilindro de 5 kg está en reposo cuando se le coloca en contacto con la pared B y el rotor A. Si el rotor mantiene siempre una velocidad angular constante en sentido horario de $\omega = 6$ rad/s, determine la aceleración angular inicial del cilindro. El coeficiente de fricción cinética en las superficies de contacto B y C es $\mu_k = 0.2$.



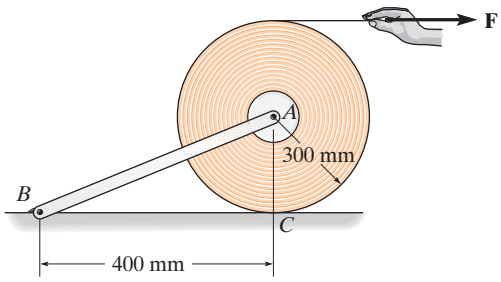
Prob. 17-74

17-75. La rueda tiene una masa de 25 kg y un radio de giro $k_B = 0.15$ m. En un principio gira a $\omega = 40$ rad/s. Si se coloca en el suelo, cuyo coeficiente de fricción cinética es $\mu_C = 0.5$, determine el tiempo requerido para que se detenga el movimiento. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la reacción que ejerce el pasador en A sobre AB durante este tiempo? Desprecie la masa de AB.



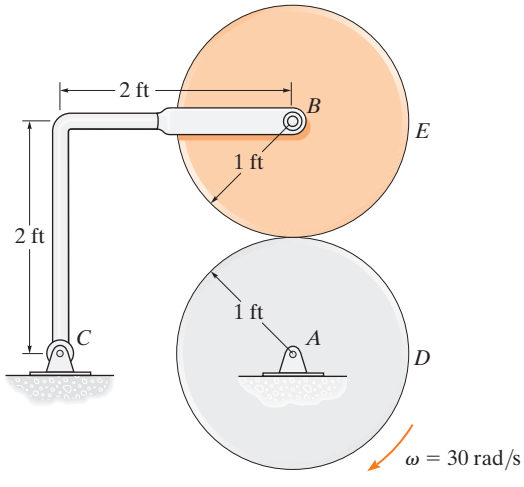
Prob. 17-75

***17-76.** El rollo de papel de 20 kg tiene un radio de giro $k_A = 120$ mm alrededor de un eje que pasa por el punto A. Se sostiene con pasadores en ambos extremos, mediante dos soportes AB. El rollo se apoya en el suelo, cuyo coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.2$. Si se aplica una fuerza horizontal $F = 60$ N al extremo del papel, determine la aceleración angular inicial del rollo a medida que se desenrolla el papel.



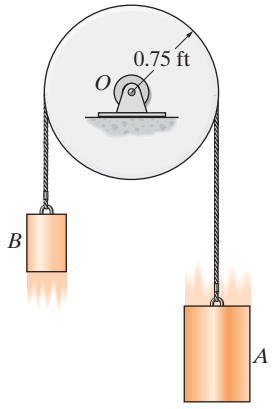
Prob. 17-76

17-77. El disco D gira a una velocidad angular constante en el sentido horario de 30 rad/s. El disco E pesa 60 lb e inicialmente está en reposo cuando se pone en contacto con D. Determine el tiempo requerido para que el disco E alcance la misma velocidad angular que el disco D. El coeficiente de fricción cinética entre los dos discos es $\mu_k = 0.3$. Desprecie el peso de la barra BC.



Prob. 17-77

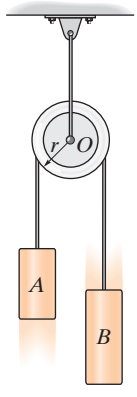
17-78. Dos cilindros A y B, que tienen un peso de 10 lb y 5 lb, respectivamente, están unidos a los extremos de una cuerda que pasa por una polea (de disco) de 3 lb. Si los cilindros se liberan desde el reposo, determine su rapidez en $t = 0.5$ s. La cuerda no se desliza sobre la polea. Desprecie la masa de la cuerda. *Sugerencia:* Analice el "sistema" que consiste en los cilindros y la polea.



Prob. 17-78

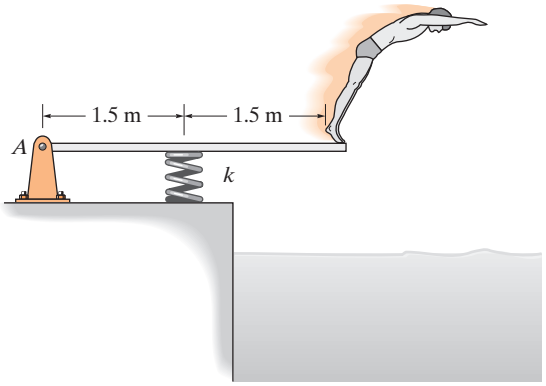
17-79. Los dos bloques A y B tienen una masa de 5 kg y 10 kg, respectivamente. Si la polea puede tratarse como un disco con masa de 3 kg y un radio de 0.15 m, determine la aceleración del bloque A. No tome en cuenta la masa de la cuerda ni cualquier deslizamiento sobre la polea.

***17-80.** Los dos bloques A y B tienen una masa m_A y m_B, respectivamente, donde $m_B > m_A$. Si la polea puede tratarse como un disco de masa M, determine la aceleración del bloque A. No tome en cuenta la masa de la cuerda ni cualquier deslizamiento sobre la polea.



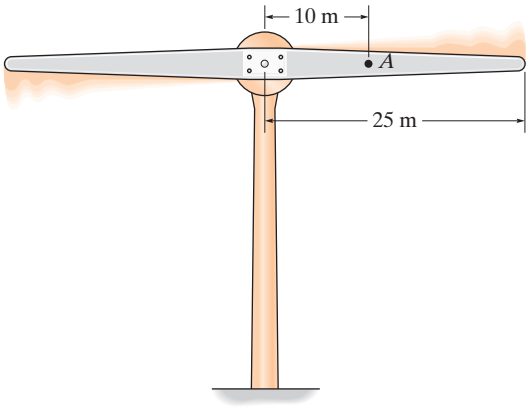
Probs. 17-79/80

17-81. Determine la aceleración angular del trampolín de 25 kg y las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador A en el instante en que el hombre salta. Suponga que el trampolín es uniforme y rígido y que, en el instante del salto, el resorte se comprime una cantidad máxima de 200 mm, $\omega = 0$, y el trampolín se encuentra en posición horizontal. Considere que $k = 7$ kN/m.



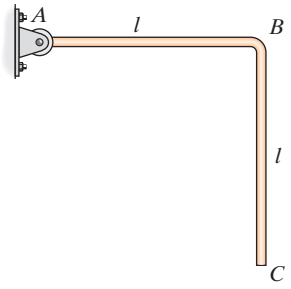
Prob. 17-81

17-82. La turbina ligera consta de un rotor accionado mediante un par de torsión aplicado en su centro. En el instante en que el rotor se encuentra en posición horizontal, tiene una velocidad angular de 15 rad/s y una aceleración angular en sentido horario de 8 rad/s^2. Determine la fuerza interna normal, la fuerza cortante y el momento en una sección que pasa a través de A. Suponga que el rotor es una varilla delgada de 50 m de longitud, con una masa de 3 kg/m.



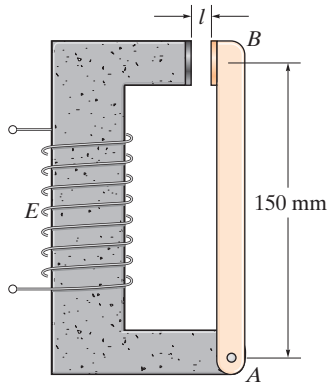
Prob. 17-82

17-83. El ensamble de dos barras se libera desde el reposo en la posición indicada. Determine el momento flexionante inicial en la junta fija B. Cada barra tiene una masa m y una longitud l.



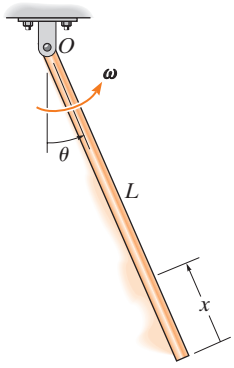
Prob. 17-83

***17-84.** La armadura (varilla delgada) AB tiene una masa de 0.2 kg y puede pivotar alrededor del pasador en A. El movimiento se controla mediante el electroimán E, que ejerce una fuerza de atracción horizontal sobre la armadura en B de $F_B = (0.2(10^{-3})l^{-2})$ N, donde l en metros es el espacio entre la armadura y el imán en cualquier instante. Si la armadura está en el plano horizontal y se encuentra originalmente en reposo, determine la rapidez del contacto en B el instante $l = 0.01$ m. Originalmente, $l = 0.02$ m.



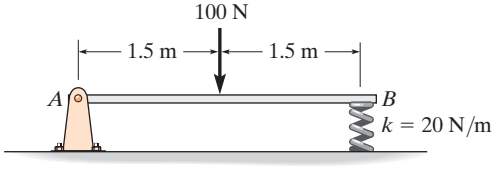
Prob. 17-84

17-85. La barra tiene un peso por unidad de longitud ω. Si gira en el plano vertical a razón constante ω alrededor del punto O, determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento en función de x y θ.



Prob. 17-85

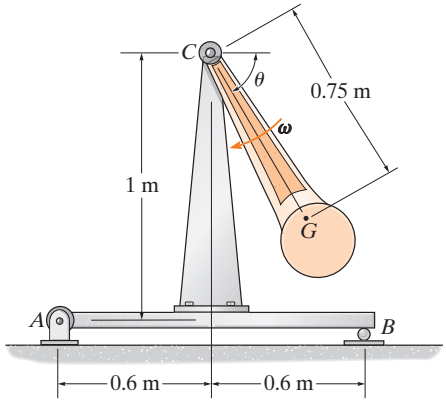
17-86. En un inicio, la varilla delgada de 4 kg se sostiene horizontalmente mediante un resorte en B y un pasador en A. Determine la aceleración angular de la varilla y la aceleración del centro de masa de la varilla en el instante en que se aplica la fuerza de 100 N.



Prob. 17-86

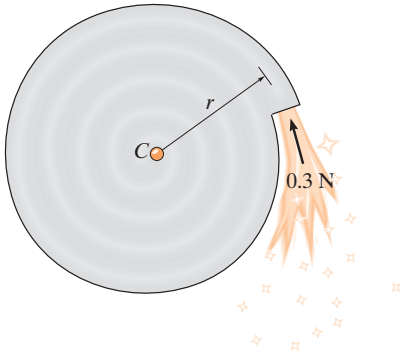
17-87. El péndulo de 100 kg tiene un centro de masa en G y un radio de giro con respecto a G de $k_G = 250$ mm. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción producida por el pasador A en la viga, así como la reacción normal del rodillo B, cuando $\theta = 90°$ si el péndulo gira a $\omega = 8$ rad/s. Desprecie el peso de la viga y del soporte.

***17-88.** El péndulo de 100 kg tiene un centro de masa en G y un radio de giro con respecto a G de $k_G = 250$ mm. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción producida por el pasador A en la viga, así como la reacción normal del rodillo B cuando $\theta = 0°$ si el péndulo gira a $\omega = 4$ rad/s. Desprecie el peso de la viga y del soporte.

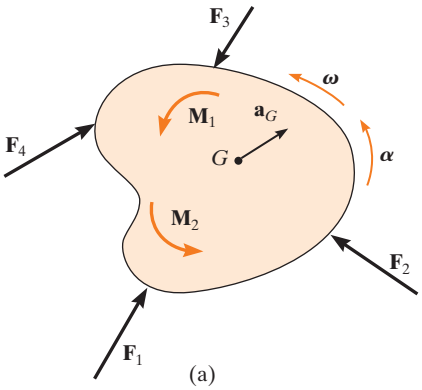


Probs. 17-87/88

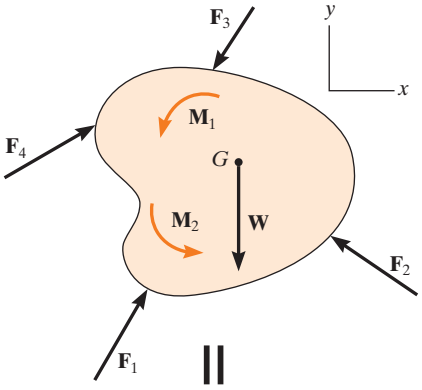
17-89. La "rueda de Catherine" es un fuego artificial que consiste en un tubo en espiral de polvo que está articulado en su centro. Si el polvo se quema a razón constante de 20 g/s, de modo que los gases de escape siempre ejercen una fuerza con magnitud constante de 0.3 N, dirigida en forma tangencial a la rueda, determine la velocidad angular de la rueda cuando se ha quemado 75% de la masa. En un inicio, la rueda está en reposo y tiene una masa de 100 g y un radio de $r = 75$ mm. Para el cálculo, considere en todo momento que la rueda es un disco delgado.

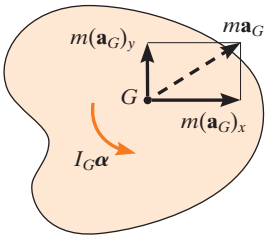


Prob. 17-89



(a)





(b)

Fig. 17-18

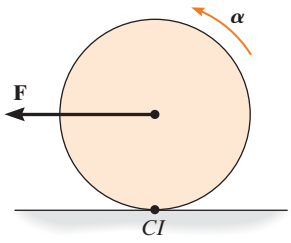


Fig. 17-19

17.5 Ecuaciones de movimiento: movimiento plano general

El cuerpo rígido (o losa) de la figura 17-18*a* se somete a movimiento plano general ocasionado por las fuerzas y el sistema de momentos de par aplicados de manera externa. Los diagramas de cuerpo libre y cinético del cuerpo se muestran en la figura 17-18*b*. Si se establece un sistema de coordenadas x y y inercial como se indica, las tres ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= m(a_G)_x \\ \Sigma F_y &= m(a_G)_y \\ \Sigma M_G &= I_G\alpha \end{aligned} \tag{17-17}$$

En algunos problemas puede ser útil sumar los momentos con respecto a un punto P distinto de G para eliminar tantas fuerzas desconocidas como sea posible de la suma de momentos. Cuando se utilizan en este caso más general, las tres ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= m(a_G)_x \\ \Sigma F_y &= m(a_G)_y \\ \Sigma M_P &= \Sigma(\mathcal{M}_k)_P \end{aligned} \tag{17-18}$$

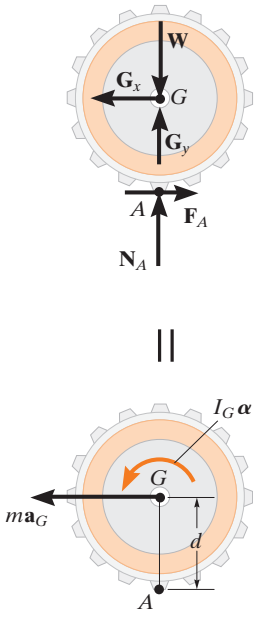
En este caso, $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$ representa la suma de momentos de $I_G\boldsymbol{\alpha}$ y $m\mathbf{a}_G$ (o sus componentes) con respecto a P, determinados por los datos que aparecen en el diagrama cinético.

Ecuación del momento respecto al CI. Existe un tipo específico de problema que implica un disco uniforme, o un cuerpo de forma circular, que rueda sobre una superficie rugosa *sin deslizarse* (fig. 17-19). Si sumamos los momentos con respecto al centro instantáneo de velocidad cero, entonces $\Sigma(\mathcal{M}_k)_{CI}$ se vuelve $I_{CI}a$, de modo que

$$\Sigma M_{IC} = I_{IC}\alpha \tag{17-19}$$

Este resultado es comparable a $\Sigma M_O = I_O a$, la cual se utiliza para un cuerpo sujeto con un pasador en O, ecuación 17-16. Vea el problema 17-90.

(© R. C. Hibbeler)



Cuando la aplanadora o "rodillo de pata de carnero" avanza, el rodillo tiene movimiento plano general. Las fuerzas que se indican en su diagrama de cuerpo libre provocan los efectos que aparecen en el diagrama cinético. Si se suman los momentos con respecto al centro de masa G, entonces $\Sigma M_G = I_G a$. Sin embargo, si se suman los momentos con respecto al punto A (el CI), entonces $\circlearrowleft + \Sigma M_A = I_G\alpha + (ma_G)d = I_A\alpha$.

Procedimiento para el análisis

Los problemas cinéticos que implican movimiento plano general de un cuerpo rígido se resuelven con el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre

- Establezca el sistema de coordenadas x, y inercial y trace el diagrama de cuerpo libre del cuerpo.
- Especifique la dirección y el sentido de la aceleración del centro de masa, $\mathbf{a}_G$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo.
- Determine el momento de inercia I_G.
- Identifique las incógnitas en el problema.
- Si decide utilizar la ecuación de movimiento de rotación $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$, entonces considere trazar el diagrama cinético como ayuda para "visualizar" los "momentos" desarrollados por las componentes $m(\mathbf{a}_G)_x$, $m(\mathbf{a}_G)_y$ e $I_G\alpha$ cuando se escriban los términos en la suma de momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.

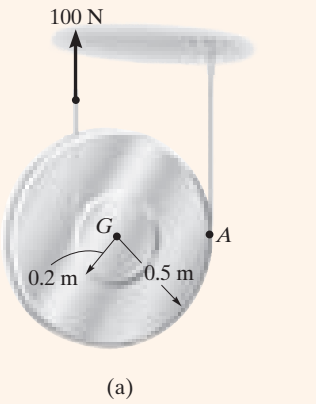
Ecuaciones de movimiento

- Aplique las tres ecuaciones de movimiento de acuerdo con la convención de signos establecida.
- Cuando hay fricción, existe la posibilidad de movimiento sin deslizamiento o volcadura. Cada posibilidad de movimiento deberá considerarse.

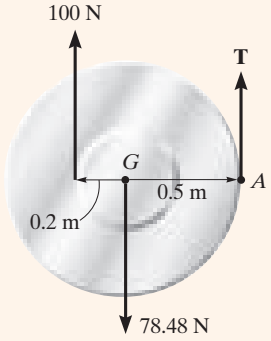
Cinemática

- Use cinemática si no puede obtener una solución completa estrictamente con las ecuaciones de movimiento.
- Si los soportes *limitan* el movimiento del cuerpo, pueden obtenerse ecuaciones adicionales mediante $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$, que relaciona las aceleraciones de dos puntos cualesquiera A y B en el cuerpo.
- Cuando una rueda, un disco, un cilindro o una bola *rueda sin deslizarse*, entonces $a_G = \alpha r$.

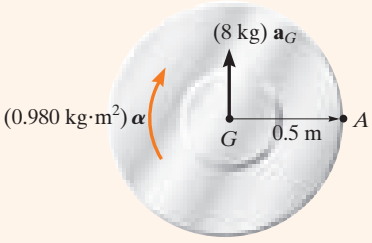
EJEMPLO 17.12



(a)



=



(b)

Fig. 17-20

Determine la aceleración angular del carrete que se ilustra en la figura 17-20*a*. Su masa es de 8 kg y su radio de giro de $k_G = 0.35$ m. Las cuerdas cuya masa se ignora se enrollan alrededor de su maza interna y borde externo.

SOLUCIÓN I

Diagramas de cuerpo libre y cinético. Figura 17-20*b*. La fuerza de 100 N hace que $\mathbf{a}_G$ actúe hacia arriba. Además, $\boldsymbol{\alpha}$ actúa en sentido horario, ya que el carrete se enrolla alrededor de la cuerda en A.

Hay tres incógnitas T, a_G y α. El momento de inercia del carrete con respecto a su centro de masa es

$$I_G = mk_G^2 = 8\text{ kg}(0.35\text{ m})^2 = 0.980\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Ecuaciones de movimiento

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad T + 100\text{ N} - 78.48\text{ N} = (8\text{ kg})a_G \tag{1}$$

$$\curvearrowright +\Sigma M_G = I_G\alpha; \quad 100\text{ N}(0.2\text{ m}) - T(0.5\text{ m}) = (0.980\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha \tag{2}$$

Cinemática. Si se utiliza cinemática para relacionar a_G con α se obtiene una solución completa. En este caso, el carrete "rueda sin deslizarse" sobre la cuerda en A. Por lo tanto, podemos utilizar los resultados del ejemplo 16-4 o 16-15, de modo que

$$(\curvearrowright +)\; a_G = \alpha r; \qquad a_G = \alpha\,(0.5\text{ m}) \tag{3}$$

Si resolvemos las ecuaciones 1 a 3, tenemos

$$\alpha = 10.3\text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$
$$a_G = 5.16\text{ m/s}^2$$
$$T = 19.8\text{ N}$$

SOLUCIÓN II

Ecuaciones de movimiento. Podemos eliminar la incógnita T al sumar momentos con respecto al punto A. De acuerdo con los diagramas de cuerpo libre y cinético, figuras 17-20*b* y 17-20*c*, tenemos

$$\curvearrowright +\Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A; \qquad 100\text{ N}(0.7\text{ m}) - 78.48\text{ N}(0.5\text{ m})$$
$$= (0.980\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha + [(8\text{ kg})a_G](0.5\text{ m})$$

Con la ecuación (3),

$$a = 10.3\text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

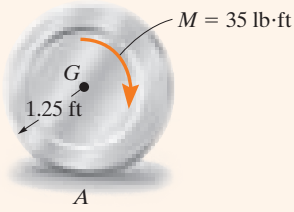
SOLUCIÓN III

Ecuaciones de movimiento. La forma más sencilla de resolver este problema es darse cuenta de que el punto A es el CI del carrete. Entonces, la ecuación 17-19 es aplicable

$$\curvearrowright +\Sigma M_A = I_A\alpha; \quad (100\text{ N})(0.7\text{ m}) - (78.48\text{ N})(0.5\text{ m})$$
$$= [0.980\text{ kg}\cdot\text{m}^2 + (8\text{ kg})(0.5\text{ m})^2]\alpha$$
$$\alpha = 10.3\text{ rad/s}^2$$

EJEMPLO 17.13

La rueda de 50 lb que se muestra en la figura 17-21*a* tiene un radio de giro $k_G = 0.70$ ft. Si se aplica un momento de par de 35 lb · ft a la rueda, determine la aceleración de su centro de masa G. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre la rueda y el plano en A son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.25$, respectivamente.



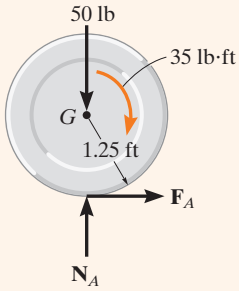
(a)

SOLUCIÓN

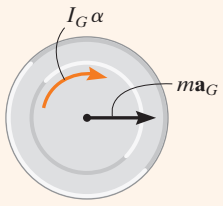
Diagramas de cuerpo libre y cinético. En la figura 17-21*b*, se observa que el momento de par hace que la rueda gire en sentido horario con una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$. Por consiguiente, la aceleración del centro de masa, $\mathbf{a}_G$, está dirigida hacia la derecha. El momento de inercia es

$$I_G = mk_G^2 = \frac{50\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}(0.70\text{ ft})^2 = 0.7609\text{ slug} \cdot \text{ft}^2$$

Las incógnitas son N_A, F_A, a_G y α.



=



(b)

Ecuaciones de movimiento

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad F_A = \left(\frac{50\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)a_G \tag{1}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_A - 50\text{ lb} = 0 \tag{2}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = I_G\alpha; \qquad 35\text{ lb} \cdot \text{ft} - 1.25\text{ ft}(F_A) = (0.7609\text{ slug} \cdot \text{ft}^2)\alpha \tag{3}$$

Se requiere una cuarta ecuación para una solución completa.

Cinemática (sin deslizamiento). Si se hace esta suposición, entonces

$$(\circlearrowleft +) \qquad a_G = (1.25\text{ ft})\alpha \tag{4}$$

Al resolver las ecuaciones 1 a 4,

$$N_A = 50.0\text{ lb} \qquad F_A = 21.3\text{ lb}$$
$$\alpha = 11.0\text{ rad/s}^2 \qquad a_G = 13.7\text{ ft/s}^2$$

Esta solución requiere que no haya deslizamiento, es decir, $F_A \leq \mu_s N_A$. Sin embargo, como $21.3\text{ lb} > 0.3(50\text{ lb}) = 15\text{ lb}$, la rueda se desliza conforme gira.

(Deslizamiento). La ecuación 4 no es válida y, por lo tanto, $F_A = \mu_k N_A$, o bien

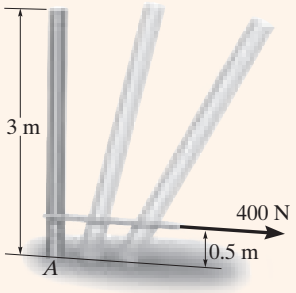
$$F_A = 0.25N_A \tag{5}$$

Al resolver las ecuaciones 1 a 3 se obtiene

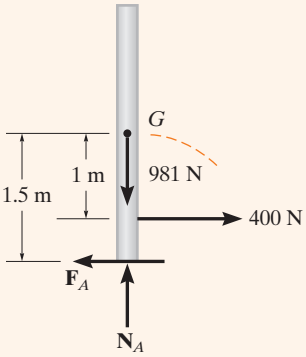
$$N_A = 50.0\text{ lb} \qquad F_A = 12.5\text{ lb}$$
$$\alpha = 25.5\text{ rad/s}^2$$
$$a_G = 8.05\text{ ft/s}^2 \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

Fig. 17-21

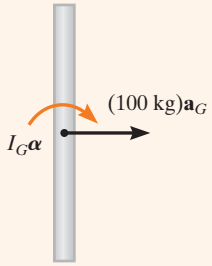
EJEMPLO 17.14



(a)



=



(b)

Fig. 17-22

El poste delgado uniforme que se ilustra en la figura 17-22*a* tiene una masa de 100 kg. Si los coeficientes de fricción estática y cinética entre el extremo del poste y la superficie son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.25$, respectivamente, determine la aceleración angular del poste en el instante en que se aplica la fuerza horizontal de 400 N. En principio, el poste está en reposo.

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre y cinético. Figura 17-22*b*. La trayectoria del movimiento del centro de masa G será a lo largo de una trayectoria curva desconocida de radio de curvatura ρ, la cual inicialmente coincide con una línea vertical. Sin embargo, no hay ninguna componente normal o y de la aceleración porque, en principio, el poste está en reposo, es decir, $\mathbf{v}_G = \mathbf{0}$, de modo que $(a_G)_y = v_G^2/\rho = 0$. Supondremos que el centro de masa se acelera hacia la derecha y que el poste tiene una aceleración angular de $\boldsymbol{\alpha}$ en sentido horario. Las incógnitas son N_A, F_A, a_G y α.

Ecuación de movimiento

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad 400\ \text{N} - F_A = (100\ \text{kg})a_G \tag{1}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_A - 981\ \text{N} = 0 \tag{2}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = I_G\alpha;\ F_A(1.5\ \text{m}) - (400\ \text{N})(1\ \text{m}) = [\tfrac{1}{12}(100\ \text{kg})(3\ \text{m})^2]\alpha \tag{3}$$

Para una solución completa se requiere una cuarta ecuación.

Cinemática (sin deslizamiento). Con esta suposición, el punto A actúa como un "pivote", de modo que α ocurre en sentido horario, por lo tanto, la dirección de a_G es hacia la derecha.

$$a_G = \alpha r_{AG}; \qquad a_G = (1.5\ \text{m})\,\alpha \tag{4}$$

Al resolver las ecuaciones 1 a 4 tenemos

$$N_A = 981\ \text{N} \qquad F_A = 300\ \text{N}$$
$$a_G = 1\ \text{m/s}^2 \qquad \alpha = 0.667\ \text{rad/s}^2$$

La suposición de que no ocurre deslizamiento requiere que $F_A \leq \mu_s N_A$. Sin embargo, $300\ \text{N} > 0.3(981\ \text{N}) = 294\ \text{N}$ y por ende el poste se desliza en A.

(Deslizamiento). En este caso, la ecuación 4 *no* es válida. En cambio debe utilizarse la ecuación de fricción $F_A = \mu_k N_A$. Por lo tanto,

$$F_A = 0.25 N_A \tag{5}$$

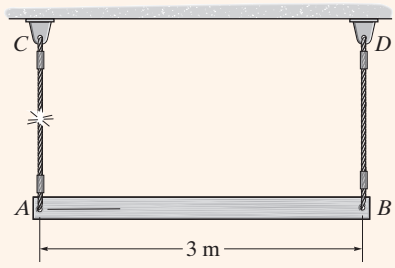
Al resolver las ecuaciones 1 a 3 y 5 simultáneamente, obtenemos

$$N_A = 981\ \text{N} \quad F_A = 245\ \text{N} \quad a_G = 1.55\ \text{m/s}^2$$
$$\alpha = -0.428\ \text{rad/s}^2 = 0.428\ \text{rad/s}^2 \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

17

EJEMPLO 17.15

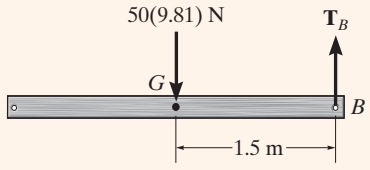
Las cuerdas *AC* y *BD* mantienen en la posición de equilibrio la barra uniforme de 50 kg que se muestra en la figura 17-23*a*. Determine la tensión en *BD* y la aceleración angular de la barra inmediatamente después de que se corta *AC*.

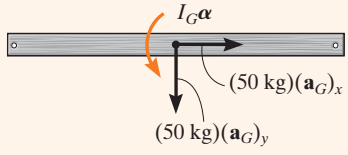


(a)

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre y cinético. Figura 17-23*b*. Hay cuatro incógnitas, T_B, $(a_G)_x$, $(a_G)_y$ y α.





(b)

Ecuaciones de movimiento

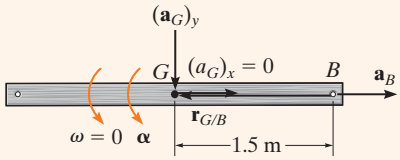
$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad 0 = 50\text{ kg}\,(a_G)_x$$

$$(a_G)_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad T_B - 50(9.81)\text{N} = -50\text{ kg}\,(a_G)_y \tag{1}$$

$$\circlearrowleft +\Sigma M_G = I_G\alpha; \qquad T_B(1.5\text{ m}) = \left[\frac{1}{12}(50\text{ kg})(3\text{ m})^2\right]\alpha \tag{2}$$

Cinemática. Como la barra está en reposo justo después de que se corta el cable, entonces su velocidad angular y la velocidad del punto *B* en este instante son iguales a cero. Por lo tanto, $(a_B)_n = v_B^2/\rho_{BD} = 0$. En consecuencia, $\mathbf{a}_B$ sólo tiene una componente tangencial, dirigida a lo largo del eje *x* (fig. 17-23*c*). Al aplicar la ecuación de aceleración relativa a los puntos *G* y *B*,



(c)

Fig. 17-23

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{G/B} - \omega^2\mathbf{r}_{G/B}$$

$$-(a_G)_y\mathbf{j} = a_B\mathbf{i} + (\alpha\mathbf{k}) \times (-1.5\mathbf{i}) - \mathbf{0}$$

$$-(a_G)_y\mathbf{j} = a_B\mathbf{i} - 1.5\alpha\mathbf{j}$$

Igualamos las componentes **i** y **j** de ambos lados de esta ecuación,

$$0 = a_B$$

$$(a_G)_y = 1.5\,\alpha \tag{3}$$

Al resolver las ecuaciones (1) a (3) obtenemos

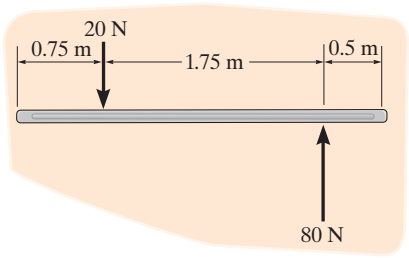
$$\alpha = 4.905\text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

$$T_B = 123\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$(a_G)_y = 7.36\text{ m/s}^2$$

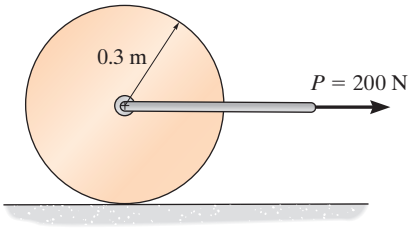
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F17-13. La barra uniforme de 60 kg inicialmente está en reposo sobre un *plano horizontal* liso, cuando se aplican las fuerzas. Determine la aceleración del centro de masa de la barra y la aceleración angular de la barra en este instante.



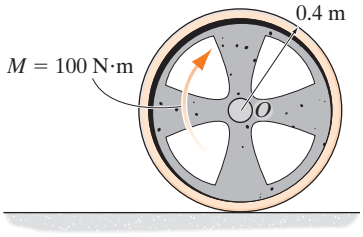
Prob. F17-13

F17-14. El cilindro de 100 kg rueda sin deslizarse sobre el plano horizontal. Determine la aceleración de su centro de masa y su aceleración angular.



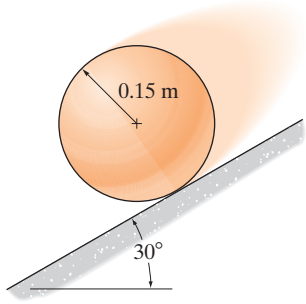
Prob. F17-14

F17-15. La rueda de 20 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro O de $k_O = 300$ mm. Cuando la rueda se somete al momento de par, se desliza cuando gira. Determine la aceleración angular de la rueda y la aceleración de su centro O. El coeficiente de fricción cinética entre la rueda y el plano es $\mu_k = 0.5$.



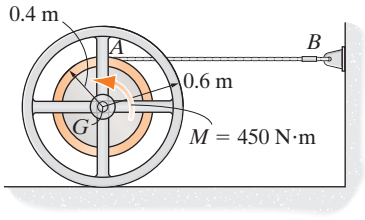
Prob. F17-15

F17-16. La esfera de 20 kg rueda hacia abajo del plano inclinado sin deslizarse. Determine su aceleración angular y la aceleración de su centro de masa.



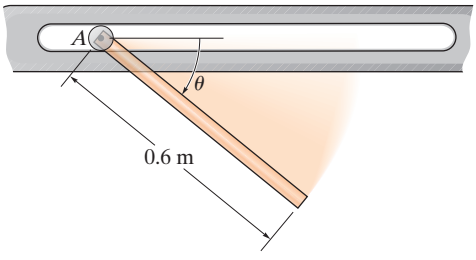
Prob. F17-16

F17-17. El carrete de 200 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro de masa de $k_G = 300$ mm. Si se aplica el momento de par al carrete y el coeficiente de fricción cinética entre éste y el suelo es $\mu_k = 0.2$, determine la aceleración angular del carrete, la aceleración de G y la tensión del cable.



Prob. F17-17

F17-18. La varilla delgada de 12 kg está sujeta por medio de un pasador a un rodillo A que se desliza libremente a lo largo de la ranura. Si la varilla se suelta del reposo cuando $\theta = 0°$, determine su aceleración angular y la aceleración del rodillo inmediatamente después que se suelta la varilla.

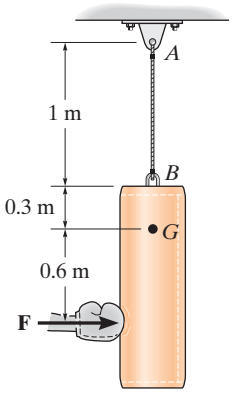


Prob. F17-18

PROBLEMAS

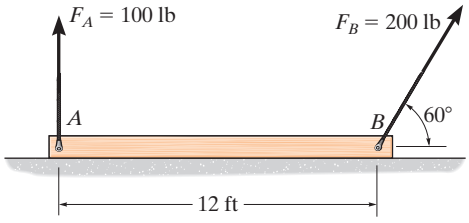
17-90. Si el disco de la figura 17-19 *rueda sin deslizarse*, muestre que cuando se suman los momentos con respecto al centro instantáneo de rotación, CI, es posible utilizar la ecuación de momentos $\Sigma M_{CI} = I_{CI}\alpha$, donde I_{CI} representa el momento de inercia del disco calculado con respecto al eje instantáneo de velocidad cero.

17-91. El costal de arena de 20 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro de masa G de $k_G = 0.4$ m. Si está inicialmente en reposo y se somete a una fuerza horizontal $F = 30$ N, determine la aceleración angular inicial del costal y la tensión en el cable de soporte AB.



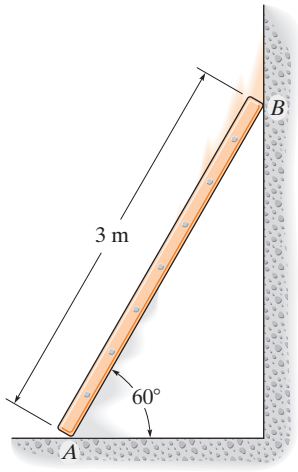
Prob. 17-91

***17-92.** La viga uniforme de 150 lb está inicialmente en reposo, cuando las fuerzas se aplican a los cables. Determine la magnitud de la aceleración del centro de masa y la aceleración angular de la viga en este instante.



Prob. 17-92

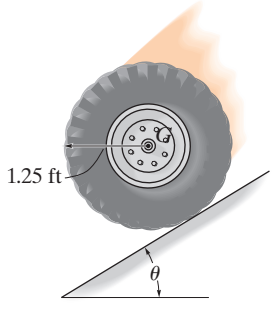
17-93. La barra delgada de 12 kg tiene una velocidad angular en sentido horario de $\omega = 2$ rad/s cuando está en la posición mostrada. Determine su aceleración angular y las reacciones normales de la superficie lisa en A y B en este instante.



Prob. 17-93

17-94. El neumático pesa 30 lb y su radio de giro es $k_G = 0.6$ ft. Si los coeficientes de fricción estática y cinética entre el neumático y el plano son $\mu_s = 0.2$ y $\mu_k = 0.15$, determine la aceleración angular del neumático cuando rueda hacia abajo sobre el plano inclinado. Considere que $\theta = 12°$.

17-95. El neumático pesa 30 lb y su radio de giro es $k_G = 0.6$ ft. Si los coeficientes de fricción estática y cinética entre el neumático y el plano son $\mu_s = 0.2$ y $\mu_k = 0.15$, determine el ángulo máximo θ del plano inclinado de modo que el neumático ruede sin deslizarse.

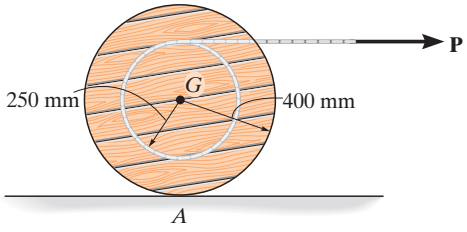


Probs. 17-94/95

***17-96.** El carrete tiene una masa de 100 kg y un radio de giro $k_G = 0.3$ m. Si los coeficientes de fricción estática y cinética en A son $\mu_s = 0.2$ y $\mu_k = 0.15$, respectivamente, determine la aceleración angular del carrete si $P = 50$ N.

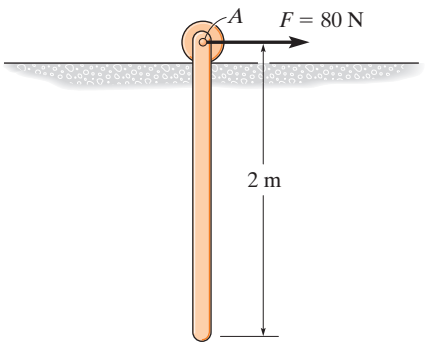
17-97. Resuelva el problema 17-96 si la cuerda y la fuerza $P = 50$ N están dirigidos verticalmente hacia arriba.

17-98. El carrete tiene una masa de 100 kg y un radio de giro $k_G = 0.3$ m. Si los coeficientes de fricción estática y cinética en A son $\mu_s = 0.2$ y $\mu_k = 0.15$, respectivamente, determine la aceleración angular del carrete si $P = 600$ N.



Probs. 17-96/97/98

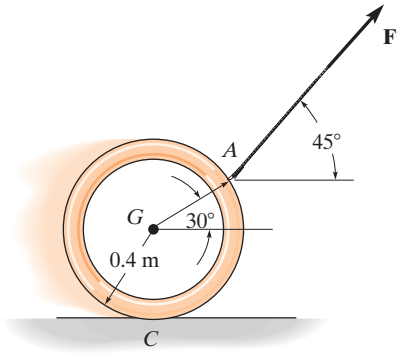
17-99. La barra uniforme de 12 kg se sostiene mediante un rodillo en A. Si se aplica una fuerza horizontal de $F = 80$ N al rodillo, determine la aceleración del centro del rodillo en el instante en que se aplica la fuerza. Desprecie el peso y el tamaño del rodillo.



Prob. 17-99

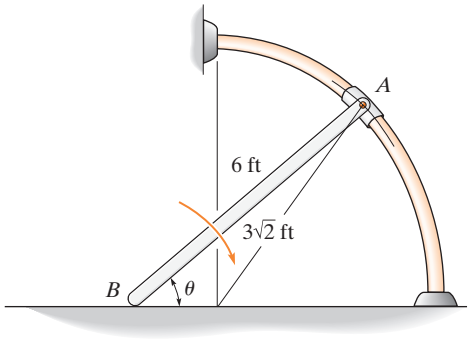
***17-100.** Se aplica una fuerza de $F = 10$ N al anillo de 10 kg, como se muestra en la figura. Si no ocurre deslizamiento, determine la aceleración angular inicial del anillo y la aceleración de su centro de masa, G. Desprecie el espesor del anillo.

17-101. Si el coeficiente de fricción estática en C es $\mu_s = 0.3$, determine la máxima fuerza **F** que puede aplicarse al anillo de 5 kg sin ocasionar que se deslice. Desprecie el grosor del anillo.



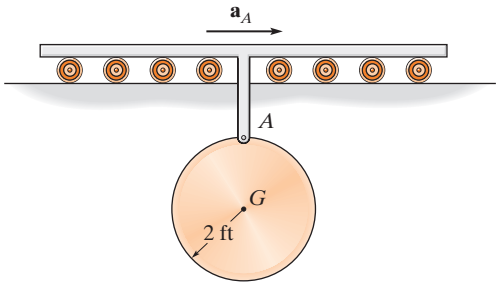
Probs. 17-100/101

17-102. La varilla delgada de 25 lb tiene una longitud de 6 ft. Se utiliza un collarín de masa despreciable, cuyo extremo A está limitado a moverse a lo largo de la barra circular lisa de radio $3\sqrt{2}$ ft. El extremo B descansa sobre el piso, cuyo coeficiente de fricción cinética es $\mu_B = 0.4$. Si la barra se libera desde el reposo cuando $\theta = 30°$, determine la aceleración angular de la barra en este instante.



Prob. 17-102

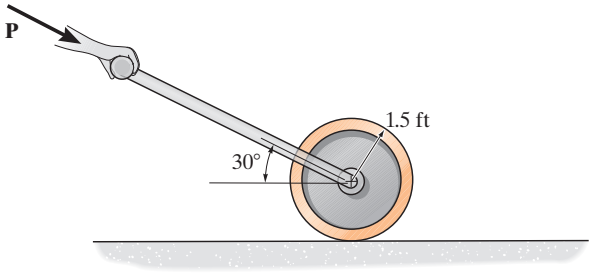
17-103. La placa circular de 15 lb se suspende de un pasador en A. Si el pasador está conectado a una pista a la que se le da una aceleración $a_A = 5\ \text{ft/s}^2$, determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en A y la aceleración angular de la placa. En un inicio, la placa está en reposo.



Prob. 17-103

***17-104.** Si $P = 30$ lb, determine la aceleración angular del rodillo de 50 lb. Suponga que el rodillo es un cilindro uniforme y que no ocurre deslizamiento.

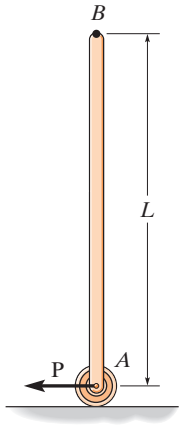
17-105. Si el coeficiente de fricción estática entre el rodillo de 50 lb y el suelo es $\mu_s = 0.25$, determine la fuerza P máxima que se puede aplicar a la manija, de modo que el rodillo ruede sobre el suelo sin deslizamiento. Además, calcule la aceleración angular del rodillo. Suponga que el rodillo es un cilindro uniforme.



Probs. 17-104/105

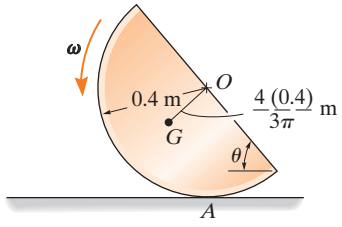
17-106. La barra uniforme de masa m y longitud L se equilibra en la posición vertical, cuando la fuerza horizontal $\mathbf{P}$ se aplica al rodillo en A. Determine la aceleración angular inicial de la barra y la aceleración de su punto superior B.

17-107. Resuelva el problema 17-106 si se retira el rodillo y el coeficiente de fricción cinética en el suelo es μ_k.



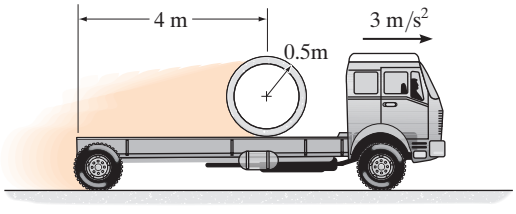
Probs. 17-106/107

***17-108.** El disco semicircular con una masa de 10 kg gira a $\omega = 4$ rad/s en el instante $\theta = 60°$. Si el coeficiente de fricción estática en A es $\mu_s = 0.5$, determine si el disco se desliza en este instante.



Prob. 17-108

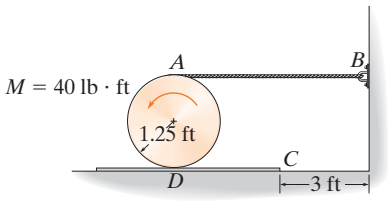
17-109. El ducto de drenaje hecho de concreto pesa 500 kg y tiene un radio medio de 0.5 m. Si el camión tiene una aceleración de 3 m/s^2, determine la aceleración angular del ducto. Suponga que el ducto no se desliza sobre la plataforma del camión y desprecie su espesor.



Prob. 17-109

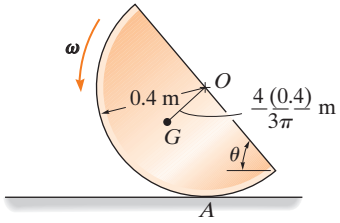
17

17-110. El disco de 15 lb se apoya en la placa de 5 lb. Una cuerda se enrolla alrededor de la periferia del disco y se fija a la pared en B. Si se aplica un par de torsión $M = 40$ lb · ft en el disco, determine la aceleración angular del disco y el tiempo necesario para que el extremo C de la placa viaje 3 ft y golpee la pared. Suponga que el disco no se desliza sobre la placa y que ésta se apoya en la superficie en D que tiene un coeficiente de fricción cinética de $\mu_k = 0.2$. Desprecie la masa de la cuerda.



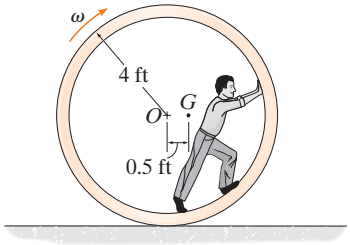
Prob. 17-110

17-111. El disco semicircular de 10 kg de masa gira a $\omega = 4$ rad/s cuando $\theta = 60°$. Si el coeficiente de fricción estática en A es $\mu_s = 0.5$, determine si el disco se desliza en este instante.



Prob. 17-111

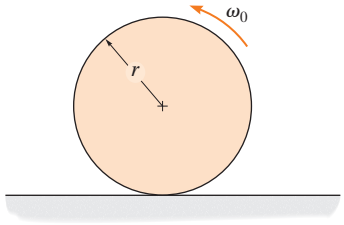
***17-112.** El ducto de drenaje hecho de concreto rueda con una velocidad angular de $\omega = 0.5$ rad/s, cuando el hombre está en la posición indicada. En este instante el centro de gravedad del ducto y el hombre se encuentra en G y el radio de giro con respecto a G es $k_G = 3.5$ ft. Determine la aceleración angular del ducto. La combinación del peso del ducto y del hombre es de 500 lb. Suponga que el ducto rueda sin deslizarse y que el hombre no se mueve dentro del ducto.



Prob. 17-112

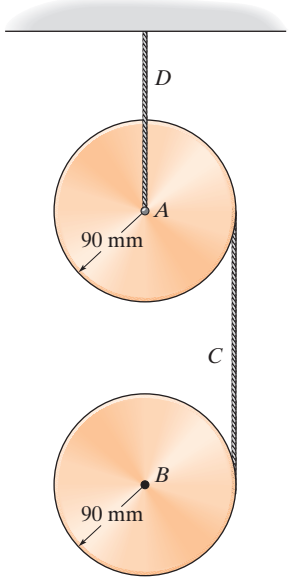
17-113. El disco uniforme de masa m gira con una velocidad angular de ω_0 cuando se coloca en el piso. Determine la aceleración angular inicial del disco y la aceleración de su centro de masa. El coeficiente de fricción cinética entre el disco y el piso es μ_k.

17-114. El disco uniforme de masa m gira con una velocidad angular de ω_0 cuando se coloca en el piso. Determine el tiempo que transcurre antes de que comience a rodar sin deslizarse. ¿Cuál es la velocidad angular del disco en este instante? El coeficiente de fricción cinética entre el disco y el piso es μ_k.



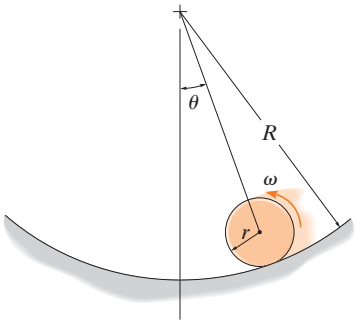
Probs. 17-113/114

17-115. Una cuerda se enrolla alrededor de cada uno de los dos discos de 10 kg. Si se libera desde el reposo, determine la aceleración angular de cada disco y la tensión en el cable C. Desprecie la masa de la cuerda.



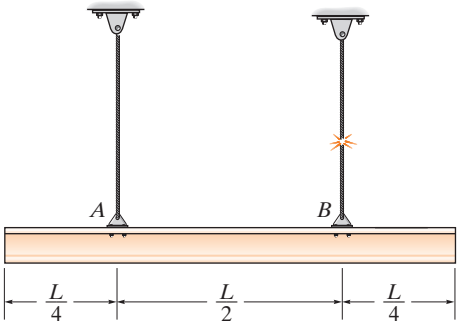
Prob. 17-115

***17-116.** El disco de masa m y radio r rueda sin deslizarse sobre la trayectoria circular. Determine la fuerza normal que ejerce la trayectoria sobre el disco y la aceleración angular del disco, si en el instante mostrado tiene una velocidad angular de $\boldsymbol{\omega}$.



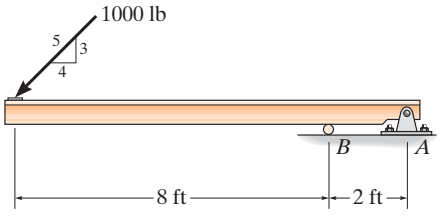
Prob. 17-116

17-117. La viga uniforme tiene un peso W. Si está originalmente en reposo mientras se sostiene en A y B por medio de cables, determine la tensión en el cable A si el cable B falla en forma repentina. Suponga que la viga es una varilla delgada.



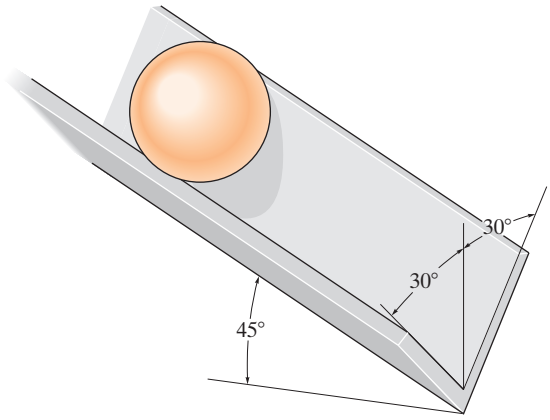
Prob. 17-117

17-118. La viga de 500 lb se sostiene en A y B cuando se somete a una fuerza de 1000 lb, como se indica en la figura. Si el soporte de pasador en A falla repentinamente, determine la aceleración angular inicial de la viga y la fuerza del soporte de rodillo en la viga. Para el cálculo, suponga que la viga es una varilla delgada tal que su espesor se puede despreciar.



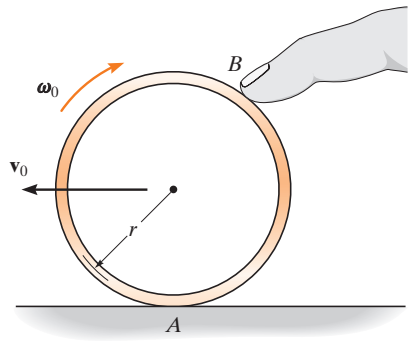
Prob. 17-118

17-119. La bola sólida de radio r y masa m rueda sin deslizarse sobre la canaleta a 60°. Determine su aceleración angular.



Prob. 17-119

***17-120.** Al presionar con el dedo en B, un anillo delgado que tiene una masa m recibe una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ y un efecto de retroceso $\boldsymbol{\omega}_0$ cuando se retira el dedo. Si el coeficiente de fricción cinética entre la mesa y el anillo es μ_k, determine la distancia que se desplaza el anillo hacia adelante, antes de que el efecto de retroceso lo detenga.



Prob. 17-120

PROBLEMAS CONCEPTUALES

C17-1. Se utiliza el camión para remolcar el pesado contenedor. Para proporcionar una tracción más eficaz a las ruedas traseras en A, ¿es mejor mantener el contenedor donde está, o colocarlo en frente del remolque? Use valores numéricos adecuados para explicar su respuesta.

Prob. C17-1 (© R. C. Hibbeler)

C17-2. El tractor está a punto de remolcar el avión hacia la derecha. ¿Es posible que el conductor haga que la rueda delantera se levante del suelo cuando acelere el tractor? Trace los diagramas de cuerpo libre y cinético y explique algebraicamente (letras) cómo podría ser esto posible.

Prob. C17-2 (© R. C. Hibbeler)

C17-3. ¿Cómo podría indicar que el conductor está acelerando este vehículo deportivo utilitario? Para explicar su respuesta, trace los diagramas de cuerpo libre y cinético. En este caso, se suministra potencia a las ruedas traseras. ¿Se vería igual la fotografía si se proporcionara potencia a las ruedas delanteras? ¿Serán iguales las aceleraciones? Use valores numéricos apropiados para explicar sus respuestas.

Prob. C17-3 (© R. C. Hibbeler)

C17-4. Vemos algo que no debería intentar, ¡por lo menos sin casco! Trace los diagramas de cuerpo libre y cinético, y muestre qué tiene que hacer el motociclista para mantener esta posición. Use valores numéricos adecuados para explicar su respuesta.

Prob. C17-4 (© R. C. Hibbeler)

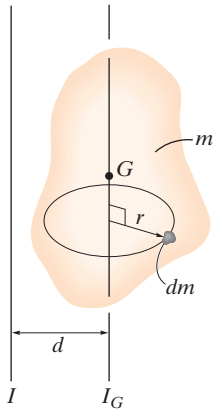
REPASO DEL CAPÍTULO

Momento de inercia

El momento de inercia mide la resistencia de un cuerpo al cambiar su velocidad angular. Está definido por $I = \int r^2 dm$ y será diferente según el eje con respecto al cual se calcula.

Muchos cuerpos están compuestos de formas simples. Si éste es el caso, entonces pueden utilizarse valores tabulares de I, como los que aparecen en los forros de este libro. Para obtener el momento de inercia de un cuerpo compuesto con respecto a cualquier eje específico, se determina el momento de inercia de cada parte con respecto al eje y se suman los resultados. Con frecuencia, hacer esto requiere utilizar el teorema de los ejes paralelos.

$$I = I_G + md^2$$



Ecuación de movimiento plano

Las ecuaciones de movimiento definen el movimiento de traslación y rotación de un cuerpo rígido. Para explicar todos los términos de estas ecuaciones, un diagrama de cuerpo libre siempre deberá ir junto con su aplicación y, en algunos problemas, también puede ser útil trazar el diagrama cinético que muestre $m\mathbf{a}_G$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$.

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_G = 0$$

Traslación rectilínea

$$\Sigma F_n = m(a_G)_n$$
$$\Sigma F_t = m(a_G)_t$$
$$\Sigma M_G = 0$$

Traslación curvilínea

$$\Sigma F_n = m(a_G)_n = m\omega^2 r_G$$
$$\Sigma F_t = m(a_G)_t = m\alpha r_G$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha \text{ o } \Sigma M_O = I_O\alpha$$

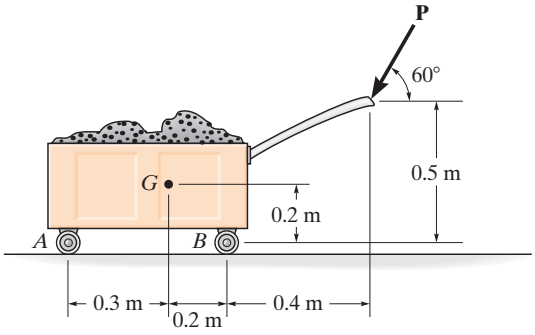
Rotación con respecto a un eje fijo

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha \text{ o } \Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$$

Movimiento plano general

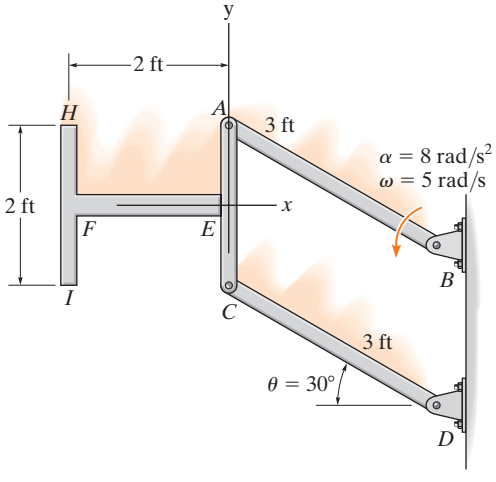
PROBLEMAS DE REPASO

R17-1. La carretilla manual tiene una masa de 200 kg y un centro de masa en G. Determine las reacciones normales en *cada una* de las ruedas en A y B, si se aplica una fuerza $P = 50$ N a la manija. Desprecie la masa y la resistencia al rodamiento de las ruedas.



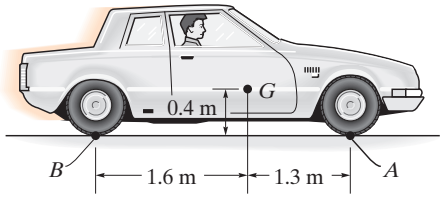
Prob. R17-1

R17-2. Las dos varillas de 3 lb FE y HI están fijas (soldadas) al eslabón AC en E. Determine la fuerza interna axial E_x, la fuerza cortante E_y y el momento M_E que la varilla AC ejerce sobre FE en E, si en el instante $\theta = 30°$ el eslabón AB tiene una velocidad angular $\omega = 5$ rad/s y una aceleración angular $\alpha = 8$ rad/s^2 como se muestra en la figura.



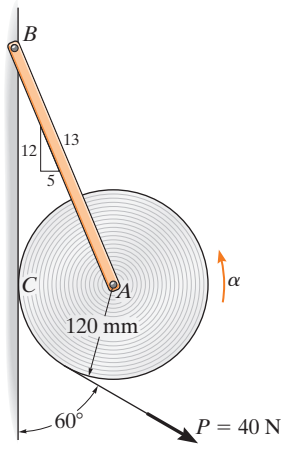
Prob. R17-2

R17-3. El automóvil tiene una masa de 1.50 Mg y un centro de masa en G. Determine la aceleración máxima que puede tener si sólo se suministra potencia a las ruedas traseras. Desprecie la masa de las ruedas en el cálculo, y suponga que las ruedas que no reciben potencia ruedan libremente. Además, suponga que ocurre deslizamiento de las ruedas con potencia, donde el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.3$.



Prob. R17-3

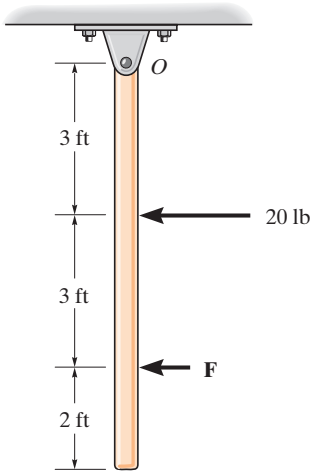
R17-4. Un rollo de papel de 20 kg, originalmente en reposo, está soportado mediante pasadores en sus extremos por la ménsula AB. Si el rollo está apoyado en la pared donde el coeficiente de fricción cinética en C es $\mu_C = 0.3$, y se aplica uniformemente una fuerza de 40 N al extremo de la hoja, determine la aceleración angular inicial del rollo y la tensión en la ménsula a medida que se desenrolla el papel. En el cálculo, trate el rollo como un cilindro.



Prob. R17-4

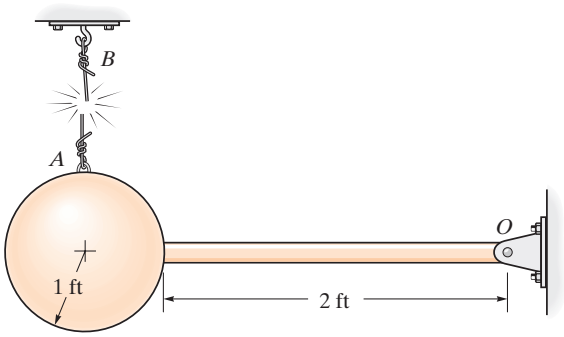
17

R17-5. En el instante mostrado, actúan dos fuerzas sobre la varilla delgada de 30 lb que está articulada en O. Determine la magnitud de la fuerza **F** y la aceleración angular inicial de la varilla, de modo que la reacción horizontal que *ejerce el pasador sobre la varilla* sea de 5 lb dirigida hacia la derecha.



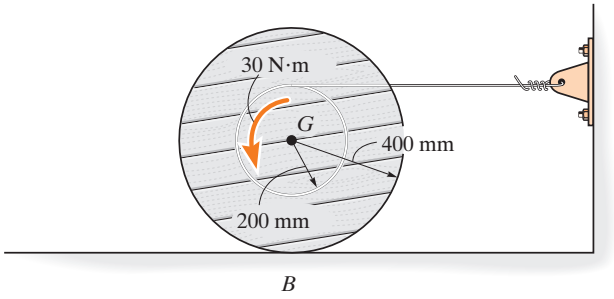
Prob. R17-5

R17-6. El péndulo consiste en una esfera de 30 lb y una varilla delgada de 10 lb. Calcule la reacción en el pasador O justo después de que se corta la cuerda AB.



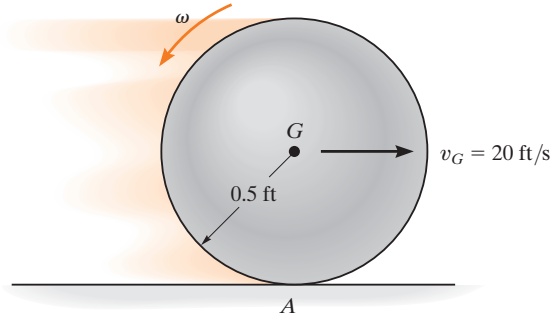
Prob. R17-6

R17-7. El carrete y el alambre enrollado alrededor de su centro tienen una masa de 20 kg y un radio de giro centroidal $k_G = 250$ mm. Si el coeficiente de fricción cinética en el suelo es $\mu_B = 0.1$, determine la aceleración angular del carrete cuando se aplica el momento de par de 30 N · m.



Prob. R17-7

R17-8. Determine el efecto de retroceso $\boldsymbol{\omega}$ que debería darse a la bola de 20 lb para que, cuando su centro reciba una velocidad inicial horizontal $v_G = 20$ ft/s, deje de girar y de trasladarse en el mismo instante. El coeficiente de fricción cinética es $\mu_A = 0.3$.



Prob. R17-8

Capítulo 18

(© Arinahabich/Fotolia)

Los carros de la montaña rusa deben ser capaces de desplazarse sobre bucles y a través de las curvas, y tener suficiente energía para hacerlo de forma segura. El cálculo exacto de esta energía debe tomar en cuenta el tamaño del carro conforme éste se mueve a lo largo de la vía.

Cinética plana de un cuerpo rígido: trabajo y energía

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Desarrollar fórmulas para la energía cinética de un cuerpo, y definir las diversas formas en las que una fuerza y un par realizan trabajo.
- Aplicar el principio de trabajo y energía para resolver problemas de cinética plana de un cuerpo rígido que implican fuerza, velocidad y desplazamiento.
- Demostrar cómo puede utilizarse la conservación de la energía para resolver problemas de cinética plana de un cuerpo rígido.

18.1 Energía cinética

En este capítulo aplicaremos métodos de trabajo y energía para resolver problemas de movimiento plano que implican fuerza, velocidad y desplazamiento. No obstante, primero tendremos que desarrollar una forma de obtener la energía cinética del cuerpo cuando éste se somete a traslación y a rotación alrededor de un eje fijo, o a movimiento plano general.

Para hacer esto consideraremos el cuerpo rígido que se muestra en la figura 18-1, el cual está representado aquí por una *losa* que se mueve en un plano de referencia x-y inercial. Una partícula $i$ésima arbitraria del cuerpo, de masa dm, se encuentra a una distancia r del punto arbitrario P. Si en el *instante* que se indica la partícula tiene una velocidad $\mathbf{v}_i$, entonces la energía cinética de la partícula es $T_i = \frac{1}{2}\, dm\, v_i^2$.

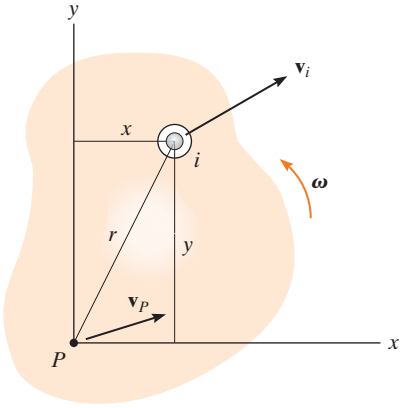


Fig. 18-1

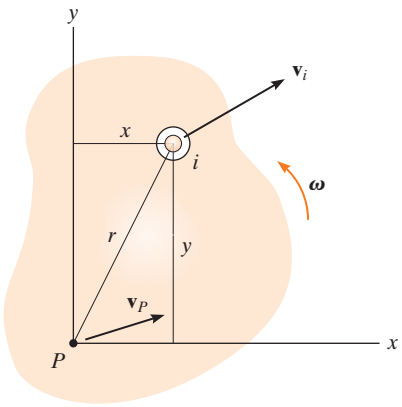


Fig. 18-1 (reiterada)

La energía cinética de todo el cuerpo se determina por la escritura de expresiones semejantes para cada una de las partículas del cuerpo y la integración de los resultados, es decir,

$$T = \frac{1}{2}\int_m dm\, v_i^2$$

Esta ecuación también puede expresarse en función de la velocidad del punto P. Si la velocidad angular del cuerpo es $\boldsymbol{\omega}$, entonces de acuerdo con la figura 18-1 tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{i/P}\\ &= (v_P)_x\mathbf{i} + (v_P)_y\mathbf{j} + \omega\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})\\ &= [(v_P)_x - \omega y]\mathbf{i} + [(v_P)_y + \omega x]\mathbf{j}\end{aligned}$$

El cuadrado de la magnitud de $\mathbf{v}_i$ es, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i &= v_i^2 = [(v_P)_x - \omega y]^2 + [(v_P)_y + \omega x]^2\\ &= (v_P)_x^2 - 2(v_P)_x\omega y + \omega^2 y^2 + (v_P)_y^2 + 2(v_P)_y\omega x + \omega^2 x^2\\ &= v_P^2 - 2(v_P)_x\omega y + 2(v_P)_y\omega x + \omega^2 r^2\end{aligned}$$

Al sustituir ésta en la ecuación de energía cinética se obtiene

$$T = \frac{1}{2}\left(\int_m dm\right)v_P^2 - (v_P)_x\omega\left(\int_m y\, dm\right) + (v_P)_y\omega\left(\int_m x\, dm\right) + \frac{1}{2}\omega^2\left(\int_m r^2\, dm\right)$$

La primera integral de la derecha representa toda la masa m del cuerpo. Como $\bar{y}m = \int y\, dm$ y $\bar{x}m = \int x\, dm$, la segunda y tercera integrales localizan el centro de masa G del cuerpo con respecto a P. La última integral representa el momento de inercia I_P del cuerpo con respecto a P, calculado con respecto al eje z que pasa por el punto P. Por consiguiente,

$$T = \tfrac{1}{2}mv_P^2 - (v_P)_x\omega\bar{y}m + (v_P)_y\omega\bar{x}m + \tfrac{1}{2}I_P\omega^2 \qquad (18\text{-}1)$$

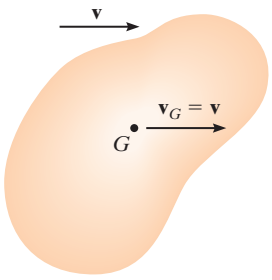
Como un caso especial, si el punto P coincide con el centro de masa G del cuerpo, entonces $\bar{y} = \bar{x} = 0$, y, por lo tanto,

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega^2 \qquad (18\text{-}2)$$

Ambos términos del lado derecho son *siempre positivos*, ya que v_G y ω están elevados al cuadrado. El primer término representa la energía cinética de traslación con respecto al centro de masa; y el segundo, la energía cinética de rotación del cuerpo con respecto al centro de masa.

Traslación. Cuando un cuerpo rígido de masa m se somete a *traslación* rectilínea o a *traslación* curvilínea (fig. 18-2), la energía cinética producida por la rotación es cero, en vista de que $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. La energía cinética del cuerpo es, por consiguiente,

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 \tag{18-3}$$



Traslación

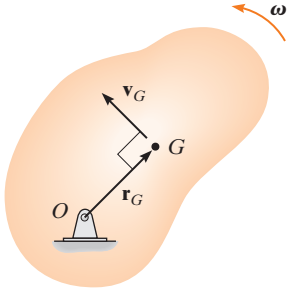
Fig. 18-2

Rotación con respecto a un eje fijo. Cuando un cuerpo rígido *gira alrededor de un eje fijo* que pasa por el punto O (fig. 18-3), el cuerpo tiene energía cinética tanto de *traslación* como de *rotación*, de modo que

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega^2 \tag{18-4}$$

La energía cinética del cuerpo también puede formularse en este caso si observamos que $v_G = r_G\omega$, de modo que $T = \frac{1}{2}(I_G + mr_G^2)\omega^2$. Según el teorema de los ejes paralelos, los términos entre paréntesis representan el momento de inercia I_O del cuerpo con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento y que pasa por el punto O. Por lo tanto*,

$$T = \tfrac{1}{2}I_O\omega^2 \tag{18-5}$$



Rotación con respecto a un eje fijo

Fig. 18-3

Por la derivación, esta ecuación dará el mismo resultado que la ecuación 18-4, ya que toma en cuenta las energías cinéticas del cuerpo, *tanto* de traslación *como* de rotación.

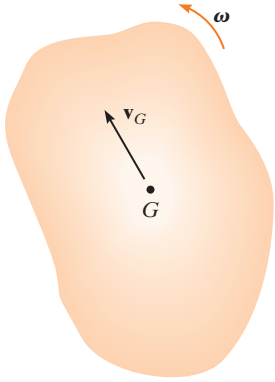
Movimiento plano general. Cuando un cuerpo rígido se somete a movimiento plano general (fig. 18-4), su velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}$ y la velocidad de su centro de masa es $\mathbf{v}_G$. Por consiguiente, la energía cinética es

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega^2 \tag{18-6}$$

Esta ecuación también puede expresarse en función del movimiento del cuerpo con respecto a su centro instantáneo de velocidad cero, es decir,

$$T = \tfrac{1}{2}I_{IC}\omega^2 \tag{18-7}$$

donde I_{IC} es el momento de inercia del cuerpo con respecto a su centro instantáneo. La comprobación es semejante a la de la ecuación 18-5 (vea el problema 18-1).



Movimiento plano general

Fig. 18-4

*Es importante que observe la similitud entre esta derivación y la de $\Sigma M_O = I_O a$. También puede obtenerse el mismo resultado de manera directa con la ecuación 18-1, si se selecciona el punto P en O y se toma en cuenta que $v_O = 0$.

La energía cinética total de esta aplanadora consiste en la energía cinética del cuerpo o la estructura de la máquina debido a su traslación, y a las energías cinéticas de traslación y rotación del rodillo y de las ruedas por su movimiento plano general. Aquí excluimos la energía cinética adicional desarrollada por las partes móviles del motor y el tren motriz. (© R. C. Hibbeler)

Sistema de cuerpos. Como la energía es una cantidad escalar, la energía cinética total para un sistema de cuerpos rígidos *conectados* es la suma de las energías cinéticas de todas sus partes móviles. Según el tipo de movimiento, la energía cinética de *cada cuerpo* se determina con la ecuación 18-2 o con las formas alternativas antes mencionadas.

18.2 Trabajo de una fuerza

Con frecuencia se encuentran varios tipos de fuerzas en problemas de cinética plana, que implican un cuerpo rígido. El trabajo de cada una de estas fuerzas se presentó en la sección 14.1 y se resume a continuación.

Trabajo de una fuerza variable. Si una fuerza externa **F** actúa en un cuerpo, el trabajo realizado por ella, cuando el cuerpo se mueve a lo largo de una trayectoria s (fig. 18-5), es

$$U_F = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_s F \cos\theta \, ds \tag{18-8}$$

Aquí θ es el ángulo entre las "colas" de la fuerza y el desplazamiento diferencial. La integración debe explicar la variación en la dirección y la magnitud de la fuerza.

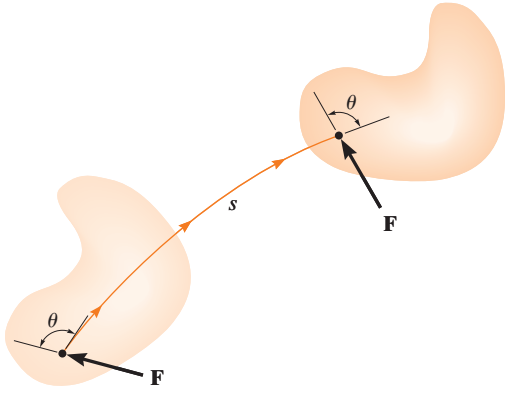


Fig. 18-5

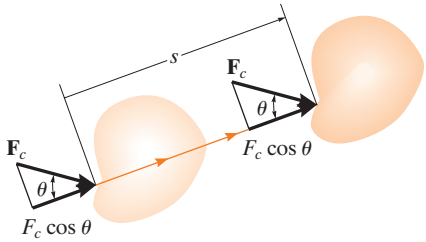


Fig. 18-6

Trabajo de una fuerza constante. Si una fuerza externa $\mathbf{F}_C$ actúa en un cuerpo (fig. 18-6) y mantiene una magnitud constante F_C y dirección constante θ, en tanto que el cuerpo experimenta una traslación s, entonces la ecuación anterior puede integrarse, de modo que el trabajo es

$$U_{F_c} = (F_c \cos\theta)s \tag{18-9}$$

Trabajo de un peso. El peso de un cuerpo realiza trabajo sólo cuando su centro de masa G experimenta un *desplazamiento vertical* Δy. Si este desplazamiento es *hacia arriba* (fig. 18-7), el trabajo es negativo, puesto que el peso se opone al desplazamiento.

$$U_W = -W\,\Delta y \tag{18-10}$$

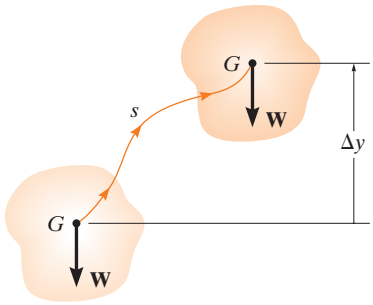


Fig. 18-7

Asimismo, cuando el desplazamiento es *hacia abajo* $(-\Delta y)$ el trabajo se vuelve *positivo*. En ambos casos, el cambio de elevación se considera mínimo de modo que **W**, producido por la gravitación, es constante.

Trabajo de una fuerza de resorte. Si un resorte elástico lineal se conecta a una cuerpo, la fuerza $F_S = ks$ *que actúa en el cuerpo* realiza trabajo cuando el resorte se alarga o se comprime desde s_1 hasta una posición s_2 *más lejana*. En ambos casos, el trabajo será *negativo*, ya que el *desplazamiento del cuerpo* se opone a la dirección de la fuerza (fig. 18-8). El trabajo es

$$U_s = -\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right) \tag{18-11}$$

donde $|s_2| > |s_1|$.

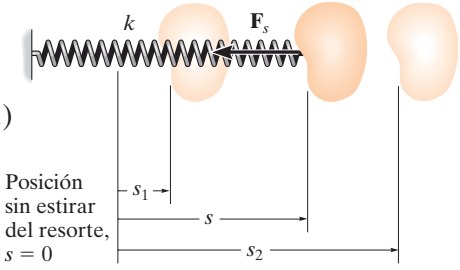


Fig. 18-8

Fuerzas que no realizan trabajo. Hay algunas fuerzas externas que no realizan trabajo cuando el cuerpo se desplaza. Estas fuerzas actúan en *puntos fijos* en el cuerpo o tienen una dirección *perpendicular a su desplazamiento*. Entre algunos ejemplos están las reacciones en un soporte de pasador alrededor del cual gira un cuerpo, la reacción normal que actúa en un cuerpo que se mueve a lo largo de una superficie fija y el peso de un cuerpo cuando su centro de gravedad se mueve en un *plano horizontal* (fig. 18-9). Una fuerza de fricción $\mathbf{F}_f$ que actúa en un cuerpo redondo cuando *rueda sin deslizarse* sobre una superficie áspera tampoco realiza trabajo*. Esto es porque, durante *cualquier instante de tiempo dt*, $\mathbf{F}_f$ actúa en un punto del cuerpo que tiene *velocidad cero* (centro instantáneo, *CI por instantaneous center*) y, por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza en el punto es cero. Dicho de otra manera, el punto no se desplaza en la dirección de la fuerza durante este instante. Como $\mathbf{F}_f$ se pone en contacto con puntos sucesivos durante sólo un instante, el trabajo de $\mathbf{F}_f$ será cero.

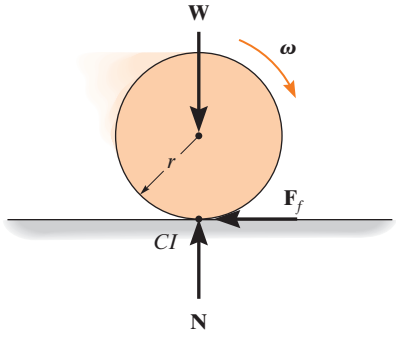
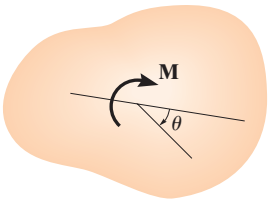
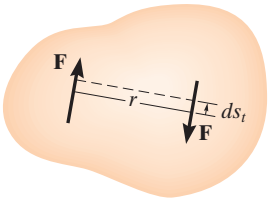


Fig. 18-9

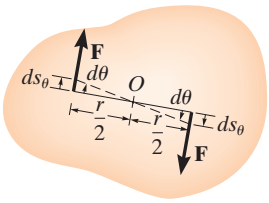
*El trabajo realizado por una fuerza de fricción *cuando el cuerpo se desliza* se analizó en la sección 14.3.



(a)



Traslación
(b)



Rotación
(c)

Fig. 18-10

18.3 Trabajo de un momento de par

Considere el cuerpo de la figura 18-10*a*, el cual se somete a un momento de par $M = Fr$. Si el cuerpo experimenta un desplazamiento diferencial, entonces el trabajo realizado por las fuerzas del par se puede determinar si se considera el desplazamiento como la suma de una traslación distinta más rotación. Cuando el cuerpo *se traslada*, el trabajo de cada fuerza es realizado sólo por el *componente de desplazamiento* a lo largo de la línea de acción de las fuerzas ds_t (fig. 18-10*b*). Es evidente que el trabajo "positivo" de una fuerza *anula* el trabajo "negativo" de la otra. Cuando el cuerpo experimenta una rotación diferencial $d\theta$ alrededor del punto arbitrario O (fig. 18-10*c*), entonces cada fuerza experimenta un desplazamiento $ds_\theta = (r/2)d\theta$ en la dirección de la fuerza. Por consiguiente, el trabajo total realizado es

$$\begin{aligned} dU_M &= F\left(\frac{r}{2}d\theta\right) + F\left(\frac{r}{2}d\theta\right) = (Fr)\,d\theta \\ &= M\,d\theta \end{aligned}$$

El trabajo es *positivo* cuando **M** y $d\boldsymbol{\theta}$ tienen el *mismo sentido de dirección*, y *negativo* si estos vectores están en el *sentido opuesto*.

Cuando el cuerpo gira en el plano a través de un ángulo finito θ medido en radianes, desde θ_1 hasta θ_2, el trabajo de un momento de par es, por lo tanto,

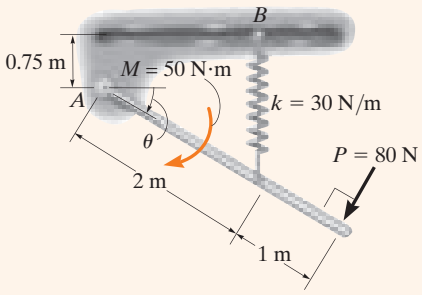
$$U_M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,d\theta \tag{18-12}$$

Si el momento de par **M** tiene una *magnitud constante*, entonces

$$U_M = M(\theta_2 - \theta_1) \tag{18-13}$$

EJEMPLO 18.1

La barra que se muestra en la figura 18-11*a* tiene una masa de 10 kg y se somete a un momento de par $M = 50\ \text{N} \cdot \text{m}$ y a una fuerza $P = 80$ N, la cual siempre se aplica perpendicular al extremo de la barra. Asimismo, la longitud sin estirar del resorte es de 0.5 m y permanece en la posición vertical debido a la guía de rodillo en B. Determine el trabajo total realizado por todas las fuerzas que actúan en la barra cuando gira hacia abajo desde $\theta = 0°$ hasta $\theta = 90°$.



(a)

SOLUCIÓN

Primero se traza el diagrama de cuerpo libre de la barra con todas las fuerzas que actúan en ella (fig. 18-11*b*).

Peso W. Como el peso $10(9.81)\text{N} = 98.1$ N se desplaza 1.5 m hacia abajo, el trabajo es

$$U_W = 98.1\ \text{N}(1.5\ \text{m}) = 147.2\ \text{J}$$

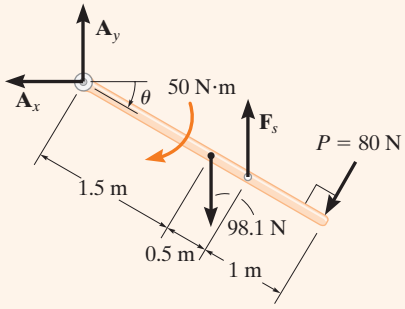
¿Por qué el trabajo es positivo?

Momento de par M. El momento de par gira a través de un ángulo $\theta = \pi/2$ rad. Por lo tanto,

$$U_M = 50\ \text{N} \cdot \text{m}\ (\pi/2) = 78.5\ \text{J}$$

Fuerza de resorte F_s. Cuando $\theta = 0°$ el resorte se alarga $(0.75\ \text{m} - 0.5\ \text{m}) = 0.25$ m y cuando $\theta = 90°$, el alargamiento es $(2\ \text{m} + 0.75\ \text{m}) - 0.5\ \text{m} = 2.25$ m. Entonces,

$$U_s = -\left[\tfrac{1}{2}(30\ \text{N/m})(2.25\ \text{m})^2 - \tfrac{1}{2}(30\ \text{N/m})(0.25\ \text{m})^2\right] = -75.0\ \text{J}$$



(b)

Fig. 18-11

Por inspección, el resorte realiza trabajo negativo en la barra, ya que $\mathbf{F}_s$ actúa en la dirección opuesta al desplazamiento. Esto concuerda con el resultado.

Fuerza P. A medida que la barra desciende, la fuerza se desplaza una distancia de $(\pi/2)(3\ \text{m}) = 4.712$ m. El trabajo es positivo. ¿Por qué?

$$U_P = 80\ \text{N}(4.712\ \text{m}) = 377.0\ \text{J}$$

Reacciones en el pasador. Las fuerzas $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ no realizan trabajo pues no se desplazan.

Trabajo total. El trabajo de todas las fuerzas cuando la barra se desplaza es, por consiguiente,

$$U = 147.2\ \text{J} + 78.5\ \text{J} - 75.0\ \text{J} + 377.0\ \text{J} = 528\ \text{J} \qquad \textit{Resp.}$$

El contrapeso de este puente levadizo realiza trabajo positivo mientras el puente se eleva y, por lo tanto, cancela el trabajo negativo que realiza el peso del puente. (© R. C. Hibbeler)

18.4 Principio de trabajo y energía

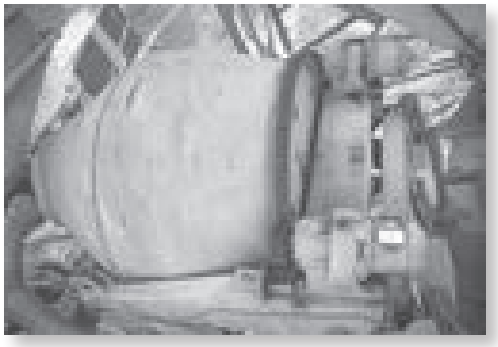
Al aplicar el principio de trabajo y energía, desarrollado en la sección 14.2, a cada una de las partículas de un cuerpo rígido y con la suma algebraica de los resultados —ya que la energía es un escalar—, el principio de trabajo y energía para un cuerpo rígido resulta

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = T_2 \tag{18-14}$$

Esta ecuación establece que la energía cinética inicial de traslación *y* rotación del cuerpo, más el trabajo realizado por todas las fuerzas externas y momentos de par que actúan en el cuerpo, a medida que éste se mueve desde su posición inicial hasta su posición final, es igual a su energía cinética final de traslación *y* rotación. Observe que no tiene que considerarse el trabajo de las *fuerzas internas* del cuerpo. Estas fuerzas actúan en pares colineales iguales pero opuestos, de modo que cuando el cuerpo se mueve, el trabajo de una fuerza anula el de su contraparte. Asimismo, como el cuerpo es rígido, entre estas fuerzas *no hay movimiento relativo*, de modo que no se realiza trabajo interno.

Cuando varios cuerpos rígidos están conectados mediante pasadores, o por cables inextensibles o engranados entre sí, puede aplicarse la ecuación 18-14 a *todo el sistema* de cuerpos conectados. En todos estos casos, las fuerzas internas, que mantienen los diversos miembros juntos, no realizan trabajo y por ello se eliminan del análisis.

18



El trabajo del par de torsión o momento, desarrollado por los engranes motrices de los motores se transforma en energía cinética de rotación del tambor. (© R. C. Hibbeler)

Procedimiento para el análisis

El principio de trabajo y energía se utiliza para resolver problemas cinéticos que implican *velocidad*, *fuerza* y *desplazamiento*, ya que estos términos intervienen en la formulación. Para su aplicación, se sugiere el siguiente procedimiento.

Energía cinética (diagramas cinemáticos)

- La energía cinética de un cuerpo se compone de dos partes. La energía cinética de traslación se refiere a la velocidad del centro de masa, $T = \frac{1}{2}mv_G^2$, y la energía cinética de rotación se determina por el momento de inercia del cuerpo con respecto al centro de masa, $T = \frac{1}{2}I_G\omega^2$. En el caso especial de rotación alrededor de un eje fijo (o rotación alrededor del *CI*), estas dos energías cinéticas se combinan y pueden expresarse como $T = \frac{1}{2}I_O\omega^2$, donde I_O es el momento de inercia con respecto al eje de rotación.
- Los *diagramas cinemáticos* de velocidad suelen ser útiles para determinar v_G y ω o para establecer una *relación* entre v_G y ω*.

Trabajo (diagrama de cuerpo libre)

- Trace un diagrama de cuerpo libre del cuerpo cuando se encuentra en un punto intermedio a lo largo de la trayectoria que incluya todas las fuerzas y momentos de par que realizan trabajo en el cuerpo cuando se desplaza a lo largo de la trayectoria.
- Una fuerza realiza trabajo cuando se desplaza en su dirección.
- Las fuerzas que son funciones de desplazamiento deben integrarse para obtener el trabajo. Gráficamente, el trabajo es igual al área bajo la curva de fuerza-desplazamiento.
- El trabajo de un peso es el producto de su magnitud y el desplazamiento vertical, $U_W = Wy$. Es positivo cuando el peso se mueve hacia abajo.
- El trabajo de un resorte es de la forma $U_s = \frac{1}{2}ks^2$, donde k es la rigidez del resorte y s es su alargamiento o compresión.
- El trabajo de un par es el producto del momento de par por el ángulo en radianes a través de los cuales gira, $U_M = M\theta$.
- Como se requiere la *suma algebraica* de los términos de trabajo, es importante especificar el signo adecuado de cada término. Específicamente, el trabajo es *positivo* cuando la fuerza (momento de par) actúa en la *misma dirección* que su desplazamiento (rotación); de lo contrario, es negativo.

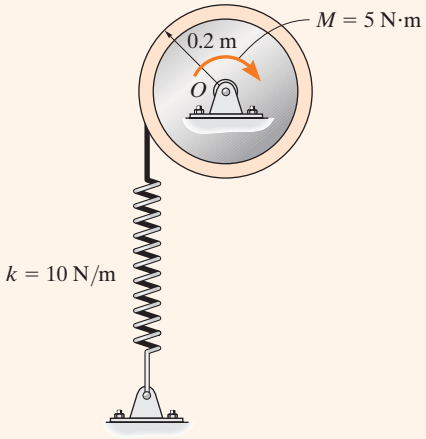
Principio de trabajo y energía

- Aplique el principio de trabajo y energía, $T_1 = \sum U_{1\text{-}2} = T_2$. Como ésta es una ecuación escalar, puede utilizarse para despejar sólo una incógnita cuando se aplica a un solo cuerpo rígido.

*Un breve repaso de las secciones 16.5 a 16.7 puede ser útil cuando se resuelven problemas, ya que los cálculos de energía cinética requieren un análisis cinemático de la velocidad.

EJEMPLO 18.2

El disco de 30 kg que se ilustra en la figura 18-12*a* se sostiene mediante un pasador que pasa por su centro. Determine el ángulo a través del cual debe girar para alcanzar una velocidad angular de 2 rad/s a partir del reposo. Se encuentra sometido a un momento de par constante $M = 5\ \text{N} \cdot \text{m}$. En un inicio, el resorte está sin estirar y su cuerda se enrolla alrededor del borde del disco.



(a)

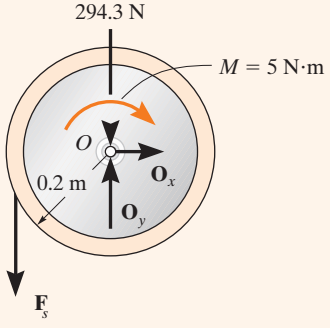
SOLUCIÓN

Energía cinética. Como el disco gira alrededor de un eje fijo, e inicialmente está en reposo, entonces,

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2} I_O \omega_2^2 = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}(30\ \text{kg})(0.2\ \text{m})^2\right](2\ \text{rad/s})^2 = 1.2\ \text{J}$$

Trabajo (diagrama de cuerpo libre). Como se muestra en la figura 18-12*b*, las reacciones en los pasadores $\mathbf{O}_x$ y $\mathbf{O}_y$ y el peso (294.3 N) no realizan trabajo, pues no se desplazan. El *momento de par*, de magnitud constante, realiza trabajo positivo $U_M = M\theta$, ya que el disco *gira* un ángulo de θ rad en el sentido horario y el resorte realiza trabajo negativo $U_s = -\frac{1}{2}ks^2$.



(b)

Fig. 18-12

Principio de trabajo y energía

$$\{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{T_2\}$$

$$\{T_1\} + \left\{M\theta - \tfrac{1}{2}ks^2\right\} = \{T_2\}$$

$$\{0\} + \left\{(5\ \text{N} \cdot \text{m})\theta - \frac{1}{2}(10\ \text{N/m})[\theta(0.2\ \text{m})]^2\right\} = \{1.2\ \text{J}\}$$

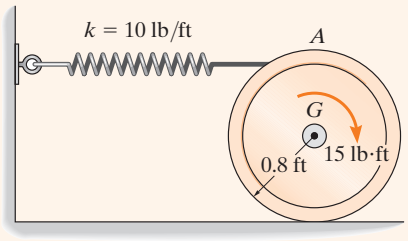
$$-0.2\theta^2 + 5\theta - 1.2 = 0$$

Al resolver esta ecuación cuadrática para encontrar la menor raíz positiva,

$$\theta = 0.2423\ \text{rad} = 0.2423\ \text{rad}\left(\frac{180^\circ}{\pi\ \text{rad}}\right) = 13.9^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 18.3

La rueda mostrada en la figura 18-13*a* pesa 40 lb y su radio de giro es $k_G = 0.6$ ft con respecto a su centro de masa G. Si se somete a un momento de par en sentido horario de 15 lb · ft y rueda desde el punto de reposo sin deslizarse, determine su velocidad angular después de que su centro G se mueve 0.5 ft. La rigidez del resorte es $k = 10$ lb/ft e inicialmente no está estirado cuando se aplica el momento de par.



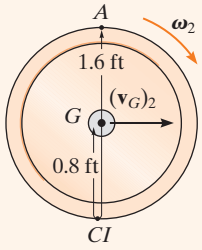
(a)

SOLUCIÓN

Energía cinética (diagrama cinemático). Como en principio la rueda está en reposo,

$$T_1 = 0$$

El diagrama cinemático de la rueda cuando está en su posición final se muestra en la figura 18-13*b*. La energía cinética final se determina por

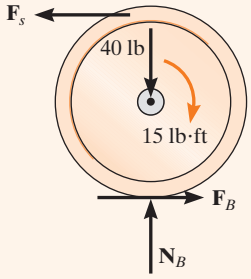


(b)

$$\begin{aligned} T_2 &= \tfrac{1}{2} I_{CI} \omega_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{40 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}(0.6 \text{ ft})^2 + \left(\frac{40 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}\right)(0.8 \text{ ft})^2\right]\omega_2^2 \\ T_2 &= 0.6211\ \omega_2^2 \end{aligned}$$

Trabajo (diagrama de cuerpo libre). Como se indica en la figura 18-13*c*, sólo la fuerza del resorte $\mathbf{F}_s$ y el momento de par realizan trabajo. La fuerza normal no se desplaza a lo largo de su línea de acción y la fuerza de fricción *no realiza trabajo*, ya que la rueda no se desliza conforme rueda.

El trabajo de $\mathbf{F}_s$ se determina con $U_s = -\frac{1}{2}ks^2$. En este caso, el trabajo es negativo puesto que $\mathbf{F}_s$ actúa en la dirección opuesta al desplazamiento. Como la rueda no se desliza cuando el centro G se mueve 0.5 ft, entonces la rueda gira $\theta = s_G/r_{G/CI} = 0.5 \text{ ft}/0.8 \text{ ft} = 0.625$ rad (fig. 18-13*b*). Por lo tanto, el resorte se alarga $s = \theta r_{A/CI} = (0.625 \text{ rad})(1.6 \text{ ft}) = 1$ ft.



(c)

Fig. 18-13

Principio de trabajo y energía

$$\{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{T_2\}$$

$$\{T_1\} + \{M\theta - \tfrac{1}{2}ks^2\} = \{T_2\}$$

$$\{0\} + \left\{15 \text{ lb} \cdot \text{ft}(0.625 \text{ rad}) - \frac{1}{2}(10 \text{ lb/ft})(1 \text{ ft})^2\right\} = \{0.6211\ \omega_2^2 \text{ ft} \cdot \text{lb}\}$$

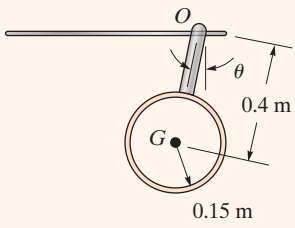
$$\omega_2 = 2.65 \text{ rad/s} \circlearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

18

EJEMPLO 18.4

(© R. C. Hibbeler)

El tubo de 700 kg cuelga por igual de los dos dientes del montacargas que se muestra en la fotografía y experimenta un movimiento de oscilación, de modo que cuando $\theta = 30°$ está momentáneamente en reposo. Determine las fuerzas normal y de fricción que actúan en cada uno de los dientes y son necesarias para sostener el tubo si $\theta = 0°$. Las mediciones del tubo y los dientes se muestran en la figura 18-14*a*. Ignore la masa de los dientes y el espesor del tubo.



(a)

Fig. 18.14

SOLUCIÓN

Debemos utilizar las ecuaciones de movimiento para determinar las fuerzas en los dientes, ya que estas fuerzas no realizan trabajo. Antes de hacerlo, sin embargo, aplicaremos el principio de trabajo y energía para determinar la velocidad angular del tubo cuando $\theta = 0°$.

Energía cinética (diagrama cinemático). Como el tubo está en un principio en reposo, entonces

$$T_1 = 0$$

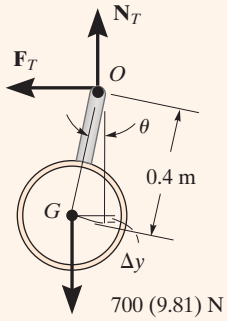
La energía cinética final se calcula con respecto al punto fijo O o al centro de masa G. Para el cálculo, consideraremos que el tubo es un anillo delgado, de modo que $I_G = mr^2$. Si se considera el punto G, tenemos

$$\begin{aligned} T_2 &= \tfrac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega_2^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(700\text{ kg})[(0.4\text{ m})\omega_2]^2 + \tfrac{1}{2}[700\text{ kg}(0.15\text{ m})^2]\omega_2^2 \\ &= 63.875\omega_2^2 \end{aligned}$$

Si se considera el punto O, entonces debe utilizarse el teorema de los ejes paralelos para determinar I_O. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T_2 &= \tfrac{1}{2}I_O\omega_2^2 = \tfrac{1}{2}[700\text{ kg}(0.15\text{ m})^2 + 700\text{ kg}(0.4\text{ m})^2]\omega_2^2 \\ &= 63.875\omega_2^2 \end{aligned}$$

Trabajo (diagrama de cuerpo libre). Figura 18-14*b*. Las fuerzas normal y de fricción no realizan trabajo en los dientes, ya que no se mueven cuando el tubo oscila. El peso realiza trabajo positivo ya que desciende una distancia vertical $\Delta y = 0.4\text{ m} - 0.4\cos 30^\circ\text{ m} = 0.05359\text{ m}$.



(b)

Principio de trabajo y energía

$$\{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{T_2\}$$
$$\{0\} + \{700(9.81)\text{ N}(0.05359\text{ m})\} = \{63.875\omega_2^2\}$$
$$\omega_2 = 2.400\text{ rad/s}$$

Ecuaciones de movimiento. Al recurrir a los diagramas de cuerpo libre y cinético ilustrados en la figura 18-14*c* y utilizar el resultado de ω_2,

$$\overset{+}{\leftarrow}\Sigma F_t = m(a_G)_t; \quad F_T = (700\text{ kg})(a_G)_t$$
$$+\uparrow\Sigma F_n = m(a_G)_n; \quad N_T - 700(9.81)\text{ N} = (700\text{ kg})(2.400\text{ rad/s})^2(0.4\text{ m})$$
$$\circlearrowleft +\Sigma M_O = I_O\alpha; \quad 0 = [(700\text{ kg})(0.15\text{ m})^2 + (700\text{ kg})(0.4\text{ m})^2]\alpha$$

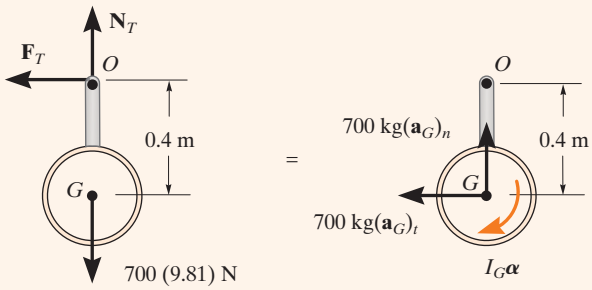
Como $(a_G)_t = (0.4\text{ m})\alpha$, entonces,

$$\alpha = 0, \quad (a_G)_t = 0$$
$$F_T = 0$$
$$N_T = 8.480\text{ kN}$$

Se utilizan dos dientes para soportar la carga; por consiguiente,

$$F'_T = 0 \qquad \textit{Resp.}$$
$$N'_T = \frac{8.480\text{ kN}}{2} = 4.24\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Debido al movimiento de oscilación, los dientes se someten a una fuerza normal *mayor* que la que se generaría si la carga estuviera estática, en cuyo caso $N'_T = 700(9.81)\text{ N}/2 = 3.43\text{ kN}$.

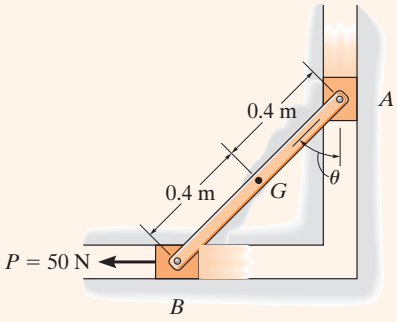


(c)

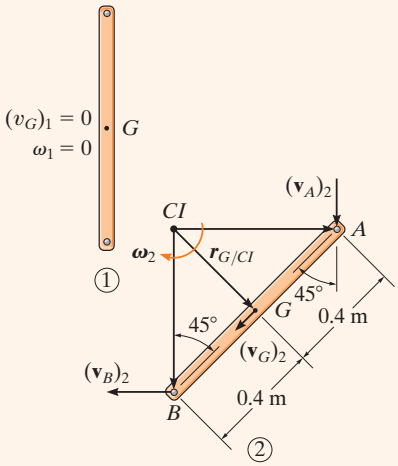
Fig. 18-14 (cont.)

18

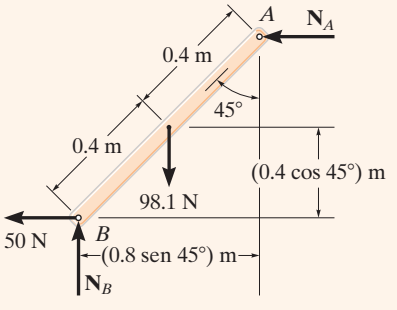
EJEMPLO 18.5



(a)



(b)



(c)

Fig. 18-15

La varilla de 10 kg que se muestra en la figura 18-15*a* está restringida de modo que sus extremos se mueven a lo largo de las ranuras. La varilla inicialmente está en reposo cuando $\theta = 0°$. Si en el bloque corredizo B actúa una fuerza horizontal $P = 50$ N, determine la velocidad angular de la varilla cuando $\theta = 45°$. Ignore la masa de los bloques A y B.

SOLUCIÓN

¿Por qué puede utilizarse el principio de trabajo y energía para resolver este problema?

Energía cinética (diagramas cinemáticos). En la figura 18-15*b* se muestran dos diagramas cinemáticos de la varilla, cuando está en la posición inicial 1 y en la posición final 2. Cuando la varilla está en la posición 1, $T_1 = 0$ ya que $(\mathbf{v}_G)_1 = \boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0}$. En la posición 2, la velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}_2$ y la velocidad del centro de masa es $(\mathbf{v}_G)_2$. Por lo tanto, la energía cinética es

$$\begin{aligned} T_2 &= \tfrac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega_2^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{12}(10\text{ kg})(0.8\text{ m})^2\right]\omega_2^2 \\ &= 5(v_G)_2^2 + 0.2667(\omega_2)^2 \end{aligned}$$

Las dos incógnitas $(v_G)_2$ y ω_2 pueden relacionarse con base en el centro instantáneo de velocidad cero de la varilla (fig. 18-15*b*). Se observa que a medida que A desciende con una velocidad $(\mathbf{v}_A)_2$, B se mueve horizontalmente a la izquierda con una velocidad $(\mathbf{v}_B)_2$. Al conocer estas direcciones, el CI se encuentra como se muestra en la figura. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} (v_G)_2 &= r_{G/CI}\omega_2 = (0.4\tan 45°\text{ m})\omega_2 \\ &= 0.4\omega_2 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$T_2 = 0.8\omega_2^2 + 0.2667\omega_2^2 = 1.0667\omega_2^2$$

Desde luego, también podemos determinar este resultado con $T_2 = \frac{1}{2}I_{IC}\omega_2^2$.

Trabajo (diagrama de cuerpo libre). Figura 18-15*c*. Las fuerzas normales $\mathbf{N}_A$ y $\mathbf{N}_B$ no realizan trabajo cuando la varilla se desplaza. ¿Por qué? El peso de 98.1 N se desplaza una distancia vertical de $\Delta y = (0.4 - 0.4\cos 45°)$ m; mientras que la fuerza de 50 N recorre una distancia horizontal de $s = (0.8\text{ sen }45°)$ m. Estas dos fuerzas realizan trabajo positivo. ¿Por qué?

Principio de trabajo y energía

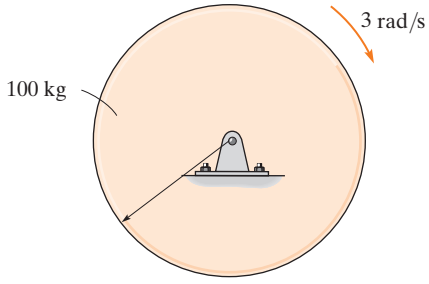
$$\begin{aligned} \{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} &= \{T_2\} \\ \{T_1\} + \{W\Delta y + Ps\} &= \{T_2\} \\ \{0\} + \{98.1\text{ N}(0.4\text{ m} - 0.4\cos 45°\text{ m}) + 50\text{ N}(0.8\text{ sen }45°\text{ m})\} &= \{1.0667\omega_2^2\text{ J}\} \end{aligned}$$

Si despejamos ω_2 obtenemos

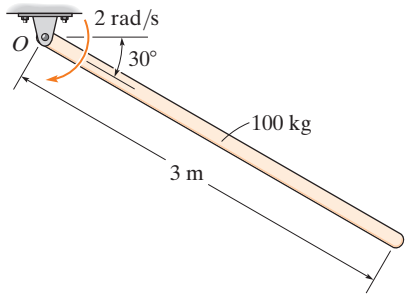
$$\omega_2 = 6.11\text{ rad/s}\circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMA PRELIMINAR

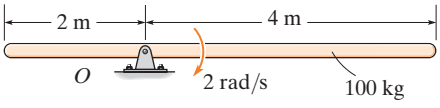
P18-1. Determine la energía cinética del objeto de 100 kg.



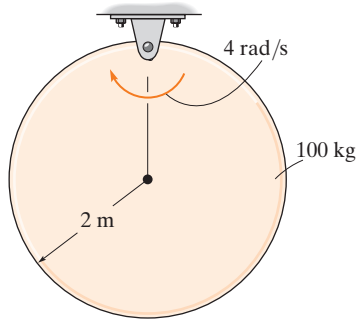
(a)



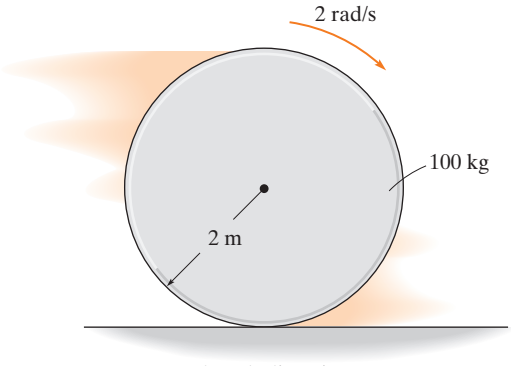
(d)



(b)

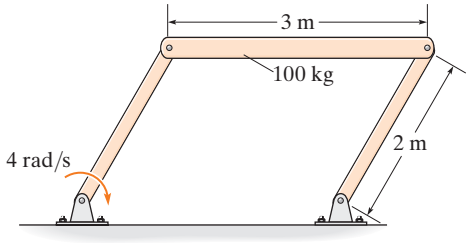


(e)



No hay deslizamiento

(c)



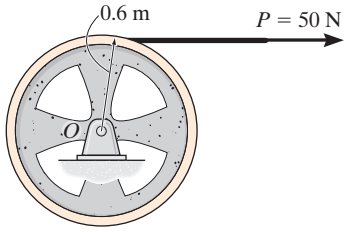
(f)

Prob. P18-1

18

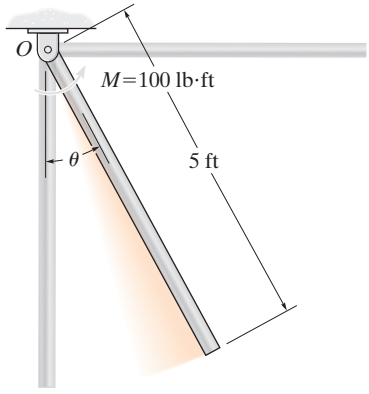
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F18-1. La rueda de 80 kg tiene un radio de giro con respecto al centro de masa O de $k_O = 400$ mm. Determine su velocidad angular después de que ha realizado 20 revoluciones a partir del punto de reposo.



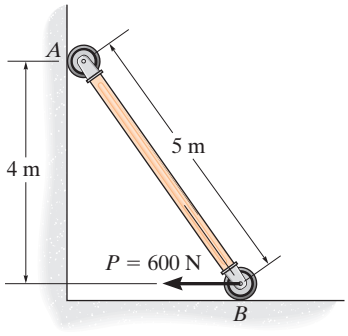
Prob. F18-1

F18-2. La varilla delgada uniforme de 50 lb se somete a un momento de par $M = 100$ lb · ft. Si la varilla está en reposo cuando $\theta = 0°$, determine su velocidad angular cuando $\theta = 90°$.



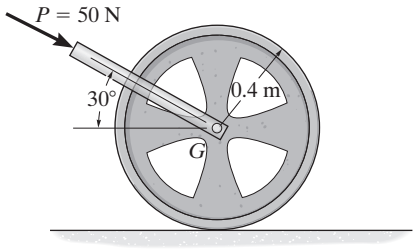
Prob. F18-2

F18-3. La varilla delgada uniforme de 50 kg está en reposo en la posición que se muestra cuando se aplica una fuerza $P = 600$ N. Determine su velocidad angular cuando alcanza la posición vertical.



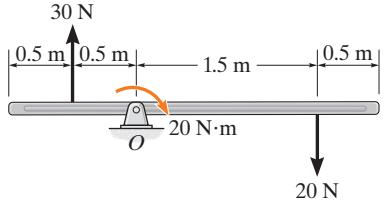
Prob. F18-3

F18-4. La rueda de 50 kg se somete a una fuerza de 50 N. Si comienza a rodar desde el punto de reposo sin deslizarse, determine su velocidad angular después de que ha realizado 10 revoluciones. Su radio de giro con respecto a su centro de masa G es $k_G = 0.3$ m.



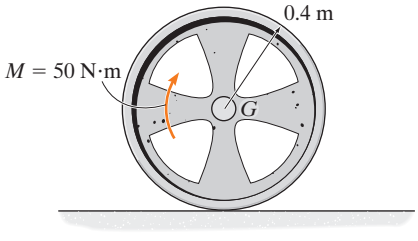
Prob. F18-4

F18-5. Si la varilla delgada uniforme de 30 kg comienza a rodar del reposo en la posición mostrada, determine su velocidad angular después de que ha realizado 4 revoluciones. Las fuerzas permanecen perpendiculares a la varilla.



Prob. F18-5

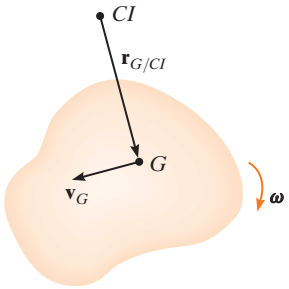
F18-6. La rueda de 20 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro de masa G de $k_G = 300$ mm. Cuando se somete a un momento de par $M = 50$ N · m, rueda sin deslizarse. Determine su velocidad angular después de que su centro de masa G ha recorrido una distancia de $s_G = 20$ m, a partir del reposo.



Prob. F18-6

PROBLEMAS

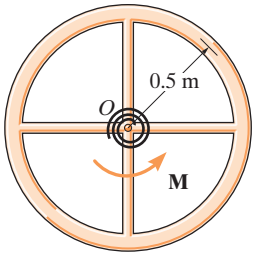
18-1. En un instante dado, el cuerpo de masa m tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la velocidad de su centro de masa es $\mathbf{v}_G$. Demuestre que su energía cinética puede representarse como $T = \frac{1}{2} I_{CI} \omega^2$, donde I_{CI} es el momento de inercia del cuerpo, calculado con respecto al eje instantáneo de velocidad cero, localizado a una distancia $r_{G/CI}$ del centro de masa, como se muestra.



Prob. 18-1

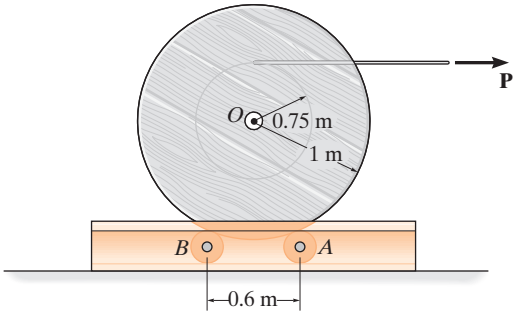
18-2. La rueda está hecha de un aro delgado de 5 kg y dos varillas delgadas de 2 kg. Si el resorte de torsión unido al centro de la rueda tiene una rigidez $k = 2\ \text{N} \cdot \text{m/rad}$, y la rueda se hace girar hasta que desarrolla el par $M = 25\ \text{N} \cdot \text{m}$, determine la velocidad angular máxima de la rueda si se libera desde el reposo.

18-3. La rueda está hecha de un aro delgado de 5 kg y dos varillas delgadas de 2 kg. Si el resorte de torsión unido al centro de la rueda tiene una rigidez $k = 2\ \text{N} \cdot \text{m/rad}$, de modo que el par de torsión en el centro de la rueda es $M = (2\theta)\ \text{N} \cdot \text{m}$, donde θ está en radianes, determine la velocidad angular máxima de la rueda si se gira dos revoluciones y, después, se libera desde el reposo.



Probs. 18-2/3

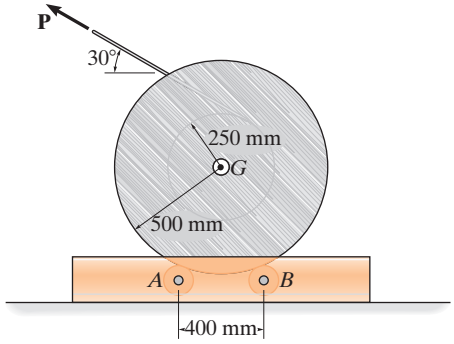
***18-4.** Se aplica una fuerza de $P = 60$ N al cable, lo cual ocasiona que el carrete de 200 kg gire porque está descansando sobre los dos rodillos A y B del dispensador. Determine la velocidad angular del carrete después de que ha girado dos revoluciones a partir del reposo. Desprecie la masa de los rodillos y la masa del cable. Suponga que el radio de giro del carrete alrededor de su eje central se mantiene constante en $k_O = 0.6$ m.



Prob. 18-4

18-5. Se aplica una fuerza de $P = 20$ N al cable, lo cual ocasiona que el carrete de 175 kg gire porque está descansando sobre los dos rodillos A y B del dispensador. Determine la velocidad angular del carrete después de que ha girado dos revoluciones a partir del reposo. Desprecie la masa de los rodillos y la masa del cable. El radio de giro del carrete alrededor de su eje central es $k_G = 0.42$ m.

18-6. Se aplica una fuerza de $P = 20$ N al cable, lo cual ocasiona que el carrete de 175 kg gire sin deslizarse sobre los dos rodillos A y B del dispensador. Determine la velocidad angular del carrete después de que ha girado dos revoluciones a partir del reposo. Desprecie la masa del cable. Cada rodillo puede considerarse un cilindro de 18 kg que tiene un radio de 0.1 m. El radio de giro del carrete alrededor de su eje central es $k_G = 0.42$ m.

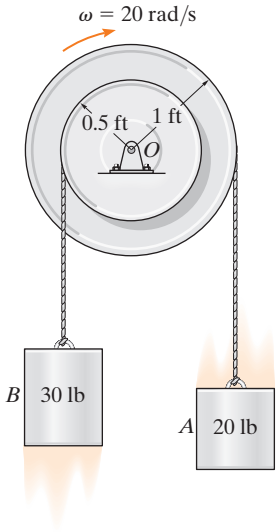


Probs. 18-5/6

18

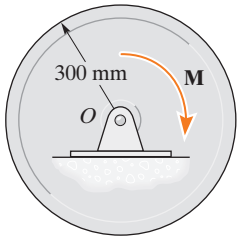
18-7. La polea doble se compone de dos partes conectadas entre sí. Pesa 50 lb y tiene un radio de giro con respecto a su centro de masa de $k_O = 0.6$ ft. Si gira con una velocidad angular de 20 rad/s en el sentido horario, determine la energía cinética del sistema suponiendo que ninguno de los cables se desliza sobre la polea.

***18-8.** La doble polea se compone de dos partes conectadas entre sí. Pesa 50 lb y tiene un radio de giro con respecto a su centro de masa de $k_O = 0.6$ ft. Si gira con una velocidad angular de 20 rad/s en sentido horario. Determine la velocidad angular de la polea en el instante en que el peso de 20 lb se mueve 2 ft hacia abajo.



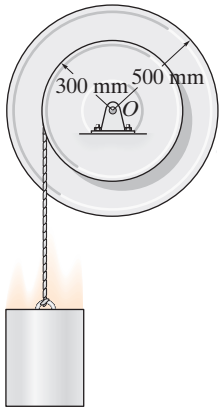
Probs. 18-7/8

18-9. El disco, que tiene una masa de 20 kg, se somete al momento de par de $M = (2\theta + 4)$ N · m, donde θ está en radianes. Si parte desde el reposo, determine su velocidad angular cuando ha girado dos revoluciones.



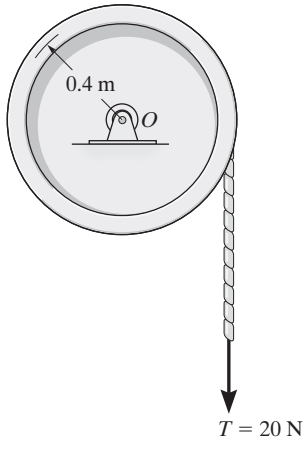
Prob. 18-9

18-10. El carrete tiene una masa de 40 kg y un radio de giro de $k_O = 0.3$ m. Si el bloque de 10 kg se libera desde el reposo, determine la distancia que debe caer el bloque para que el carrete tenga una velocidad angular $\omega = 15$ rad/s. Además, ¿cuál es la tensión de la cuerda mientras que el bloque está en movimiento? Desprecie la masa de la cuerda.



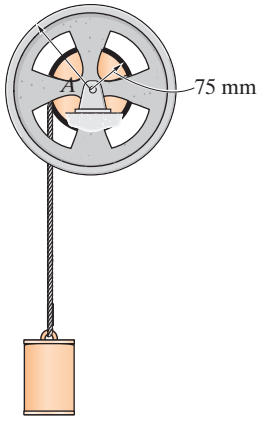
Prob. 18-10

18-11. Se aplica la fuerza de $T = 20$ N a la cuerda de masa despreciable. Determine la velocidad angular de la rueda de 20 kg cuando ha girado 4 revoluciones a partir del reposo. La rueda tiene un radio de giro de $k_O = 0.3$ m.



Prob. 18-11

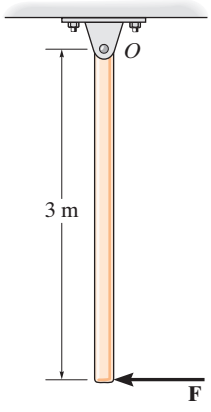
***18-12.** Determine la velocidad del cilindro de 50 kg después de que ha descendido una distancia de 2 m. En un principio, el sistema está en reposo. El carrete tiene una masa de 25 kg y un radio de giro con respecto a su centro de masa A de $k_A = 125$ mm.



Prob. 18-12

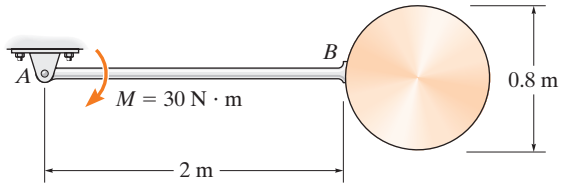
18-13. La varilla delgada uniforme de 10 kg está suspendida en reposo cuando se aplica la fuerza de $F = 150$ N a su extremo. Determine la velocidad angular de la varilla cuando ha girado 90° en sentido horario desde la posición indicada. La fuerza es siempre perpendicular a la varilla.

18-14. La varilla delgada uniforme de 10 kg está suspendida en reposo cuando se aplica la fuerza de $F = 150$ N a su extremo. Determine la velocidad angular de la varilla cuando ha girado 180° en sentido horario desde la posición mostrada. La fuerza es siempre perpendicular a la varilla.



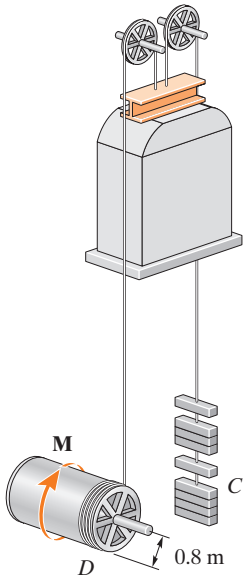
Probs. 18-13/14

18-15. El péndulo consiste en un disco uniforme de 10 kg y una varilla delgada uniforme de 3 kg. Si se libera desde el reposo en la posición indicada, determine su velocidad angular cuando gira 90° en sentido horario.



Prob. 18-15

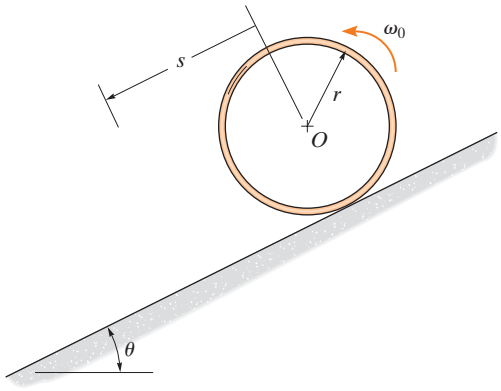
***18-16.** Un motor proporciona un par de torsión constante $M = 6$ kN · m al tambor de enrollamiento que opera el elevador. Si el elevador tiene una masa de 900 kg, la masa del contrapeso C es de 200 kg y el tambor de enrollamiento tiene una masa de 600 kg y un radio de giro con respecto a su eje de $k = 0.6$ m, determine la rapidez del elevador después de que ha ascendido 5 m a partir del reposo. Desprecie la masa de las poleas.



Prob. 18-16

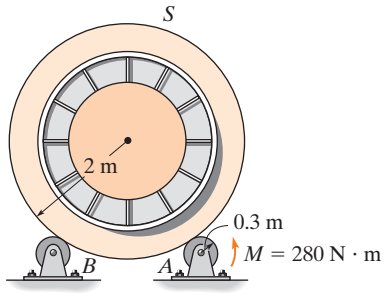
18

18-17. El centro O del anillo delgado de masa m recibe una velocidad angular de ω_0. Si el anillo rueda sin deslizarse, determine su velocidad angular después de haber recorrido sobre el plano una distancia s hacia abajo. Desprecie el espesor del anillo.



Prob. 18-17

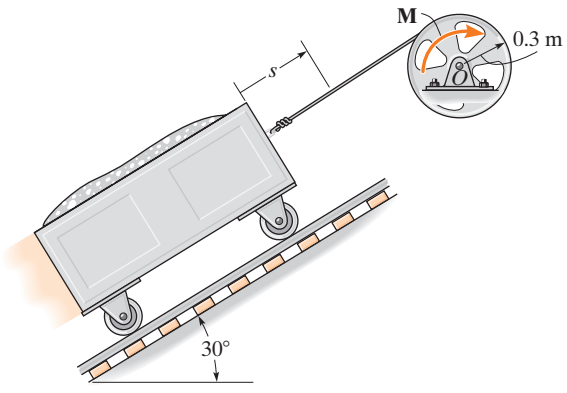
18-19. La pantalla giratoria S se utiliza para lavar piedra caliza. Cuando está vacía, tiene una masa de 800 kg y un radio de giro de $k_G = 1.75$ m. La rotación se consigue al aplicar un par de torsión de $M = 280$ N · m con respecto a la rueda motriz en A. Si no hay deslizamiento en A y la rueda de apoyo en B rueda libremente, determine la velocidad angular de la pantalla después de haber girado 5 revoluciones. Desprecie la masa de A y B.



Prob. 18-19

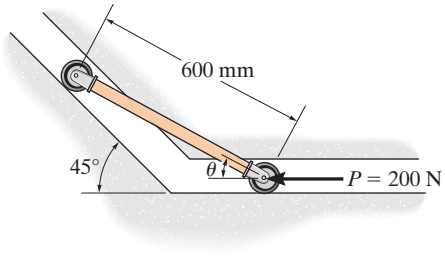
18

18-18. La rueda tiene una masa de 100 kg y un radio de giro de $k_O = 0.2$ m. Un motor suministra un par de torsión $M = (40\theta + 900)$ N · m, donde θ está en radianes, con respecto al eje de accionamiento en O. Determine la rapidez del carro de carga, que tiene una masa de 300 kg, después trasladarse $s = 4$ m. En un inicio, el carro está en reposo cuando $s = 0$ y $\theta = 0°$. Desprecie la masa del cable adjunto y la masa de las ruedas del carro.



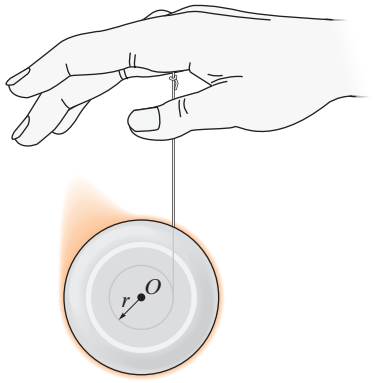
Prob. 18-18

***18-20.** Si $P = 200$ N y la varilla delgada uniforme de 15 kg parte del reposo en $\theta = 0°$, determine la velocidad angular de la varilla en el instante justo anterior a $\theta = 45°$.



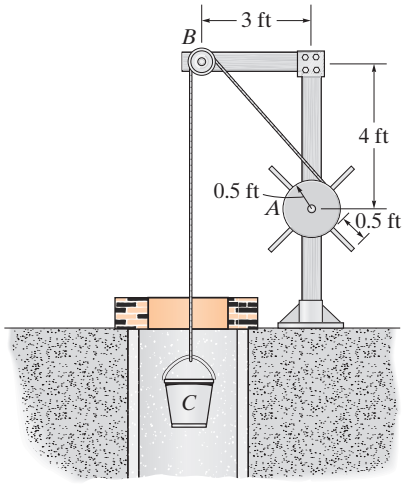
Prob. 18-20

18-21. Un yoyo tiene un peso de 0.3 lb y un radio de giro de $k_O = 0.06$ ft. Si se libera desde el reposo, determine cuánto debe descender para alcanzar una velocidad angular $\omega = 70$ rad/s. Desprecie la masa del cordón y suponga que éste se enrolla alrededor de la clavija central, de manera que el radio medio al que se desenrolla es $r = 0.02$ ft.



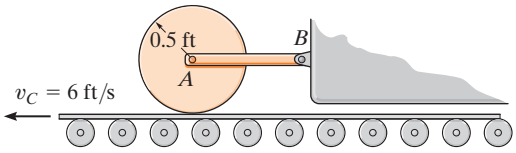
Prob. 18-21

18-22. Si el balde C de 50 lb se libera desde el reposo, determine su velocidad después de que ha caído una distancia de 10 ft. El molinete A puede considerarse como un cilindro de 30-lb, mientras que los rayos son varillas delgadas con un peso de 2 lb cada una. Desprecie el peso de la polea.



Prob. 18-22

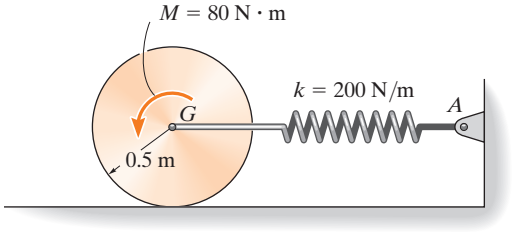
18-23. El coeficiente de fricción cinética entre el disco de 100 lb y la superficie de la banda transportadora es $\mu_A = 0.2$. Si la banda transportadora se mueve con una rapidez de $v_C = 6$ ft/s cuando el disco se pone en contacto con ella, determine el número de revoluciones que gira el disco antes de alcanzar una velocidad angular constante.



Prob. 18-23

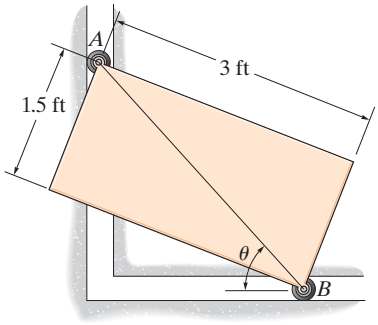
***18-24.** El disco de 30 kg se encuentra originalmente en reposo y el resorte no está estirado. En seguida se aplica un momento de par $M = 80$ N · m al disco de la manera indicada. Determine su velocidad angular cuando su centro de masa G se ha movido 0.5 m a lo largo del plano. El disco rueda sin deslizarse.

18-25. El disco de 30 kg se encuentra originalmente en reposo y el resorte no está estirado. En seguida se aplica un momento de par $M = 80$ N · m al disco de la manera indicada. Determine cuánto se desplaza el centro de masa del disco a lo largo del plano antes de detenerse momentáneamente. El disco rueda sin deslizarse.



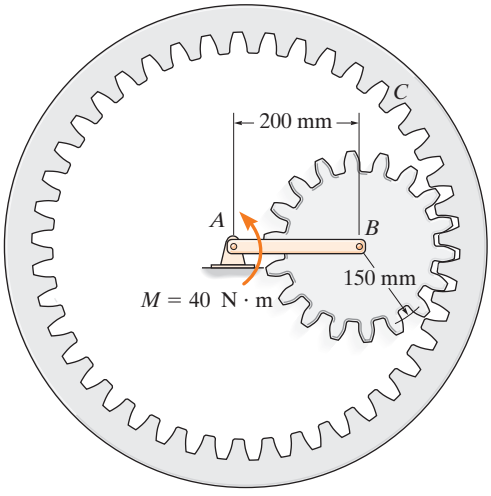
Probs. 18-24/25

18-26. Dos ruedas de peso despreciable están montadas en las esquinas A y B de la placa rectangular de 75 lb. Si la placa se libera desde el reposo en $\theta = 90°$, determine su velocidad angular en el instante justo anterior a $\theta = 0°$.



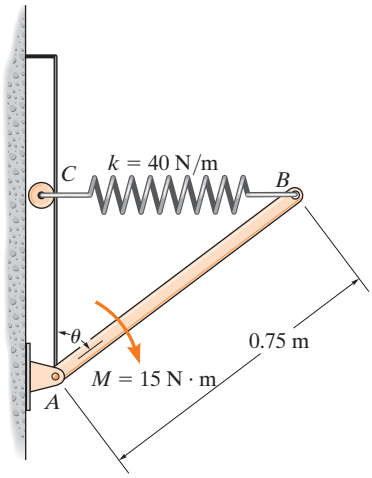
Prob. 18-26

18-27. El eslabón AB está sometido a un momento de par de $M = 40$ N · m. Si el engrane de anillo C está fijo, determine la velocidad angular del engrane interior de 15 kg, cuando el eslabón ha girado dos revoluciones a partir del reposo. Desprecie la masa del eslabón y suponga que el engrane interior es un disco. El movimiento se produce en el plano vertical.



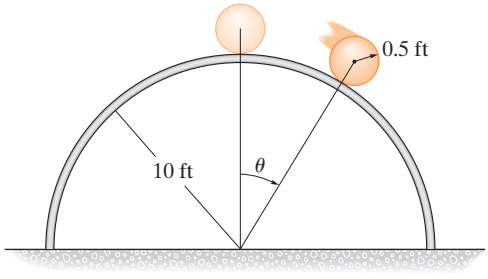
Prob. 18-27

***18-28.** La varilla AB de 10 kg está articulada en A y sometida a un momento de par de $M = 15$ N · m. Si la varilla se libera desde el reposo cuando el resorte está sin estirar en $\theta = 30°$, determine la velocidad angular de la varilla en el instante $\theta = 60°$. Cuando la varilla gira, el resorte permanece siempre horizontal, debido al soporte de rodillo en C.



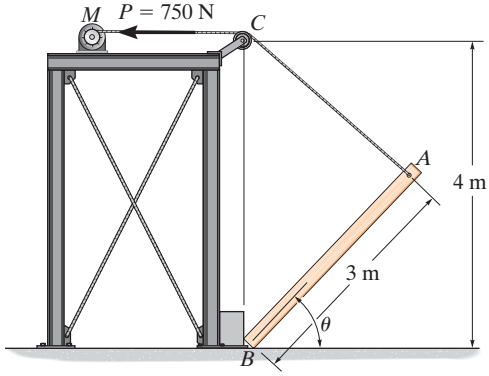
Prob. 18-28

18-29. La esfera de 10 lb parte del reposo en $\theta = 0°$ y rueda sin deslizarse sobre la superficie cilíndrica que tiene un radio de 10 ft. Determine la rapidez del centro de masa de la esfera en el instante $\theta = 45°$.



Prob. 18-29

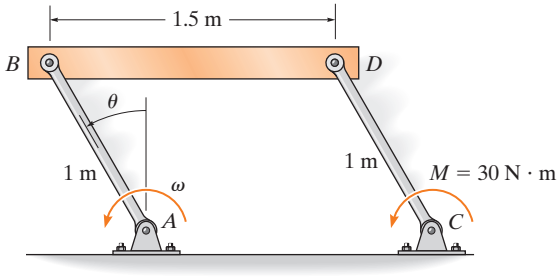
18-30. El motor M ejerce una fuerza constante de $P = 750$ N sobre la cuerda. Si el poste de 100 kg está en reposo cuando $\theta = 0°$, determine la velocidad angular del poste en el instante $\theta = 60°$. Desprecie la masa de la polea y su tamaño, y considere el poste como una varilla delgada.



Prob. 18-30

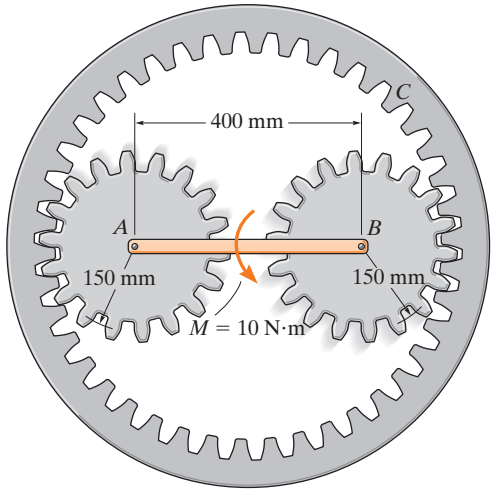
18-31. El eslabonamiento consiste en dos varillas AB y CD de 6 kg, y en una barra BD de 20 kg. Cuando $\theta = 0°$, la varilla AB gira con una velocidad angular $\omega = 2$ rad/s. Si la varilla CD se somete a un momento de par de $M = 30$ N · m, determine ω_{AB} en el instante $\theta = 90°$.

***18-32.** El eslabonamiento consiste en dos varillas AB y CD de 6 kg, y en una barra BD de 20 kg. Cuando $\theta = 0°$, la varilla AB gira con una velocidad angular $\omega = 2$ rad/s. Si la varilla CD se somete a un momento de par de $M = 30$ N · m, determine ω en el instante $\theta = 45°$.



Probs. 18-31/32

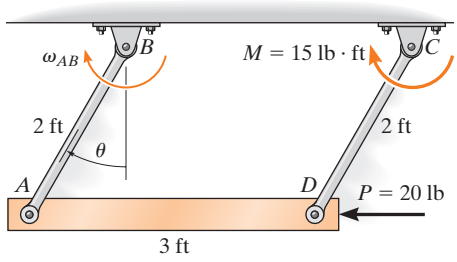
18-33. Los dos engranes A y B de 2 kg están unidos a los extremos de una barra esbelta de 3 kg. Los engranes ruedan dentro de la corona dentada fija C, que se encuentra en el plano horizontal. Si se aplica un par de torsión de 10 N · m al centro de la barra de la manera indicada, determine el número de revoluciones que debe girar la barra a partir del reposo, para tener una velocidad angular de $\omega_{AB} = 20$ rad/s. Para el cálculo, suponga que los engranes se pueden aproximar mediante discos delgados. ¿Cuál es el resultado si los engranes se encuentran en el plano vertical?



Prob. 18-33

18-34. El eslabonamiento consiste en dos varillas AB y CD de 8 lb, y en una barra AD de 10 lb. Cuando $\theta = 0°$, la varilla AB gira con una velocidad angular $\omega_{AB} = 2$ rad/s. Si la varilla CD se somete a un momento de par de $M = 15$ lb · ft y la barra AD se somete a una fuerza horizontal $P = 20$ lb de la manera indicada, determine ω_{AB} en el instante $\theta = 90°$.

18-35. El eslabonamiento consiste en dos varillas AB y CD de 8 lb, y en una barra AD de 10 lb. Cuando $\theta = 0°$, la varilla AB gira con una velocidad angular $\omega_{AB} = 2$ rad/s. Si la varilla CD se somete a un momento de par de $M = 15$ lb · ft y la barra AD se somete a una fuerza horizontal $P = 20$ lb de la manera indicada, determine ω_{AB} en el instante $\theta = 45°$.

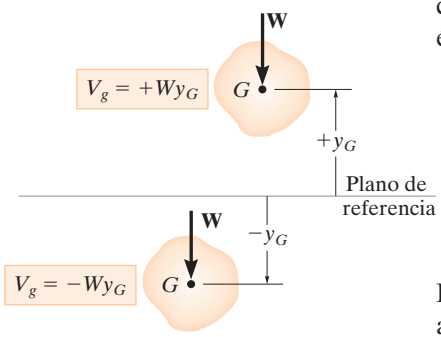


Probs. 18-34/35

18.5 Conservación de la energía

Cuando un sistema de fuerzas que actúa en un cuerpo rígido se compone únicamente de *fuerzas conservativas*, puede utilizarse el teorema de la conservación de la energía para resolver un problema que, de lo contrario, se resolvería con el principio de trabajo y energía. Este teorema suele ser más fácil de aplicar, puesto que el trabajo de una fuerza conservativa es *independiente de la trayectoria* y depende únicamente de las posiciones inicial y final del cuerpo. En la sección 14.5 se demostró que el trabajo de una fuerza conservativa puede expresarse como la diferencia de la energía potencial del cuerpo, medida con respecto a una referencia o un plano de referencia seleccionados de manera arbitraria.

Energía potencial gravitacional. Como el peso total de un cuerpo puede considerarse como concentrado en su centro de gravedad, su *energía potencial gravitacional* se determina al conocer la altura de su centro de gravedad sobre un plano de referencia horizontal o debajo de éste.



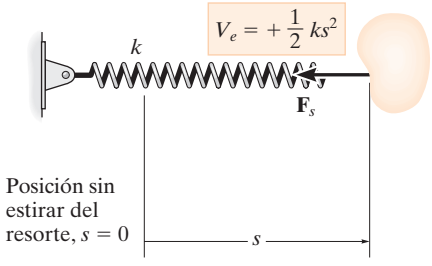
Energía potencial gravitacional

Fig. 18-16

$$V_g = Wy_G \tag{18-15}$$

En este caso, la energía potencial es *positiva* cuando y_G es positiva hacia arriba, ya que el peso tiene la capacidad de realizar *trabajo positivo* cuando el cuerpo regresa al plano de referencia (fig. 18-16). Asimismo, si G está *bajo* el plano de referencia ($-y_G$), la energía potencial gravitacional es *negativa*, ya que el peso realiza *trabajo negativo* cuando el cuerpo vuelve al plano de referencia.

Energía potencial elástica. La fuerza desarrollada por un resorte elástico también es una fuerza conservativa. La *energía potencial elástica* que un resorte imparte a un cuerpo conectado, cuando el resorte se estira o comprime desde una posición no deformada ($s = 0$) hasta una posición final s (fig. 18-17), es



Energía potencial elástica

Fig. 18-17

$$V_e = +\tfrac{1}{2}ks^2 \tag{18-16}$$

En la posición deformada, la fuerza del resorte que actúa *en el cuerpo* siempre tiene la capacidad de realizar trabajo positivo cuando el resorte regresa a su posición no deformada original (vea la sección 14.5).

Conservación de la energía. En general, si un cuerpo se somete a fuerzas tanto gravitacionales como elásticas, la *energía potencial* total puede expresarse como una función potencial representada como la suma algebraica

$$V = V_g + V_e \tag{18-17}$$

Aquí la medición de V depende de la ubicación del cuerpo con respecto a un plano de referencia seleccionado.

Como el trabajo de fuerzas conservativas puede escribirse como una diferencia de sus energías potenciales, es decir, $(\sum U_{1\text{-}2})_{\text{cons}} = V_1 - V_2$, ecuación 14-16, podemos reescribir el principio de trabajo y energía para un cuerpo rígido como

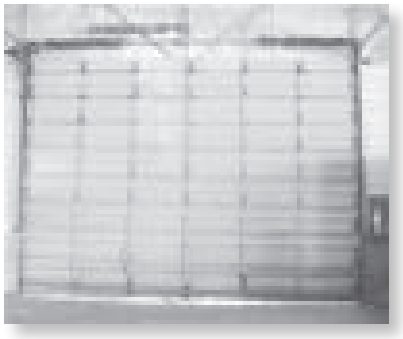
$$T_1 + V_1 + (\Sigma U_{1\text{-}2})_{\text{no cons}} = T_2 + V_2 \tag{18-18}$$

En este caso, $(\sum U_{1\text{-}2})_{\text{no cons}}$ representa el trabajo de las fuerzas no conservativas, como la fricción. Si este término es cero, entonces

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{18-19}$$

Esta ecuación se conoce como la conservación de la energía mecánica y establece que la *suma* de las energías potencial y cinética del cuerpo permanece *constante* cuando el cuerpo se mueve de una posición a otra. También es válida para un sistema de cuerpos rígidos lisos conectados por pasador, libres de fricción, de cuerpos conectados por cuerdas inextensibles y de cuerpos acoplados con otros cuerpos. En todos estos casos, las fuerzas que actúan en los puntos de contacto se *eliminan* del análisis, ya que ocurren en pares colineales iguales pero opuestos y cada par de fuerzas se recorre una distancia igual cuando el sistema se desplaza.

Es importante recordar que únicamente los problemas que implican sistemas de fuerzas conservativas pueden resolverse con la ecuación 18-19. Como se planteó en la sección 14.5, las fuerzas de fricción u otras fuerzas resistentes al avance, las cuales dependen de la velocidad o aceleración, son no conservativas. El trabajo de fuerzas como ésas se transforma en energía térmica utilizada para calentar las superficies de contacto y, por consiguiente, esta energía se disipa en el medio circundante y no puede recuperarse. Entonces, los problemas que implican fuerzas de fricción se resuelven ya sea por el principio de trabajo y energía en la forma de la ecuación 18-18, si es pertinente, o bien, por las ecuaciones de movimiento.



Los resortes de torsión de la parte superior de la puerta de la cochera se enrollan hacia arriba cuando la puerta baja. Cuando la puerta sube, la energía potencial almacenada en los resortes se transforma entonces en energía potencial gravitacional del peso de la puerta, lo cual facilita su apertura. (© R. C. Hibbeler)

Procedimiento para el análisis

La ecuación de conservación de la energía se utiliza para resolver problemas que implican *velocidad*, *desplazamiento* y *sistemas de fuerzas conservativas*. Para su aplicación, se sugiere el siguiente procedimiento.

Energía potencial

- Trace dos diagramas que muestren el cuerpo localizado en sus posiciones inicial y final a lo largo de la trayectoria.
- Si el centro de gravedad, G, se somete a un *desplazamiento vertical*, establezca un plano de referencia horizontal fijo con respecto al cual se medirá la energía potencial gravitacional del cuerpo V_g.
- Los datos de elevación y_G del centro de gravedad del cuerpo con respecto al plano de referencia y de la extensión o compresión de cualquier resorte de conexión pueden determinarse con la geometría del problema y anotarse en los dos diagramas.
- La energía potencial se determina con $V = V_g + V_e$. Donde $V_g = Wy_G$, la cual puede ser positiva o negativa y $V_e = \frac{1}{2}ks^2$, la cual siempre es positiva.

Energía cinética

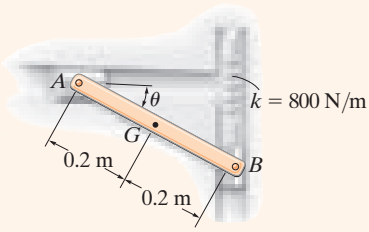
- La energía cinética del cuerpo se compone de dos partes, es decir, energía cinética de traslación, $T = \frac{1}{2}mv_G^2$, y energía cinética de rotación, $T = \frac{1}{2}I_G\omega^2$.
- Los diagramas cinemáticos de velocidad pueden ser útiles para establecer una *relación* entre v_G y ω.

Conservación de la energía

- Aplique la ecuación de conservación de la energía $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$.

EJEMPLO 18.6

La varilla AB de 10 kg que se muestra en la figura 18-18*a* está restringida, de modo que sus extremos se mueven en las ranuras horizontal y vertical. La rigidez del resorte es $k = 800$ N/m y no está estirado cuando $\theta = 0°$. Determine la velocidad angular de AB cuando $\theta = 0°$, si la varilla se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 30°$. Ignore la masa de los bloques corredizos.



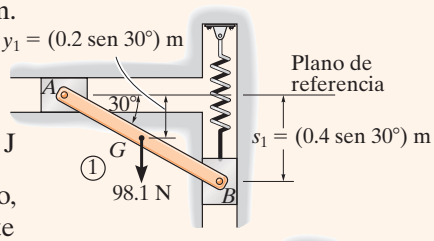
(a)

SOLUCIÓN

Energía potencial. Los dos diagramas de la varilla en sus posiciones inicial y final, se ilustran en la figura 18-18*b*. El plano de referencia, utilizado para medir la energía potencial gravitacional, se coloca en línea con la varilla cuando $\theta = 0°$.

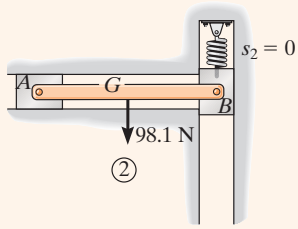
Cuando la varilla está en la posición 1, el centro de gravedad G está *debajo del plano de referencia* y, por lo tanto, su energía potencial gravitacional es *negativa*. Asimismo, en el resorte se almacena energía potencial elástica (positiva), ya que se alarga una distancia $s_1 = (0.4 \text{ sen } 30°)$m. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} V_1 &= -Wy_1 + \tfrac{1}{2}ks_1^2 \\ &= -(98.1 \text{ N})(0.2 \text{ sen } 30° \text{ m}) + \tfrac{1}{2}(800 \text{ N/m})(0.4 \text{ sen } 30° \text{ m})^2 = 6.19 \text{ J} \end{aligned}$$



Cuando la varilla está en la posición 2, su energía potencial es cero, pues el centro de gravedad G está en el plano de referencia y el resorte no está estirado, $s_2 = 0$. Por lo tanto,

$$V_2 = 0$$



(b)

Energía cinética. La varilla se suelta del punto de reposo desde la posición 1, por ende, $(\mathbf{v}_G)_1 = \boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0}$ y, entonces,

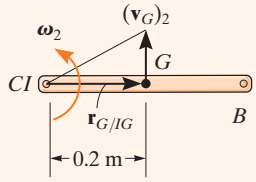
$$T_1 = 0$$

En la posición 2, la velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}_2$ y el centro de masa de la varilla tiene una velocidad de $(\mathbf{v}_G)_2$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} T_2 &= \tfrac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega_2^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(10 \text{ kg})(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{12}(10 \text{ kg})(0.4 \text{ m})^2\right]\omega_2^2 \end{aligned}$$

Con *cinemática* $(\mathbf{v}_G)_2$ puede relacionarse con $\boldsymbol{\omega}_2$ como se muestra en la figura 18-18*c*. En el instante considerado, el centro instantáneo de velocidad cero *(CI)* de la varilla está en el punto A; de ahí que $(v_G)_2 = (r_{G/CI})\boldsymbol{\omega}_2 = (0.2 \text{ m})\omega_2$. Si sustituimos en la expresión anterior y simplificamos (o utilizamos $\frac{1}{2}I_{CI}\omega_2^2$), obtenemos

$$T_2 = 0.2667\omega_2^2$$



(c)

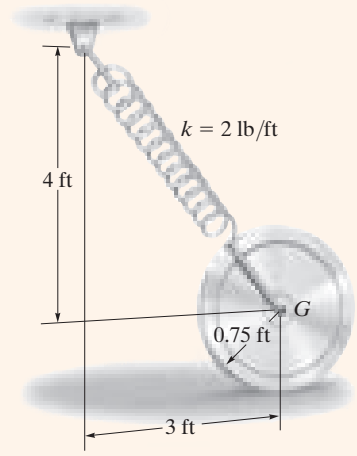
Fig. 18-18

Conservación de la energía

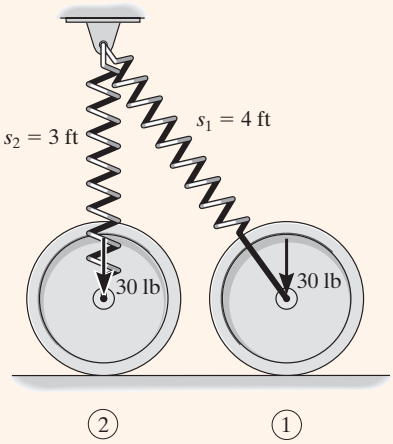
$$\begin{aligned} \{T_1\} + \{V_1\} &= \{T_2\} + \{V_2\} \\ \{0\} + \{6.19 \text{ J}\} &= \{0.2667\omega_2^2\} + \{0\} \\ \omega_2 &= 4.82 \text{ rad/s} \circlearrowleft \end{aligned}$$

Resp.

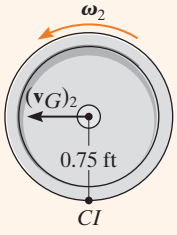
EJEMPLO 18.7



(a)



(b)



(c)

Fig. 18-19

La rueda mostrada en la figura 18-19*a* pesa 30 lb y su radio de giro es $k_G = 0.6$ ft. Está conectada a un resorte de rigidez $k = 2$ lb/ft y longitud sin estirar de 1 ft. Si el disco se suelta desde el punto de reposo en la posición que se muestra y rueda sin deslizarse, determine su velocidad angular en el instante en que G se mueve 3 ft a la izquierda.

SOLUCIÓN

Energía potencial. En la figura 18-19*b* se muestran dos diagramas de la rueda, cuando está en las posiciones inicial y final. En este caso, no se requiere un plano de referencia gravitacional, ya que el peso no se desplaza verticalmente. Según la geometría del problema, el resorte está alargado $s_1 = \left(\sqrt{3^2 + 4^2} - 1\right) = 4$ ft en la posición inicial y el resorte $s_2 = (4 - 1) = 3$ ft en la posición final. Por consiguiente, la energía potencial positiva del resorte es

$$V_1 = \tfrac{1}{2}ks_1^2 = \tfrac{1}{2}(2\text{ lb/ft})(4\text{ ft})^2 = 16\text{ ft}\cdot\text{lb}$$
$$V_2 = \tfrac{1}{2}ks_2^2 = \tfrac{1}{2}(2\text{ lb/ft})(3\text{ ft})^2 = 9\text{ ft}\cdot\text{lb}$$

Energía cinética. El disco se suelta desde el punto de reposo y, por lo tanto, $(\mathbf{v}_G)_1 = \mathbf{0}, \boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0}$. Por consiguiente,

$$T_1 = 0$$

Como el centro instantáneo de velocidad cero está en el suelo (fig. 18-19*c*), tenemos

$$T_2 = \frac{1}{2}I_{CI}\omega_2^2$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{30\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(0.6\text{ ft})^2 + \left(\frac{30\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(0.75\text{ ft})^2\right]\omega_2^2$$
$$= 0.4297\omega_2^2$$

Conservación de la energía

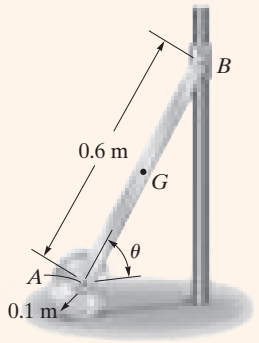
$$\{T_1\} + \{V_1\} = \{T_2\} + \{V_2\}$$
$$\{0\} + \{16\text{ ft}\cdot\text{lb}\} = \{0.4297\omega_2^2\} + \{9\text{ ft}\cdot\text{lb}\}$$
$$\omega_2 = 4.04\text{ rad/s}\,\circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Si el principio de trabajo y energía se utilizara para resolver este problema, entonces se tendría que determinar el trabajo del resorte por la consideración del cambio tanto de magnitud como de dirección de la fuerza del resorte.

18

EJEMPLO 18.8

El disco homogéneo de 10 kg que se muestra en la figura 18-20*a* está conectado a una varilla AB uniforme de 5 kg. Si el ensamble se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 60°$, determine la velocidad angular de la varilla cuando $\theta = 0°$. Suponga que el disco rueda sin deslizarse. Ignore la fricción a lo largo de la guía y la masa del collarín en B.



(a)

SOLUCIÓN

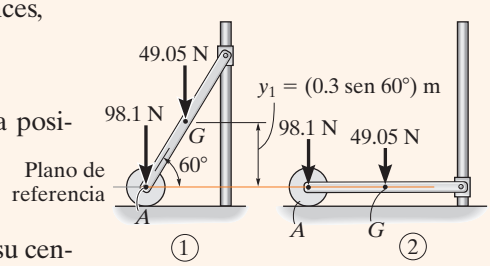
Energía potencial. En la figura 18-20*b* se muestran dos diagramas de la varilla y el disco, cuando están en sus posiciones inicial y final. Por conveniencia, el plano de referencia pasa por el punto A.

Cuando el sistema está en la posición 1, sólo el peso de la varilla tiene energía potencial positiva. Por lo tanto,

$$V_1 = W_r y_1 = (49.05\ \text{N})(0.3\ \text{sen}\,60°\ \text{m}) = 12.74\ \text{J}$$

Cuando el sistema está en la posición 2, tanto el peso de la varilla como el peso del disco tienen energía potencial cero. ¿Por qué? Entonces,

$$V_2 = 0$$



(b)

Energía cinética. Como todo el sistema está en reposo en la posición inicial,

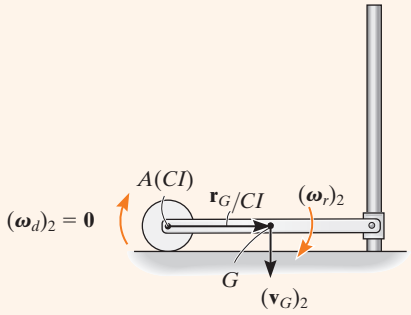
$$T_1 = 0$$

En la posición final la varilla tiene una velocidad angular $(\boldsymbol{\omega}_r)_2$ y su centro de masa tiene una velocidad $(\mathbf{v}_G)_2$ (fig. 18-20*c*). Como la varilla está *totalmente extendida* en esta posición, el disco permanece momentáneamente en reposo, y $(\boldsymbol{\omega}_d)_2 = \mathbf{0}$ y $(\mathbf{v}_A)_2 = \mathbf{0}$. Por lo que se refiere a la varilla $(\mathbf{v}_G)_2$, puede relacionarse con $(\boldsymbol{\omega}_r)_2$ con respecto al centro instantáneo de velocidad cero, el cual se encuentra en el punto A (fig. 18-20*c*). De modo que $(v_G)_2 = r_{G/CI}(\omega_r)_2$ o $(v_G)_2 = 0.3(\omega_r)_2$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m_r(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}I_G(\omega_r)_2^2 + \frac{1}{2}m_d(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}I_A(\omega_d)_2^2 \\ &= \frac{1}{2}(5\ \text{kg})[(0.3\ \text{m})(\omega_r)_2]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}(5\ \text{kg})(0.6\ \text{m})^2\right](\omega_r)_2^2 + 0 + 0 \\ &= 0.3(\omega_r)_2^2 \end{aligned}$$

Conservación de la energía

$$\begin{aligned} \{T_1\} + \{V_1\} &= \{T_2\} + \{V_2\} \\ \{0\} + \{12.74\ \text{J}\} &= \{0.3(\omega_r)_2^2\} + \{0\} \\ (\omega_r)_2 &= 6.52\ \text{rad/s}\circlearrowright \end{aligned}$$ *Resp.*



(c)

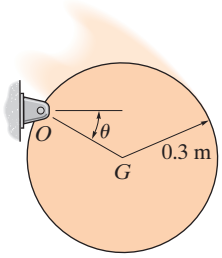
Fig. 18-20

NOTA: También podemos determinar la energía cinética final de la varilla por medio de $T_2 = \frac{1}{2}I_{CI}\omega_2^2$.

18

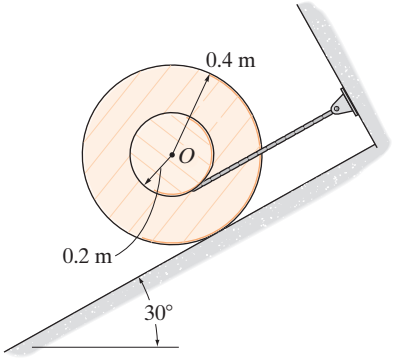
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F18-7. Si el disco de 30 kg se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 0°$, determine su velocidad angular cuando $\theta = 90°$.



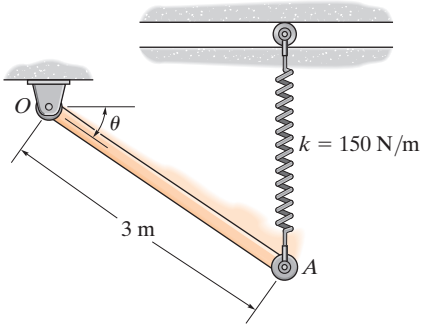
Prob. F18-7

F18-8. El carrete de 50 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro O de $k_O = 300$ mm. Si se suelta desde el punto de reposo, determine su velocidad angular cuando su centro O ha descendido 6 m por el plano inclinado liso.



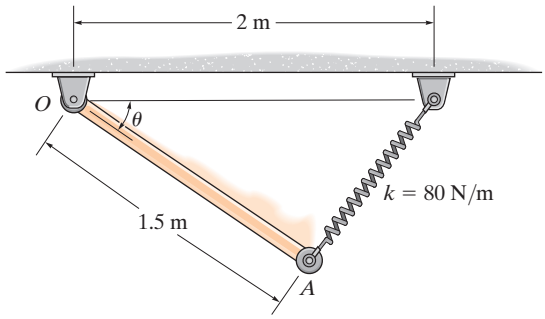
Prob. F18-8

F18-9. La varilla OA de 60 kg se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 0°$. Determine su velocidad angular cuando $\theta = 45°$. El resorte permanece vertical durante el movimiento y cuando $\theta = 0°$ no está estirado.



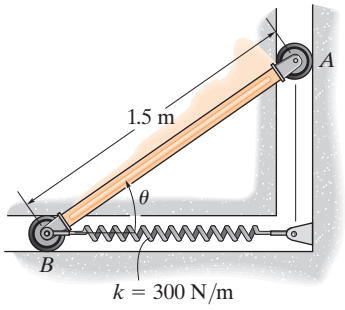
Prob. F18-9

F18-10. La varilla de 30 kg se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 0°$. Determine su velocidad angular cuando $\theta = 90°$. Cuando $\theta = 0°$ el resorte no está estirada.



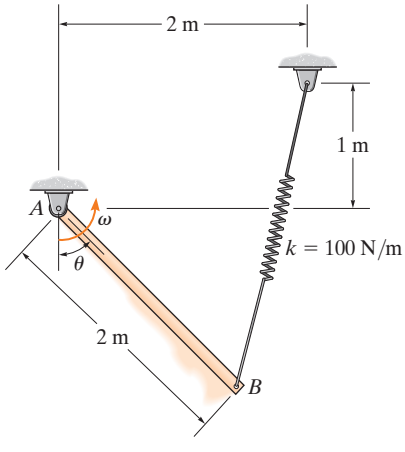
Prob. F18-10

F18-11. La varilla de 30 kg se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 45°$. Determine su velocidad angular cuando $\theta = 0°$. Cuando $\theta = 45°$ el resorte no está estirado.



Prob. F18-11

F18-12. La varilla de 20 kg se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 0°$. Determine su velocidad angular cuando $\theta = 90°$. La longitud sin estirar del resorte es de 0.5 m.

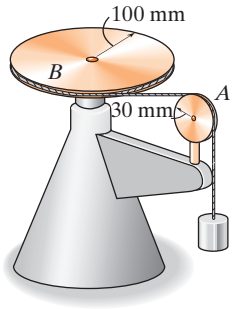


Prob. F18-12

PROBLEMAS

***18-36.** El ensamble consta de una polea A de 3 kg y una polea B de 10 kg. Si un bloque de 2 kg está suspendido de la cuerda, determine la rapidez del bloque después de descender 0.5 m a partir del reposo. Desprecie la masa de la cuerda y trate las poleas como discos delgados. No hay deslizamiento.

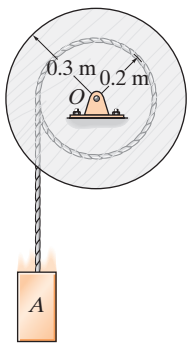
18-37. El ensamble consta de una polea A de 3 kg y una polea B de 10 kg. Si un bloque de 2 kg está suspendido de la cuerda, determine la distancia que el bloque debe descender, a partir del reposo, para ocasionar que B tenga una velocidad angular de 6 rad/s. Desprecie la masa de la cuerda y trate las poleas como discos delgados. No hay deslizamiento.



Probs. 18-36/37

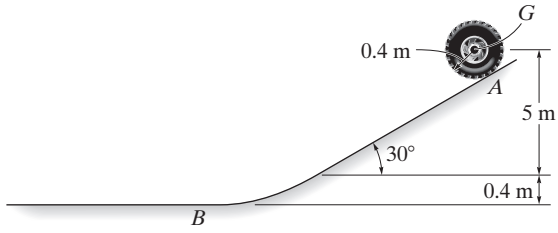
18-38. El carrete tiene una masa de 50 kg y un radio de giro de $k_O = 0.280$ m. Si el bloque A de 20 kg se libera desde el reposo, determine la distancia que el bloque debe caer para que el carrete tenga una velocidad angular $\omega = 5$ rad/s. Además, ¿cuál es la tensión en la cuerda mientras el bloque está en movimiento? Desprecie la masa de la cuerda.

18-39. El carrete tiene una masa de 50 kg y un radio de giro de $k_O = 0.280$ m. Si el bloque A de 20 kg se libera desde el reposo, determine la velocidad del bloque cuando desciende 0.5 m.



Probs. 18-38/39

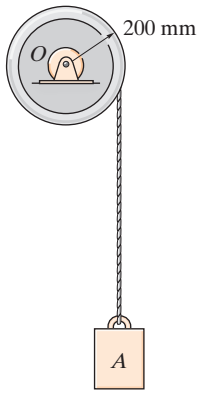
***18-40.** Un neumático de automóvil tiene una masa de 7 kg y un radio de giro de $k_G = 0.3$ m. Si se libera desde el reposo en A sobre el plano inclinado, determine su velocidad angular cuando llega al plano horizontal. El neumático rueda sin deslizarse.



Prob. 18-40

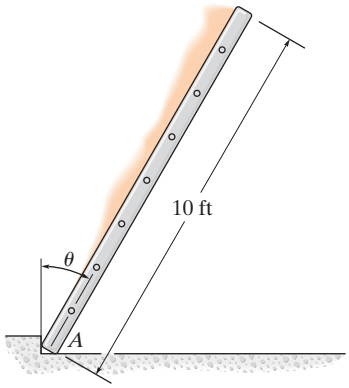
18-41. El carrete tiene una masa de 20 kg y un radio de giro de $k_O = 160$ mm. Si el bloque A de 15 kg se libera desde el reposo, determine la distancia que el bloque debe caer para que el carrete tenga una velocidad angular $\omega = 8$ rad/s. Además, ¿cuál es la tensión en la cuerda mientras el bloque está en movimiento? Desprecie la masa de la cuerda.

18-42. El carrete tiene una masa de 20 kg y un radio de giro de $k_O = 160$ mm. Si el bloque A de 15 kg se libera desde el reposo, determine la velocidad del bloque cuando desciende 600 mm.



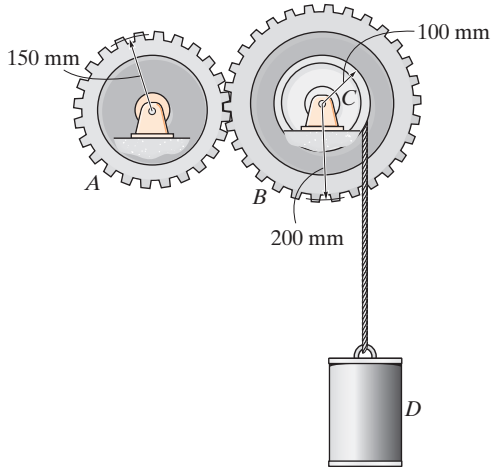
Probs. 18-41/42

18-43. Una escalera uniforme que tiene un peso de 30 lb se libera desde el reposo cuando está en la posición vertical. Si se deja caer libremente, determine el ángulo θ al que el extremo inferior A comienza a deslizarse hacia la derecha de A. Para el cálculo, suponga que la escalera es una varilla delgada y desprecie la fricción en A.



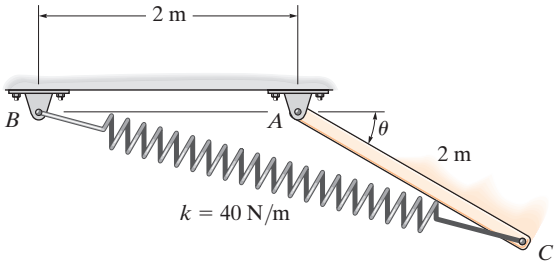
Prob. 18-43

***18-44.** Determine la rapidez del cilindro de 50 kg después de que ha descendido una distancia de 2 m, a partir del reposo. El engrane A tiene una masa de 10 kg y un radio de giro de 125 mm con respecto a su centro de masa. El engrane B y el tambor C tienen una masa combinada de 30 kg y un radio de giro con respecto a su centro de masa de 150 mm.



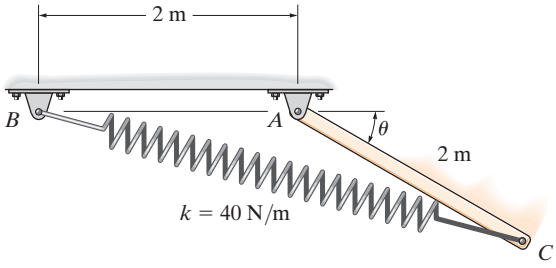
Prob. 18-44

18-45. La varilla delgada de 12 kg está unida a un resorte, que tiene una longitud sin estirar de 2 m. Si la varilla se libera desde el reposo cuando $\theta = 30°$, determine su velocidad angular en el instante $\theta = 90°$.



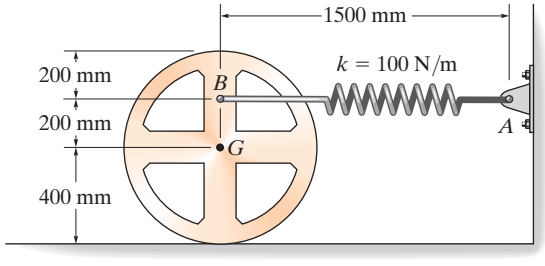
Prob. 18-45

18-46. La varilla delgada de 12 kg está unida a un resorte, que tiene una longitud sin estirar de 2 m. Si la varilla se libera desde el reposo cuando $\theta = 30°$, determine su velocidad angular en el instante en que el resorte queda sin estirar.



Prob. 18-46

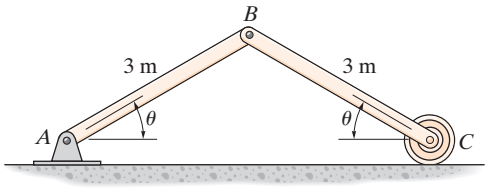
18-47. La rueda de 40 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro de gravedad G de $k_G = 250$ mm. Si rueda sin resbalar, determine su velocidad angular cuando ha girado 90° en sentido horario desde la posición mostrada. El resorte AB tiene una rigidez $k = 100$ N/m y una longitud sin estirar de 500 mm. La rueda se libera desde el reposo.



Prob. 18-47

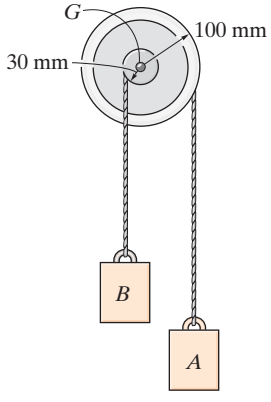
***18-48.** El ensamble se compone de dos barras de 10 kg que están conectadas mediante un pasador. Si las barras se liberan desde el reposo cuando $\theta = 60°$, determine sus velocidades angulares en el instante $\theta = 0°$. El disco de 5 kg en C tiene un radio de 0.5 m y rueda sin deslizarse.

18-49. El ensamble se compone de dos barras de 10 kg que están conectadas mediante un pasador. Si las barras se liberan desde el reposo cuando $\theta = 60°$, determine sus velocidades angulares en el instante $\theta = 30°$. El disco de 5 kg en C tiene un radio de 0.5 m y rueda sin deslizarse.



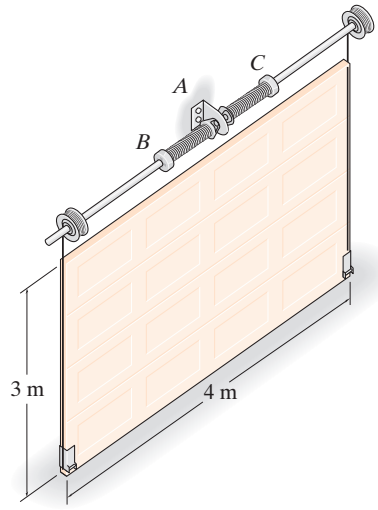
Probs. 18-48/49

18-50. La polea de disco compuesta consiste en un eje y un borde exterior adjunto. Si tiene una masa de 3 kg y un radio de giro de $k_G = 45$ mm, determine la rapidez del bloque A después de que desciende 0.2 m desde el reposo. Los bloques A y B tienen una masa de 2 kg cada uno. Desprecie la masa de las cuerdas.



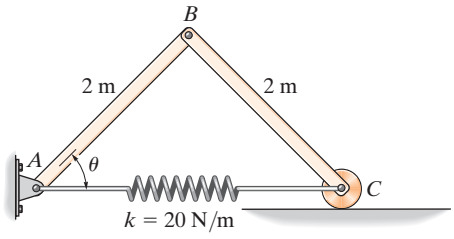
Prob. 18-50

18-51. La puerta de cochera uniforme tiene una masa de 150 kg y se desplaza a lo largo de correderas lisas en sus extremos. Se levanta por medio de dos resortes, cada uno de los cuales está conectado a la ménsula de anclaje en A y a la flecha de contrapeso en B y C. Cuando la puerta sube, los resortes comienzan a desenrollarse de la flecha, con lo cual ayudan a subir la puerta. Si cada resorte proporciona un momento de torsión de $M = (0.7\theta)$ N · m, donde θ está en radianes, determine el ángulo θ_0 al cual tanto el resorte de enrollado izquierdo como el resorte de enrollado derecho deberán montarse, de modo que la puerta quede completamente equilibrada por los resortes, es decir, cuando la puerta esté en la posición vertical y se le imprima una leve fuerza hacia arriba, los resortes la subirán a lo largo de las correderas laterales, hasta el plano horizontal sin ninguna velocidad angular final. *Nota:* La energía potencial elástica de un resorte de torsión es $V_e = \frac{1}{2}k\theta^2$, donde $M = k\theta$ y, en este caso, $k = 0.7$ N · m/rad.



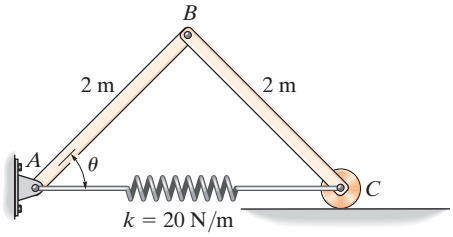
Prob. 18-51

***18-52.** Las dos varillas delgadas de 12 kg están conectadas mediante un pasadore y se liberan del reposo en la posición $\theta = 60°$. Si el resorte tiene una longitud sin estirar de 1.5 m, determine la velocidad angular de la varilla BC, cuando el sistema está en la posición $\theta = 0°$. Desprecie la masa del rodillo en C.



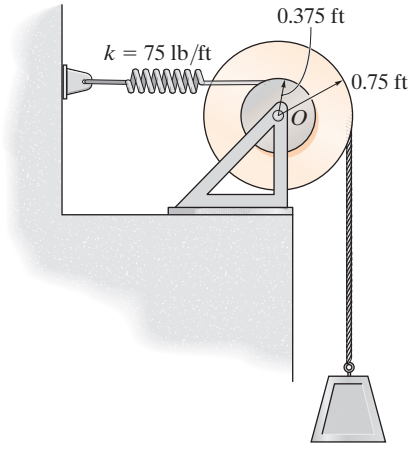
Prob. 18-52

18-53. Las dos varillas delgadas de 12 kg están conectadas mediante un pasador y se liberan desde el reposo en la posición $\theta = 60°$. Si el resorte tiene una longitud sin estirar de 1.5 m, determine la velocidad angular de la varilla BC, cuando el sistema está en la posición $\theta = 30°$.



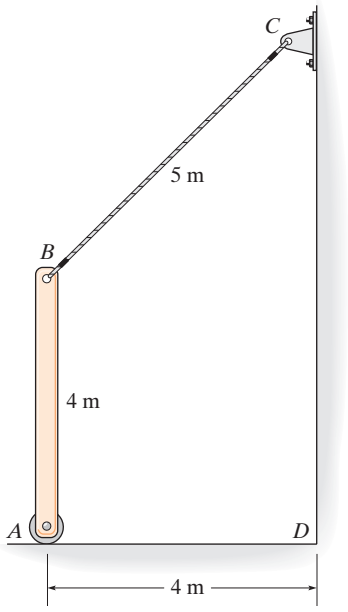
Prob. 18-53

18-54. Si el bloque de 250 lb se libera desde el reposo cuando el resorte está sin estirar, determine la velocidad del bloque después de que ha descendido 5 ft. El tambor tiene un peso de 50 lb y un radio de giro de $k_O = 0.5$ ft con respecto a su centro de masa O.



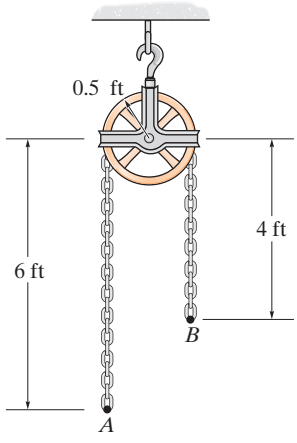
Prob. 18-54

18-55. La barra delgada de 15 kg está inicialmente en reposo y se encuentra en posición vertical cuando el extremo inferior A se desplaza ligeramente hacia la derecha. Si la pista donde se mueve es lisa, determine la rapidez a la que el extremo A golpea la esquina D. La barra está limitada a moverse en el plano vertical. Desprecie la masa de la cuerda BC.



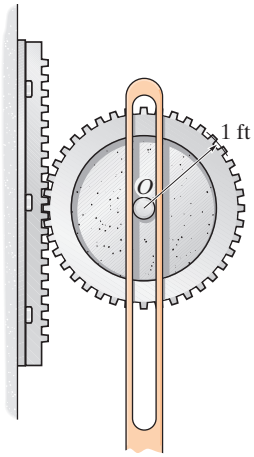
Prob. 18-55

***18-56.** Si la cadena se libera desde el reposo en la posición mostrada, determine la velocidad angular de la polea después de que el extremo B se ha elevado 2 ft. La polea tiene un peso de 50 lb y un radio de giro de 0.375 ft con respecto a su eje. La cadena pesa 6 lb/ft.



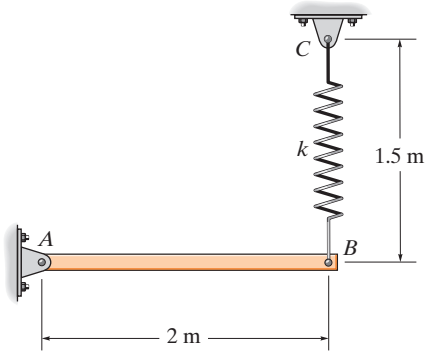
Prob. 18-56

18-57. Si el engrane se libera desde el reposo, determine su velocidad angular después de que su centro de gravedad O ha descendido una distancia de 4 ft. El engrane tiene un peso de 100 lb y un radio de giro con respecto a su centro de gravedad de $k = 0.75$ ft.



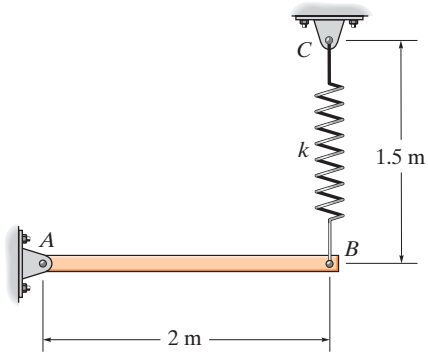
Prob. 18-57

18-58. La barra delgada AB de 6 kg se encuentra en posición horizontal y en reposo, y el resorte está sin estirar. Determine la rigidez k del resorte, de modo que el movimiento de la barra se detenga momentáneamente luego de girar 90° en sentido horario después de ser liberado.



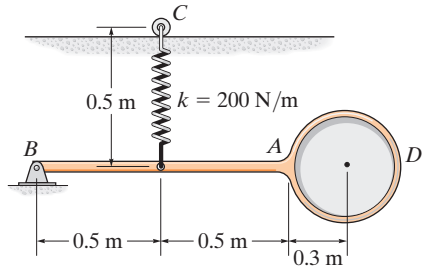
Prob. 18-58

18-59. La barra delgada AB de 6 kg se encuentra en posición horizontal y en reposo, y el resorte está sin estirar. Determine la velocidad angular de la barra cuando ha girado 45° en sentido horario, después de ser liberada. El resorte tiene una rigidez de $k = 12$ N/m.



Prob. 18-59

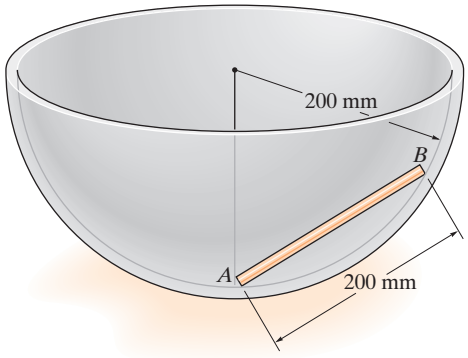
***18-60.** El péndulo se compone de una varilla delgada de 6 kg fija a un disco de 15 kg. Si el resorte tiene una longitud sin estirar de 0.2 m, determine la velocidad angular del péndulo cuando se libera desde el reposo y gira 90° en sentido horario desde la posición mostrada. El rodillo en C permite que el resorte permanezca siempre vertical.



Prob. 18-60

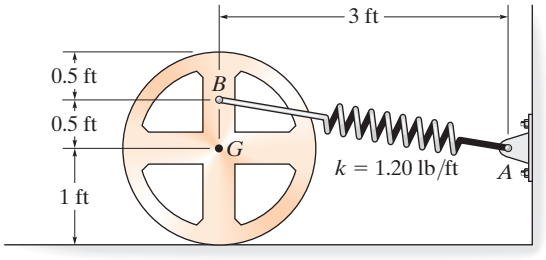
18

18-61. La varilla AB de 500 g descansa a lo largo de la superficie interior lisa de un tazón hemisférico. Si la varilla se libera desde el reposo en la posición indicada, determine su velocidad angular en el instante en que se balancea hacia abajo y se coloca en posición horizontal.



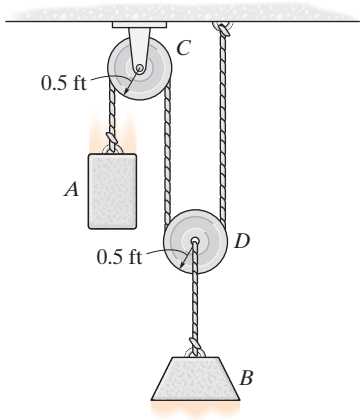
Prob. 18-61

18-62. La rueda de 50 lb tiene un radio de giro con respecto a su centro de gravedad G de $k_G = 0.7$ ft. Si rueda sin resbalar, determine su velocidad angular cuando ha girado 90° en sentido horario desde la posición mostrada. El resorte AB tiene una rigidez $k = 1.20$ lb/ft y una longitud sin estirar de 0.5 ft. La rueda se libera desde el reposo.



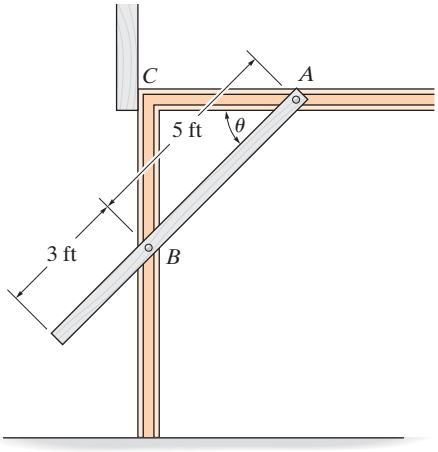
Prob. 18-62

18-63. El sistema consta de los bloques A y B de 60 b y 20 lb, respectivamente, y las poleas C y D de 5 lb que pueden tratarse como discos delgados. Determine la rapidez del bloque A después de que el bloque B se ha elevado 5 ft, partiendo del reposo. Suponga que la cuerda no se desliza sobre las poleas y desprecie la masa de la cuerda.



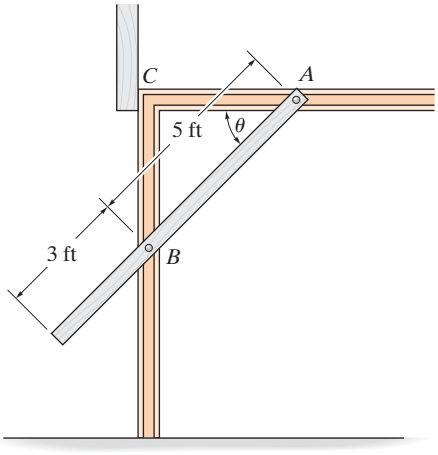
Prob. 18-63

***18-64.** La puerta está hecha de una sola pieza, cuyos extremos se mueven a lo largo de las guías horizontal y vertical. Si la puerta está en la posición abierta, $\theta = 0°$, y luego se libera, determine la rapidez a la que su extremo A golpea el tope en C. Suponga que la puerta es una placa delgada de 180 lb que tiene una anchura de 10 ft.



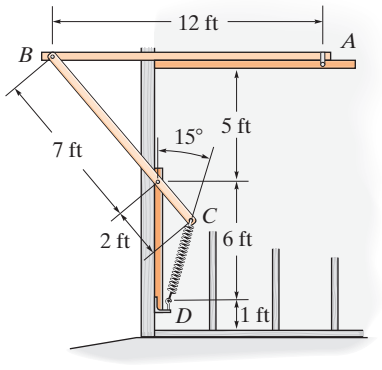
Prob. 18-64

18-65. La puerta está hecha de una sola pieza, cuyos extremos se mueven a lo largo de las guías horizontal y vertical. Si la puerta está en la posición abierta, $\theta = 0°$, y luego se libera, determine su velocidad angular en el instante $\theta = 30°$. Suponga que la puerta es una placa delgada de 180 lb que tiene una anchura de 10 ft.



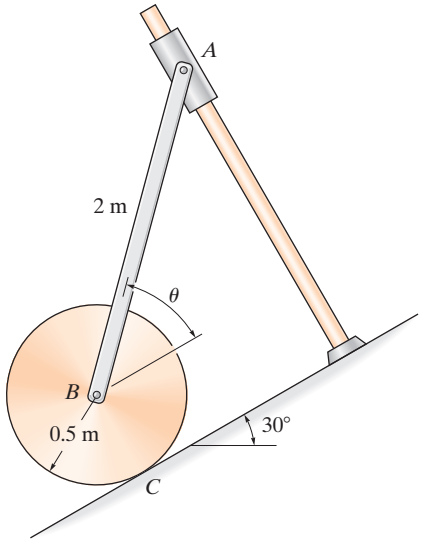
Prob. 18-65

18-66. El extremo A de la puerta de cochera AB se desplaza a lo largo de la pista horizontal, y el extremo del elemento BC está unido a un resorte en C. Si el resorte está originalmente sin estirar, determine la rigidez k, de modo que cuando la puerta caiga desde el reposo en la posición mostrada, tenga velocidad angular cero en el momento de cerrarse; es decir, cuando la puerta y BC queden verticales. Desprecie la masa del elemento BC y suponga que la puerta es una placa delgada que tiene un peso de 200 lb y una anchura y altura de 12 ft. Hay una conexión y un resorte similares en el otro lado de la puerta.



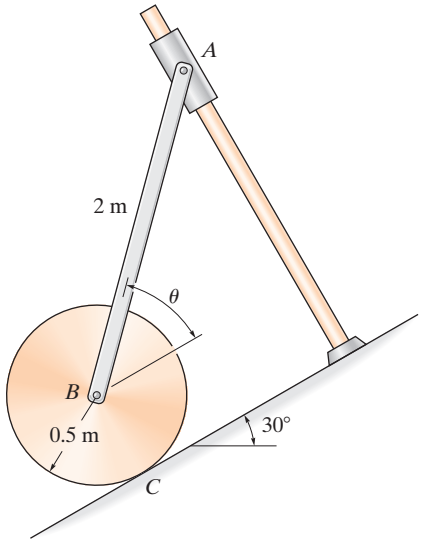
Prob. 18-66

18-67. El sistema consta de un disco de 30 kg, la varilla delgada BA de 12 kg y un collarín liso A de 5 kg. Si el disco rueda sin deslizarse, determine la velocidad del collarín en el instante $\theta = 0°$. El sistema se libera desde el reposo cuando $\theta = 45°$.



Prob. 18-67

***18-68.** El sistema consta de un disco de 30 kg, la varilla delgada BA de 12 kg y un collarín liso A de 5 kg. Si el disco rueda sin deslizarse, determine la velocidad del collarín en el instante $\theta = 30°$. El sistema se libera desde el reposo cuando $\theta = 45°$.



Prob. 18-68

PROBLEMAS CONCEPTUALES

C18-1. El ciclista y su bicicleta parten del reposo en la parte superior de la colina. Muestre cómo se puede determinar la rapidez del ciclista cuando se desplaza libremente hacia abajo por la colina. Utilice las dimensiones apropiadas de las ruedas y la masa del ciclista, el cuadro y las ruedas de la bicicleta para explicar sus resultados.

Prob. C18-1 (© R. C. Hibbeler)

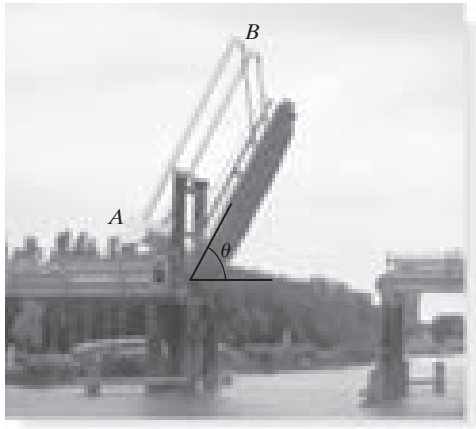
C18-2. Para abrir y cerrar el cofre de este camión se utilizan dos muelles de torsión, $M = k\theta$, como auxiliares. Suponga que los muelles están desenrollados ($\theta = 0°$) cuando el cofre está abierto y determine la rigidez k (N · m/rad) de cada muelle, de modo que el cofre se levante con facilidad; es decir, prácticamente sin que se le aplique ninguna fuerza cuando está cerrado en la posición asegurada. Use valores numéricos adecuados para explicar su resultado.

Prob. C18-2 (© R. C. Hibbeler)

C18-3. La operación de esta puerta de cochera es auxiliada por dos resortes AB y los elementos laterales BCD, los cuales están sujetos por medio de un pasador en C. Suponga que los resortes no están alargados cuando la puerta está en la posición horizontal (abierta) y $ABCD$ está vertical, y determine la rigidez k de cada uno de los resortes, de modo que cuando la puerta caiga a la posición vertical (cerrada), se detenga lentamente. Use valores numéricos adecuados para explicar su respuesta.

Prob. C18-3 (© R. C. Hibbeler)

C18-4. Determine el contrapeso A requerido para equilibrar el peso de la plataforma del puente cuando $\theta = 0°$. Demuestre que este peso mantendrá la plataforma en equilibrio, considerando la energía potencial del sistema cuando la plataforma está en la posición arbitraria θ. Tanto la plataforma como AB están en posición horizontal cuando $\theta = 0°$. Ignore los pesos de los demás miembros. Use valores numéricos adecuados para explicar su resultado.

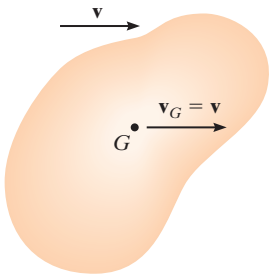


Prob. C18-4 (© R. C. Hibbeler)

REPASO DEL CAPÍTULO

Energía cinética

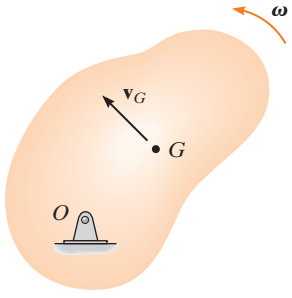
La energía cinética de un cuerpo rígido que experimenta movimiento plano puede referirse a su centro de masa, e incluye una suma escalar de sus energías cinéticas de traslación y rotación.



Traslación

Traslación

$$T = \tfrac{1}{2} m v_G^2$$



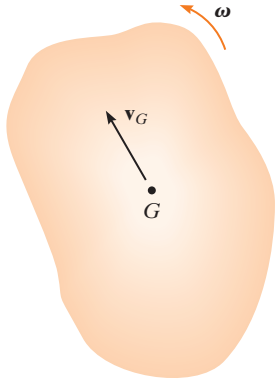
Rotación alrededor de un eje fijo

Rotación alrededor de un eje fijo

$$T = \tfrac{1}{2} m v_G^2 + \tfrac{1}{2} I_G \omega^2$$

o

$$T = \tfrac{1}{2} I_O \omega^2$$



Movimiento plano general

Movimiento plano general

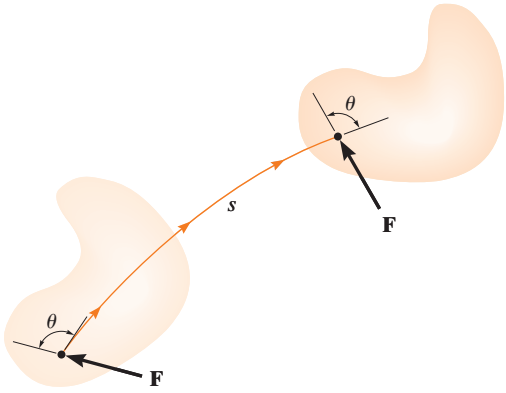
$$T = \tfrac{1}{2} m v_G^2 + \tfrac{1}{2} I_G \omega^2$$

o

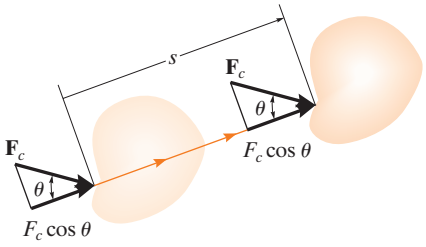
$$T = \tfrac{1}{2} I_{IC} \omega^2$$

Trabajo de una fuerza y un momento de par

Una fuerza realiza trabajo cuando experimenta un desplazamiento *ds* en la dirección de la fuerza. En particular, las fuerzas de fricción y normal que actúan en un cilindro o en cualquier cuerpo circular que rueda *sin deslizarse* no realizan trabajo, ya que la fuerza normal no se desplaza y la fuerza de fricción actúa en puntos sucesivos de la superficie del cuerpo.

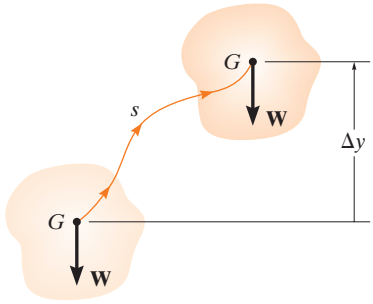


$$U_F = \int F \cos\theta \, ds$$



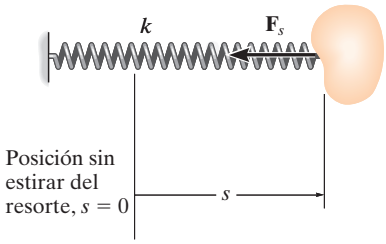
$$U_{F_c} = (F_c \cos\theta)s$$

Fuerza constante



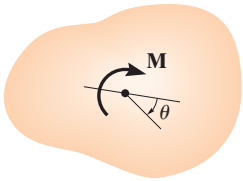
$$U_W = -W\Delta y$$

Peso



$$U = -\frac{1}{2}ks^2$$

Resorte



$$U_M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \, d\theta$$

$$U_M = M(\theta_2 - \theta_1)$$

Magnitud constante

Principio de trabajo y energía

Los problemas que implican velocidad, fuerza y desplazamiento pueden resolverse mediante el principio de trabajo y energía. La energía cinética es la suma de sus partes tanto de rotación como de sus partes de traslación. Para su aplicación, deberá trazarse un diagrama de cuerpo libre para explicar el trabajo de todas las fuerzas y momentos de par que actúan en el cuerpo conforme se mueve a lo largo de la trayectoria.

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = T_2$$

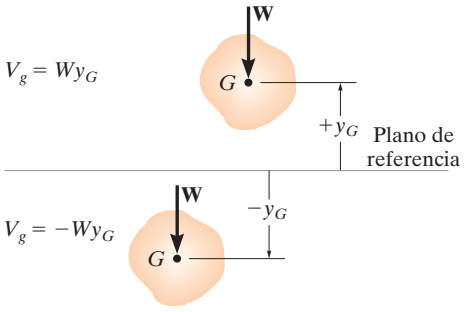
Conservación de la energía

Si un cuerpo rígido se somete sólo a fuerzas conservativas, entonces puede utilizarse la ecuación de conservación de la energía para resolver el problema. Esta ecuación requiere que la suma de las energías potencial y cinética del cuerpo permanezca igual en dos puntos cualesquiera a lo largo de la trayectoria.

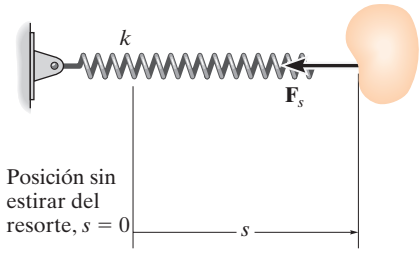
La energía potencial es la suma de las energías potencial elástica y gravitacional del cuerpo. La energía potencial gravitacional será positiva si el centro de gravedad del cuerpo está por encima del plano de referencia. Si está por debajo, entonces será negativa. La energía potencial elástica siempre es positiva, sin importar si el resorte está alargado o comprimido.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

donde $V = V_g + V_e$



Energía potencial gravitacional

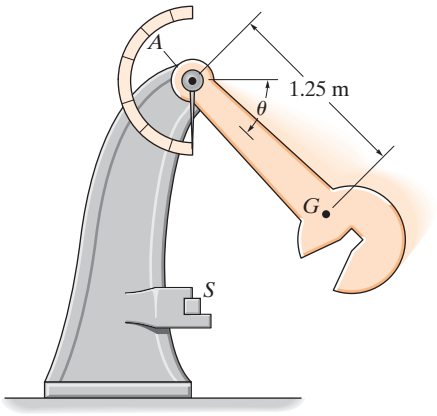


$$V_e = \tfrac{1}{2}ks^2$$

Energía potencial elástica

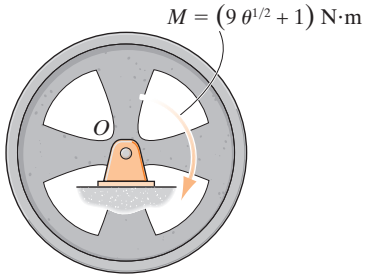
PROBLEMAS DE REPASO

R18-1. El péndulo de la máquina de impacto Charpy tiene una masa de 50 kg y un radio de giro de $k_A = 1.75$ m. Si se suelta desde el punto de reposo cuando $\theta = 0°$, determine su velocidad angular justo antes de que choque contra la muestra S, $\theta = 90°$.



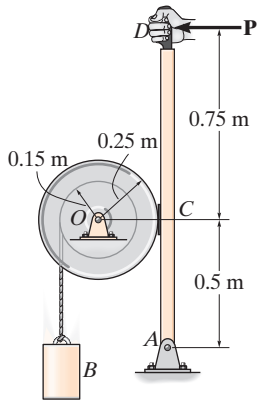
Prob. R18-1

R18-2. El volante de 50 kg tiene un radio de giro de $k_O = 200$ mm con respecto a su centro de masa. Si se somete a un par de torsión de $M = (9\theta^{1/2} + 1)$ N · m, donde θ está en radianes, determine su velocidad angular cuando ha girado 5 revoluciones a partir del reposo.



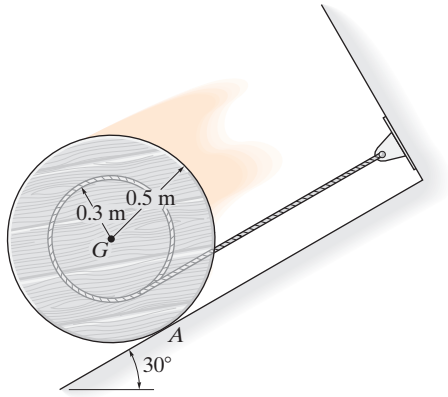
Prob. R18-2

R18-3. El tambor tiene una masa de 50 kg y un radio de giro con respecto al pasador en O de $k_O = 0.23$ m. Al partir del punto de reposo, se permite que el bloque B de 15 kg suspendido caiga 3 m sin aplicar el freno ACD. Determine su rapidez en este instante. Si el coeficiente de fricción cinética en la balata C es $\mu_k = 0.5$, determine la fuerza **P** que debe aplicarse en la palanca del freno de mano, el cual detendrá el bloque después de que descienda 3 m *adicionales*. Desprecie el espesor de la palanca.



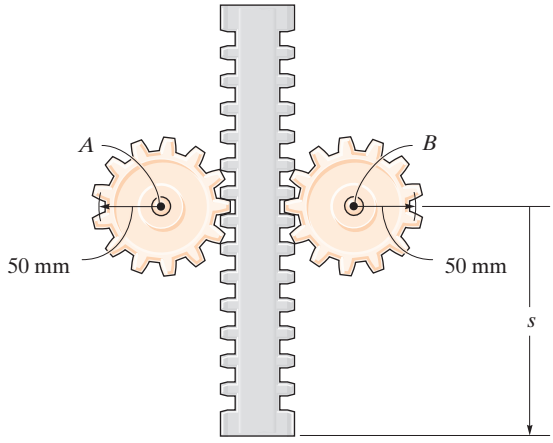
Prob. R18-3

R18-4. El carrete tiene una masa de 60 kg y un radio de giro de $k_G = 0.3$ m. Si se libera desde el reposo, determine la distancia hasta la que desciende su centro sobre el plano liso antes de alcanzar una velocidad angular de $\omega = 6$ rad/s. Desprecie la masa de la cuerda que se enrolla alrededor del eje central. El coeficiente de fricción cinética entre el carrete y el plano en A es $\mu_k = 0.2$.



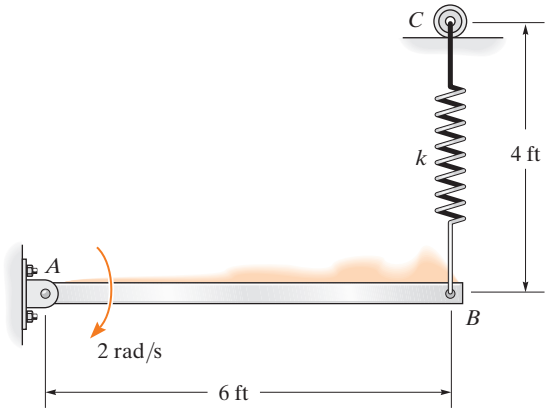
Prob. R18-4

R18-5. La engrane recto tiene una masa de 6 kg y los engranes circulares tienen cada uno una masa de 4 kg y un radio de giro de $k = 30$ mm en sus centros. Si el engrane recto se mueve inicialmente hacia abajo a 2 m/s, cuando $s = 0$, determine su rapidez cuando $s = 600$ mm. Los engranes circulares giran libremente alrededor de sus centros A y B.



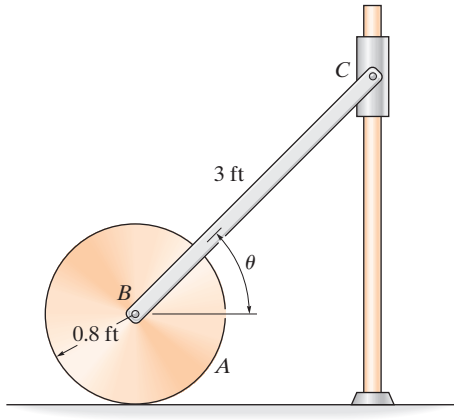
Prob. R18-5

R18-6. En el instante indicado, la barra de 50 lb gira en sentido horario a 2 rad/s. El resorte unido a su extremo siempre permanece vertical debido a la guía de rodillo en C. Si el resorte tiene una longitud sin estirar de 2 ft y una rigidez $k = 6$ lb/ft, determine la velocidad angular de la barra en el instante en que ha girado 30° en sentido horario.



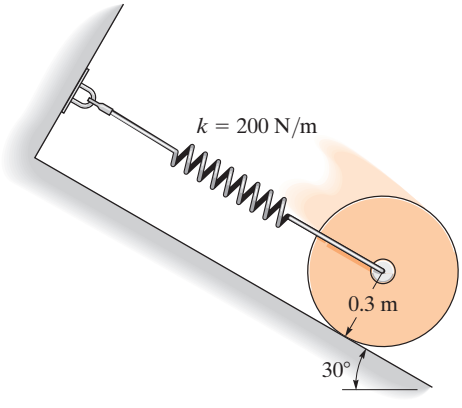
Prob. R18-6

R18-7. El sistema consta de un disco A de 20 lb, la varilla delgada BC de 4 lb y un collarín liso C de 1 lb. Si el disco rueda sin deslizarse, determine la velocidad del collarín en el instante en que la varilla queda en posición horizontal; es decir, $\theta = 0°$. El sistema se libera desde el reposo cuando $\theta = 45°$.



Prob. R18-7

R18-8. En el instante en que el resorte queda sin estirar, el centro del disco de 40 kg tiene una velocidad de 4 m/s. A partir de este punto, determine la distancia d que el disco se mueve hacia abajo sobre el plano, antes de detenerse momentáneamente. El disco rueda sin deslizarse.



Prob. R18-8

Capítulo 19

(© Hellen Sergeyeva/Fotolia)

El impulso que imparte el remolcador al buque carguero hará que gire de una manera que puede predecirse al aplicar los principios de impulso y cantidad de movimiento.

Cinética plana de un cuerpo rígido: impulso y cantidad de movimiento

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Desarrollar fórmulas para la cantidad de movimiento lineal y angular de un cuerpo.
- Aplicar los principios de impulso y cantidad de movimiento lineal y angular para resolver problemas de cinética plana de un cuerpo rígido que implican fuerza, velocidad y tiempo.
- Analizar la aplicación de la conservación de la cantidad de movimiento.
- Analizar la mecánica del impacto excéntrico.

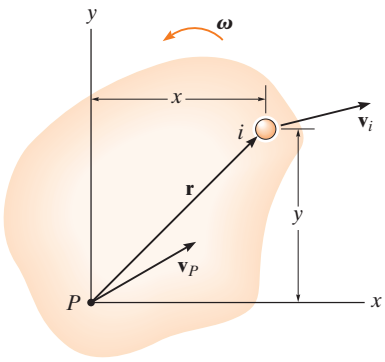
19.1 Cantidad de movimiento lineal y angular

En este capítulo utilizaremos los principios de impulso y cantidad de movimiento lineal y angular para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo, en el contexto de su relación con el movimiento plano de un cuerpo rígido. Antes de hacerlo, primero formalizaremos los métodos para obtener la cantidad de movimiento lineal y angular de un cuerpo, suponiendo que éste es simétrico con respecto a un plano de referencia *x-y* inercial.

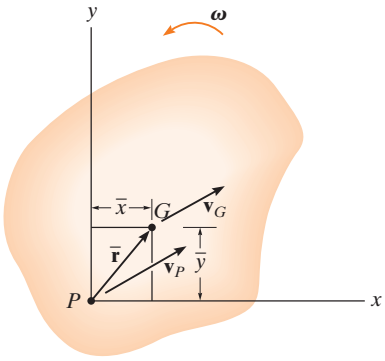
Cantidad de movimiento lineal. La cantidad de movimiento lineal de un cuerpo rígido se determina con la suma vectorial de los momentos lineales de todas las partículas del cuerpo, es decir, $\mathbf{L} = \Sigma m_i \mathbf{v}_i$. Como $\Sigma m_i \mathbf{v}_i = m\mathbf{v}_G$ (vea la sección 15.2) también podemos escribir

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v}_G \tag{19-1}$$

Esta ecuación establece que la cantidad de movimiento lineal del cuerpo es una cantidad vectorial de *magnitud* mv_G, la cual comúnmente se mide en unidades de kg · m/s o slug · ft/s, y *dirección* definida por $\mathbf{v}_G$, la velocidad de su centro de masa.



(a)



(b)

Fig. 19-1

Cantidad de movimiento angular. Considere el cuerpo que aparece en la figura 19-1*a*, el cual se somete a movimiento plano general. En el instante que se muestra, el punto arbitrario P tiene una velocidad conocida $\mathbf{v}_P$ y el cuerpo tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Por consiguiente, la velocidad de la partícula *iésima* del cuerpo es

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{i/P} = \mathbf{v}_P + \omega \times \mathbf{r}$$

La cantidad de movimiento angular de esta partícula con respecto al punto P es igual al "momento" de su cantidad de movimiento lineal con respecto a P (fig. 19-1*a*). Por lo tanto,

$$(\mathbf{H}_P)_i = \mathbf{r} \times m_i \mathbf{v}_i$$

Si expresamos $\mathbf{v}_i$ en función de $\mathbf{v}_P$ y utilizamos vectores cartesianos, tenemos

$$(H_P)_i\mathbf{k} = m_i(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [(v_P)_x\mathbf{i} + (v_P)_y\mathbf{j} + \omega\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})]$$
$$(H_P)_i = -m_i y(v_P)_x + m_i x(v_P)_y + m_i \omega r^2$$

Si $m_i \rightarrow dm$ e integramos a lo largo de toda la masa m del cuerpo, entonces

$$H_P = -\left(\int_m y\, dm\right)(v_P)_x + \left(\int_m x\, dm\right)(v_P)_y + \left(\int_m r^2\, dm\right)\omega$$

En este caso, H_P representa la cantidad de movimiento angular del cuerpo con respecto a un eje (el eje z) perpendicular al plano de movimiento que pasa por el punto P. Como $\bar{y}m = \int y\, dm$ y $\bar{x}m = \int x\, dm$, se utilizan las integrales del primero y segundo términos de la derecha para localizar el centro de masa G del cuerpo con respecto a P (fig. 19-1*b*). Asimismo, la última integral representa el momento de inercia del cuerpo con respecto al punto P. Por lo tanto,

$$H_P = -\bar{y}m(v_P)_x + \bar{x}m(v_P)_y + I_P\omega \tag{19-2}$$

Esta ecuación se reduce a una forma más sencilla, si P coincide con el centro de masa G del cuerpo*, en cuyo caso $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Por consiguiente,

$$\boxed{H_G = I_G\omega} \tag{19-3}$$

*También se reduce a la misma forma simple $H_P = I_p\omega$, si el punto P es un *punto fijo* (vea la ecuación 19-9) o la velocidad de P está dirigida a lo largo de la línea PG.

Aquí la cantidad de movimiento angular del cuerpo con respecto a G es igual al producto del momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje que pasa por G y la velocidad angular del cuerpo. Considere que $\mathbf{H}_G$ es una cantidad vectorial de *magnitud* $I_G\omega$, la cual por lo común se mide en unidades de kg · m²/s o slug · ft² y una *dirección* definida por $\boldsymbol{\omega}$ que siempre es perpendicular al plano de movimiento.

La ecuación 19-2 también puede reescribirse en función de las componentes x y y de la velocidad del centro de masa del cuerpo, $(\mathbf{v}_G)_x$ y $(\mathbf{v}_G)_y$, y de su momento de inercia I_G. Como G se ubica en las coordenadas $(\bar{x},\bar{y})$, entonces, de acuerdo con el teorema de los ejes paralelos, $I_P = I_G + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$. Al sustituir en la ecuación 19-2 y reordenar los términos, tenemos

$$H_P = \bar{y}m[-(v_P)_x + \bar{y}\omega] + \bar{x}m[(v_P)_y + \bar{x}\omega] + I_G\omega \tag{19-4}$$

A partir del diagrama cinemático de la figura 19-1*b*, $\mathbf{v}_G$ puede expresarse en función de $\mathbf{v}_P$ como

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}$$

$$(v_G)_x\mathbf{i} + (v_G)_y\mathbf{j} = (v_P)_x\mathbf{i} + (v_P)_y\mathbf{j} + \omega\mathbf{k} \times (\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j})$$

Al realizar el producto vectorial e igualar las componentes **i** y **j** respectivas, se obtienen las dos ecuaciones escalares

$$(v_G)_x = (v_P)_x - \bar{y}\omega$$

$$(v_G)_y = (v_P)_y + \bar{x}\omega$$

Si sustituimos estos resultados en la ecuación 19-4 obtenemos

$$(\zeta +)H_P = -\bar{y}m(v_G)_x + \bar{x}m(v_G)_y + I_G\omega \tag{19-5}$$

Como se muestra en la figura 19-1*c*, *este resultado indica que cuando la cantidad de movimiento angular del cuerpo se calcula con respecto al punto P, es equivalente al momento de la cantidad de movimiento lineal* $m\mathbf{v}_G$, *o de sus componentes* $m(\mathbf{v}_G)_x$ y $m(\mathbf{v}_G)_y$, *con respecto a P,* más la cantidad de movimien*to angular* $I_G\boldsymbol{\omega}$. Con estos resultados, a continuación consideraremos tres tipos de movimiento.

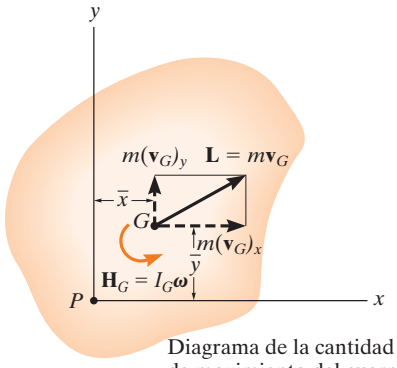
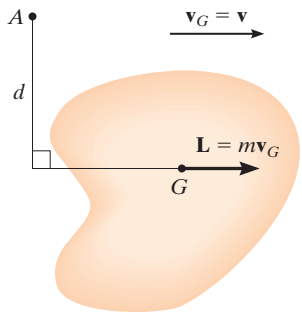


Diagrama de la cantidad de movimiento del cuerpo

(c)

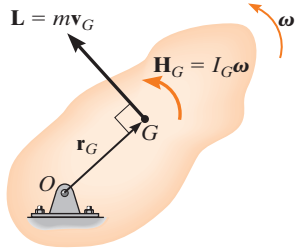
Fig. 19-1 (cont.)

19



Traslación

(a)



Rotación con respecto a un eje fijo

(b)

Fig. 19-2

Traslación. Cuando un cuerpo rígido se somete a *traslación* rectilínea o curvilínea (fig. 19-2*a*), entonces $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ y su centro de masa tiene una velocidad de $\mathbf{v}_G = \mathbf{v}$. Por consiguiente, la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular con respecto a *G*, se convierten en

$$\begin{aligned} L &= mv_G \\ H_G &= 0 \end{aligned} \tag{19-6}$$

Si la cantidad de movimiento angular se calcula con respecto a algún otro punto *A*, el "momento" de la cantidad de movimiento lineal **L** debe calcularse con respecto al punto. Como *d* es el "brazo de momento" según se indica en la figura 19-2*a*, entonces, de acuerdo con la ecuación 19-5, $H_A = (d)(mv_G)\curvearrowleft$.

Rotación con respecto a un eje fijo. Cuando un cuerpo rígido *gira alrededor de un eje fijo* (fig. 19-2*b*), la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular con respecto a *G* son

$$\begin{aligned} L &= mv_G \\ H_G &= I_G\omega \end{aligned} \tag{19-7}$$

En ocasiones resulta conveniente calcular la cantidad de movimiento angular con respecto al punto *O*. Si observamos que **L** (o $\mathbf{v}_G$) siempre es *perpendicular* a $\boldsymbol{r}_G$, por lo tanto,

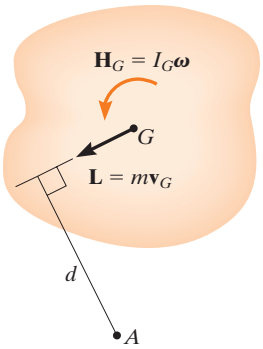
$$(\curvearrowleft +)\ H_O = I_G\omega + r_G(mv_G) \tag{19-8}$$

Como $v_G = r_G\omega$, esta ecuación puede escribirse como $H_O = (I_G + mr_G^2)\omega$. Al utilizar el teorema de los ejes paralelos*,

$$H_O = I_O\omega \tag{19-9}$$

En el cálculo, entonces, pueden utilizarse la ecuación 19-8 o la 19-9.

*Es importante observar la similitud entre esta derivación y la de la ecuación 17-16 ($\Sigma M_O = I_O\alpha$), y la ecuación 18-5 $\left(T = \frac{1}{2}I_O\omega^2\right)$. También observe que puede obtenerse el mismo resultado con la ecuación 19-2, si selecciona el punto *P* en *O* y tiene en cuenta que $(v_O)_x = (v_O)_y = 0$.



Movimiento plano general

(c)

Fig. 19-2

Movimiento plano general. Cuando un cuerpo rígido se somete a movimiento plano general (fig. 19-2*c*), la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular con respecto a G son

$$\begin{aligned} L &= mv_G \\ H_G &= I_G\omega \end{aligned} \tag{19-10}$$

Si la cantidad de movimiento angular se calcula con respecto al punto A (fig. 19-2*c*), es necesario incluir el momento de $\mathbf{L}$ y $\mathbf{H}_G$ con respecto a este punto. En este caso,

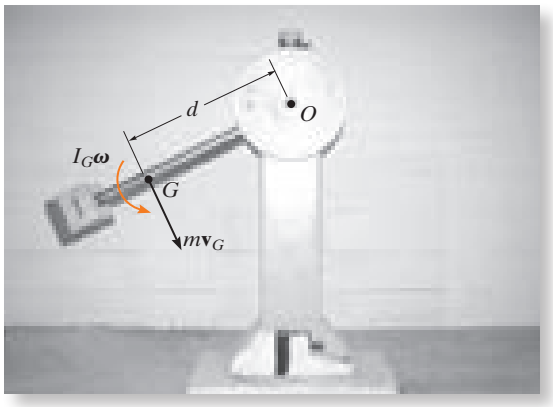
$$(\circlearrowright +) \quad H_A = I_G\omega + (d)(mv_G)$$

Aquí, d es el brazo de momento, como se indica en la figura.

Como un caso especial, si el punto A es el centro instantáneo de velocidad cero, entonces, al igual que la ecuación 19-9, podemos escribir la ecuación anterior en forma simplificada como

$$H_{IC} = I_{IC}\omega \tag{19-11}$$

donde I_{IC} es el momento de inercia del cuerpo con respecto al IC (*instantaneous center*). Vea el problema 19-2.

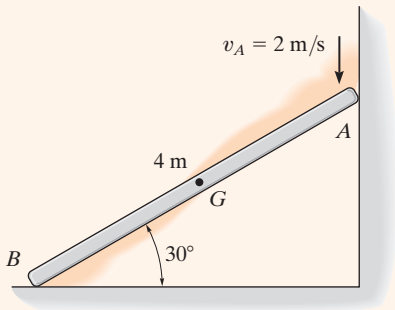


A medida que el péndulo oscila hacia abajo, su cantidad de movimiento angular con respecto al punto O puede determinarse si se calcula el momento de $I_G\boldsymbol{\omega}$ y $m\mathbf{v}_G$ con respecto a O. Éste es $H_O = I_G\omega + (mv_G)d$. Puesto que $v_G = \omega d$, entonces $H_O = I_G\omega + m(\omega d)d = (I_G + md^2)\omega = I_O\omega$. (© R. C. Hibbeler)

19

EJEMPLO 19.1

En un instante dado la barra delgada de 5 kg tiene el movimiento que se muestra en la figura 19-3*a*. Determine su cantidad de movimiento angular con respecto al punto G y con respecto al CI en este instante.



(a)

SOLUCIÓN

Barra. La barra experimenta *movimiento plano general*. El CI se establece en la figura 19-3*b*, de modo que

$$\omega = \frac{2 \text{ m/s}}{4 \text{ m} \cos 30°} = 0.5774 \text{ rad/s}$$

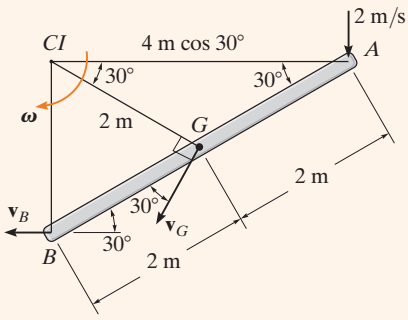
$$v_G = (0.5774 \text{ rad/s})(2 \text{ m}) = 1.155 \text{ m/s}$$

Por lo tanto,

$$(\zeta +) H_G = I_G\omega = \left[\tfrac{1}{12}(5 \text{ kg})(4 \text{ m})^2\right](0.5774 \text{ rad/s}) = 3.85 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \curvearrowright \textit{Resp.}$$

Al agregar $I_G\omega$ y el momento de mv_G con respecto al CI se obtiene

$$\begin{aligned}(\zeta +)\, H_{CI} &= I_G\omega + d(mv_G) \\ &= \left[\tfrac{1}{12}(5 \text{ kg})(4 \text{ m})^2\right](0.5774 \text{ rad/s}) + (2 \text{ m})(5 \text{ kg})(1.155 \text{ m/s}) \\ &= 15.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \curvearrowright \end{aligned}$$ *Resp.*



(b)

Fig. 19-3

También podemos utilizar

$$\begin{aligned}(\zeta +)\, H_{CI} &= I_{CI}\omega \\ &= \left[\tfrac{1}{12}(5 \text{ kg})(4 \text{ m})^2 + (5 \text{ kg})(2 \text{ m})^2\right](0.5774 \text{ rad/s}) \\ &= 15.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \curvearrowright \end{aligned}$$ *Resp.*

19

19.2 Principio de impulso y cantidad de movimiento

Como en el caso del movimiento de una partícula, el principio de impulso y cantidad de movimiento para un cuerpo rígido puede desarrollarse *si se combina* la ecuación de movimiento con cinemática. La ecuación resultante dará una *solución directa a problemas que impliquen fuerza, velocidad y tiempo*.

Principio de impulso y cantidad de movimiento lineales.

La ecuación de traslación de un cuerpo rígido puede escribirse como $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G = m(d\mathbf{v}_G/dt)$. Cuando la masa del cuerpo es constante,

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_G)$$

Si se multiplican ambos lados por dt e integran de $t = t_1$, $\mathbf{v}_G = (\mathbf{v}_G)_1$ a $t = t_2$, $\mathbf{v}_G = (\mathbf{v}_G)_2$ se obtiene

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m(\mathbf{v}_G)_2 - m(\mathbf{v}_G)_1$$

Esta ecuación se conoce como *principio de impulso y cantidad de movimiento lineales, y* establece que la suma de todos los impulsos creados por el *sistema de fuerzas externas*, que actúa en el cuerpo durante el intervalo t_1 a t_2, es igual al cambio de la cantidad de movimiento lineal del cuerpo durante este intervalo (fig. 19-4).

Principio de impulso y cantidad de movimiento lineales.

Si el cuerpo tiene *movimiento plano general*, entonces $\Sigma M_G = I_G\alpha = I_G(d\omega/dt)$. Como el momento de inercia es constante,

$$\Sigma M_G = \frac{d}{dt}(I_G\omega)$$

Al multiplicar ambos lados por dt e integrar de $t = t_1$, $\omega = \omega_1$ a $t = t_2$, $\omega = \omega_2$ resulta

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_G\, dt = I_G\omega_2 - I_G\omega_1 \qquad (19\text{-}12)$$

Del mismo modo, para *rotación con respecto a un eje fijo* que pasa por el punto O, cuando se integra la ecuación 17-16 ($\Sigma M_O = I_O\alpha$) se escribe como

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_O\, dt = I_O\omega_2 - I_O\omega_1 \qquad (19\text{-}13)$$

Las ecuaciones 19-12 y 19-13 se conocen como *principio de impulso y cantidad de movimiento angulares*. Ambas ecuaciones expresan que la suma del impulso angular que actúa en el cuerpo durante el intervalo t_1 a t_2 es igual al cambio de la cantidad de movimiento angular del cuerpo durante este intervalo.

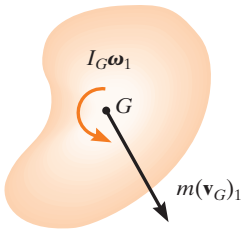


Diagrama de la cantidad de movimiento inicial

(a)

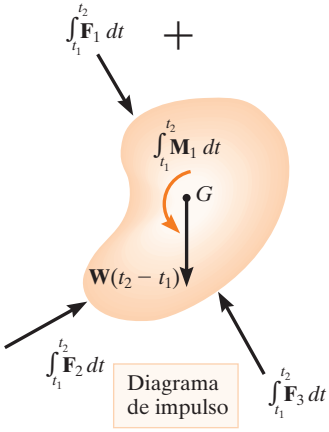


Diagrama de impulso

(b)

||

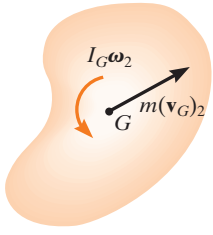


Diagrama de la cantidad de movimiento final

(c)

Fig. 19-4

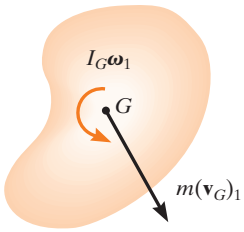


Diagrama de la cantidad de movimiento inicial

(a)

Para resumir estos conceptos, si el movimiento se desarrolla en el plano *x-y*, las siguientes *tres ecuaciones escalares* pueden escribirse para expresar el *movimiento plano* del cuerpo.

$$m(v_{Gx})_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt = m(v_{Gx})_2$$

$$m(v_{Gy})_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt = m(v_{Gy})_2 \qquad (19\text{-}14)$$

$$I_G\omega_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_G\, dt = I_G\omega_2$$

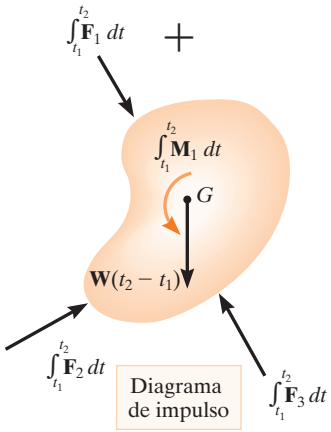


Diagrama de impulso

(b)

Los términos de estas ecuaciones pueden mostrarse gráficamente utilizando diagramas de impulso y cantidad de movimiento del cuerpo (fig. 19-4). Observe que la cantidad de movimiento lineal $m\mathbf{v}_G$ se aplica en el centro de masa del cuerpo, figuras 19-4*a* y 19-4*c*; mientras que la cantidad de movimiento angular $I_G\boldsymbol{\omega}$ es un vector libre y, por consiguiente, del mismo modo que el momento de par, puede aplicarse a cualquier punto del cuerpo. Cuando se traza el diagrama de impulso (fig. 19-4*b*), las fuerzas **F** y el momento **M** varían con el tiempo y se indican por medio de las integrales. Sin embargo, si **F** y **M** son *constantes* la integración de los impulsos da $\mathbf{F}(t_2 - t_1)$ y $\mathbf{M}(t_2 - t_1)$, respectivamente. Tal es el caso del peso del cuerpo **W** (fig. 19-4*b*).

Las ecuaciones 19-14 también pueden aplicarse a todo un sistema de cuerpos conectados en lugar de a cada uno por separado, lo cual elimina la necesidad de incluir los impulsos de interacción que aparecen en las conexiones, ya que son *internos* al sistema. Las ecuaciones resultantes pueden escribirse en forma simbólica como

=

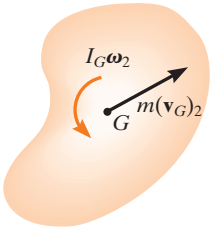


Diagrama de la cantidad de movimiento final

(c)

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento}\\ \text{lineal del sistema}\end{matrix}\right)_{x1} + \left(\sum \begin{matrix}\text{impulso lineal}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{x(1-2)} = \left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento}\\ \text{lineal del sistema}\end{matrix}\right)_{x2}$$

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento}\\ \text{lineal del sistema}\end{matrix}\right)_{y1} + \left(\sum \begin{matrix}\text{impulso lineal}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{y(1-2)} = \left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento}\\ \text{lineal del sistema}\end{matrix}\right)_{y2}$$

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento}\\ \text{angular del sistema}\end{matrix}\right)_{O1} + \left(\sum \begin{matrix}\text{impulso angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{O(1-2)} = \left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{O2}$$

(19-15)

Fig. 19-4 (reiterada)

Como se indica por medio de la tercera ecuación, la cantidad de movimiento y el impulso angulares del sistema deben calcularse con respecto al *mismo punto de referencia O* para todos sus cuerpos.

19

Procedimiento para el análisis

Los principios de impulso y cantidad de movimiento se utilizan para resolver problemas cinéticos que implican *velocidad*, *fuerza* y *tiempo*, ya que estos términos intervienen en la formulación.

Diagrama de cuerpo libre

- Establezca el marco de referencia x, y, z, inercial y trace el diagrama de cuerpo libre para mostrar gráficamente todas las fuerzas y momentos de par que originan impulsos en el cuerpo.
- Deberán establecerse la dirección y el sentido de las velocidades inicial y final del centro de masa del cuerpo, $\mathbf{v}_G$, y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de éste. Si cualquiera de estos movimientos se desconoce, suponga que el sentido de sus componentes es en la dirección de las coordenadas inerciales positivas.
- Calcule el momento de inercia I_G o I_O.
- Como un procedimiento alternativo, trace los diagramas de impulso y cantidad de movimiento del cuerpo o sistema de cuerpos. Cada uno de estos diagramas representa una figura delineada del cuerpo, el cual incluye gráficamente los datos requeridos para cada uno de los tres términos de las ecuaciones 19-14 o 19-15 (fig. 19-4). Estos diagramas son particularmente útiles para visualizar los términos de "momento" utilizados en el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares, si la aplicación se hace con respecto al *CI* o a otro punto diferente del centro de masa del cuerpo G o un punto fijo O.

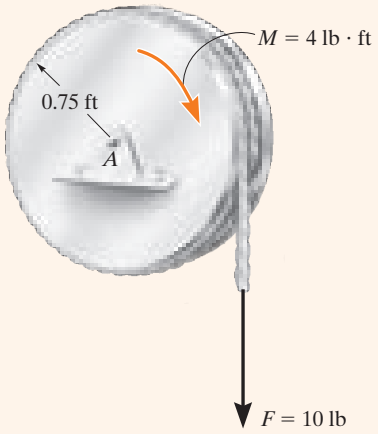
Principio de impulso y cantidad de movimiento

- Aplique las tres ecuaciones escalares de impulso y cantidad de movimiento.
- La cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido que gira con respecto a un eje fijo es el momento de $m\mathbf{v}_G$ más $I_G\boldsymbol{\omega}$ con respecto al eje. Éste es igual a $H_O = I_O\omega$, donde I_O es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje.
- Todas las fuerzas que actúen en el diagrama de cuerpo libre crearán un impulso; sin embargo, algunas de ellas no realizarán trabajo.
- Las fuerzas que son funciones del tiempo deben integrarse para obtener el impulso.
- Con frecuencia se utiliza el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares para eliminar las fuerzas impulsoras desconocidas que son paralelas o que pasan por un eje común, ya que su momento es cero con respecto a este eje.

Cinemática

- Si se requieren más de tres ecuaciones para una solución completa, sería posible relacionar la velocidad del centro de masa del cuerpo con su velocidad angular mediante *cinemática*. Si el movimiento parece ser complicado, los diagramas cinemáticos (de velocidad) pueden ser útiles para obtener la relación necesaria.

EJEMPLO 19.2



(a)

En el disco de 20 lb mostrado en la figura 19-5*a* actúan un momento de par constante de 4 lb · ft y una fuerza de 10 lb, la cual se aplica a una cuerda enrollada alrededor de su periferia. Determine la velocidad angular del disco dos segundos después de que empieza a moverse del reposo. Además, ¿cuáles son las componentes de fuerza de la reacción en el pasador?

SOLUCIÓN

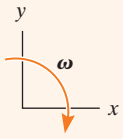
Como la velocidad angular, la fuerza y el tiempo intervienen en los problemas, aplicaremos los principios de impulso y cantidad de movimiento a la solución.

Diagrama de cuerpo libre. Figura 19-5*b*. El centro de masa del disco no se mueve; sin embargo, la carga hace que el disco gire en sentido horario.

El momento de inercia del disco con respecto a su eje de rotación fijo es

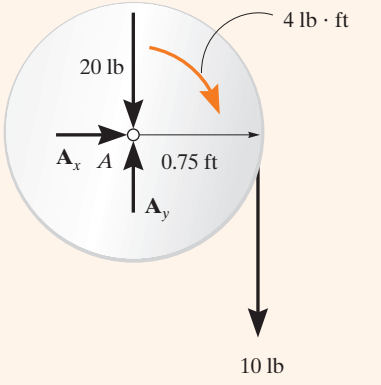
$$I_A = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{20\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(0.75\text{ ft})^2 = 0.1747\text{ slug}\cdot\text{ft}^2$$

Principio de impulso y cantidad de movimiento



$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad m(v_{Ax})_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m(v_{Ax})_2$$

$$0 + A_x(2\text{ s}) = 0$$



$$(+\uparrow) \qquad m(v_{Ay})_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_{Ay})_2$$

$$0 + A_y(2\text{ s}) - 20\text{ lb}(2\text{ s}) - 10\text{ lb}(2\text{ s}) = 0$$

$$(\circlearrowleft +) \qquad I_A\omega_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} M_A\,dt = I_A\omega_2$$

$$0 + 4\text{ lb}\cdot\text{ft}(2\text{ s}) + [10\text{ lb}(2\text{ s})](0.75\text{ ft}) = 0.1747\omega_2$$

10 lb

(b)

Fig. 19-5

Al resolver estas ecuaciones se obtiene

$$A_x = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

$$A_y = 30\text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\omega_2 = 132\text{ rad/s}\circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

19

EJEMPLO 19.3

El carrete de 100 kg que se muestra en la figura 19-6*a* tiene un radio de giro $k_G = 0.35$ m. Se enrolla un cable alrededor de la masa central del carrete y se aplica una fuerza horizontal de magnitud variable de $P = (t + 10)$ N, donde t está en segundos. Si el carrete inicialmente está en reposo, determine su velocidad angular en 5 s. Suponga que el carrete rueda sin deslizarse en A.

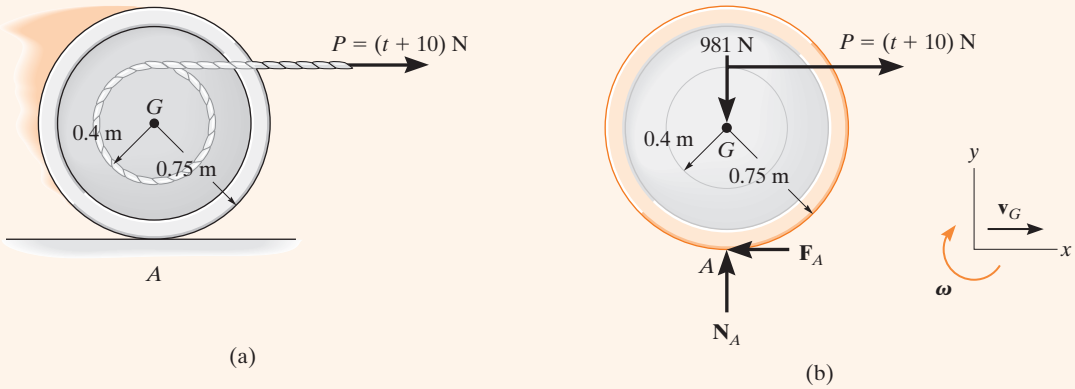


Fig. 19-6

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Según el diagrama de cuerpo libre (fig. 19-6*b*), la fuerza *variable* **P** hará que la fuerza de fricción $\mathbf{F}_A$ sea variable y, por consiguiente, los impulsos creados tanto por **P** como por $\mathbf{F}_A$ deben determinarse por integración. La fuerza **P** hace que el centro de masa tenga una velocidad $\mathbf{v}_G$ hacia la derecha y, de esta manera, el carrete tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ en sentido horario.

Principio de impulso y cantidad de movimiento. Puede obtenerse una solución directa para $\boldsymbol{\omega}$ aplicando el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares con respecto al punto A, el CI, para eliminar el impulso desconocido creado por la fuerza de fricción,

$$(\circlearrowright +) \qquad I_A\omega_1 + \Sigma \int M_A\, dt = I_A\omega_2$$

$$0 + \left[\int_0^{5\,\text{s}} (t + 10)\,\text{N}\, dt\right](0.75\,\text{m} + 0.4\,\text{m}) = [100\,\text{kg}\,(0.35\,\text{m})^2 + (100\,\text{kg})(0.75\,\text{m})^2]\omega_2$$

$$62.5(1.15) = 68.5\omega_2$$

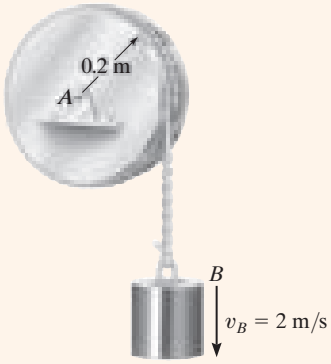
$$\omega_2 = 1.05\,\text{rad/s}\circlearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Intente resolver este problema con el principio de impulso y cantidad de movimiento con respecto a G y con el principio de impulso y cantidad de movimiento lineales en la dirección x.

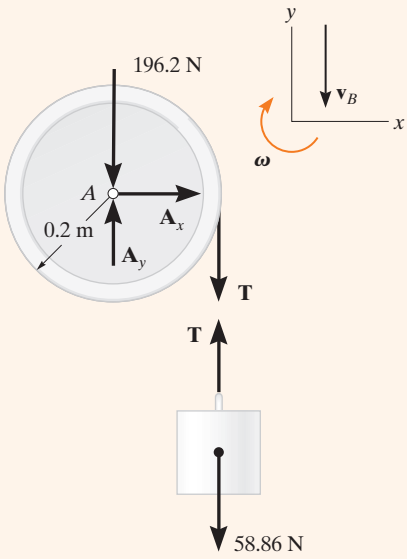
19

EJEMPLO 19.4

El cilindro B que se muestra en la figura 19-7*a* tiene una masa de 6 kg. Cuelga de una cuerda que se enrolla alrededor de la periferia de un disco de 20 kg, cuyo momento de inercia es $I_A = 0.40\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. Si inicialmente desciende con una rapidez de 2 m/s, determine su rapidez en 3 s. Ignore la masa de la cuerda en el cálculo.



(a)



(b)

Fig. 19-7

SOLUCIÓN I

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del cilindro y disco se muestra en la figura 19-7*b*. Todas las fuerzas son *constantes*, ya que el peso del cilindro crea el movimiento. El movimiento descendente del cilindro, $\mathbf{v}_B$, hace que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ sea en sentido horario.

Principio de impulso y cantidad de movimiento. Podemos eliminar $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ del análisis al aplicar el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares con respecto al punto A. Por consiguiente,

Disco

$$(\circlearrowleft +) \qquad I_A\omega_1 + \Sigma \int M_A\, dt = I_A\omega_2$$

$$0.40\ \text{kg} \cdot \text{m}^2(\omega_1) + T(3\ \text{s})(0.2\ \text{m}) = (0.40\ \text{kg} \cdot \text{m}^2)\omega_2$$

Cilindro

$$(+\uparrow) \qquad m_B(v_B)_1 + \Sigma \int F_y\, dt = m_B(v_B)_2$$

$$-6\ \text{kg}(2\ \text{m/s}) + T(3\ \text{s}) - 58.86\ \text{N}(3\ \text{s}) = -6\ \text{kg}(v_B)_2$$

Cinemática. Como $\omega = v_B/r$, entonces $\omega_1 = (2\ \text{m/s})/(0.2\ \text{m}) = 10\ \text{rad/s}$ y $\omega_2 = (v_B)_2/0.2\ \text{m} = 5(v_B)_2$. Al sustituir y despejar simultáneamente las ecuaciones para $(v_B)_2$ obtenemos

$$(v_B)_2 = 130\ \text{m/s}\downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

19

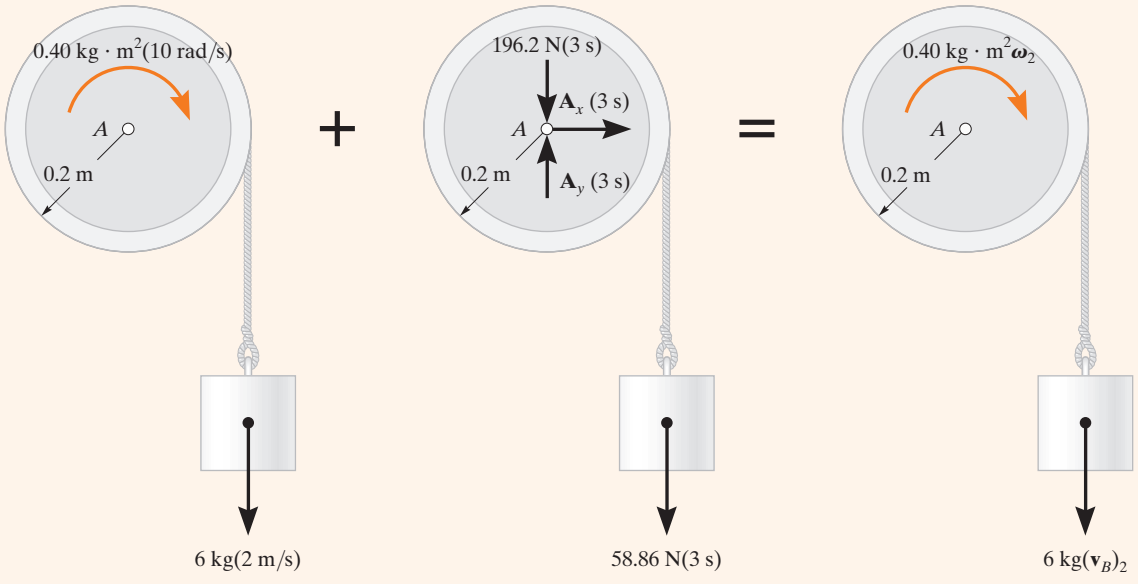
SOLUCIÓN II

Diagramas de impulso y cantidad de movimiento. Podemos obtener $(v_B)_2$ *directamente* al considerar el *sistema* compuesto del cilindro, la cuerda y el disco. Se trazaron los diagramas de impulso y cantidad de movimiento para esclarecer la aplicación del principio de impulso y cantidad de movimiento angulares con respecto al punto A (fig. 19-7*c*).

Principio de impulso y cantidad de movimiento angulares. Como $\omega_1 = 10$ rad/s y $\omega_2 = 5(v_B)_2$, tenemos

$$(\circlearrowright +)\left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de movimiento}\\ \text{angular del sistema}\end{matrix}\right)_{A1} + \left(\sum \begin{matrix}\text{impulso angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{A(1\text{-}2)} = \left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de movimiento}\\ \text{angular del sistema}\end{matrix}\right)_{A2}$$

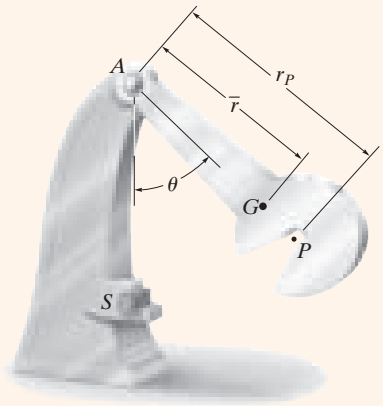
$$(6\text{ kg})(2\text{ m/s})(0.2\text{ m}) + (0.40\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(10\text{ rad/s}) + (58.86\text{ N})(3\text{ s})(0.2\text{ m})$$
$$= (6\text{ kg})(v_B)_2(0.2\text{ m}) + (0.40\text{ kg}\cdot\text{m}^2)[5(v_B)_2]$$
$$(v_B)_2 = 13.0\text{ m/s}\downarrow \qquad \textit{Resp.}$$



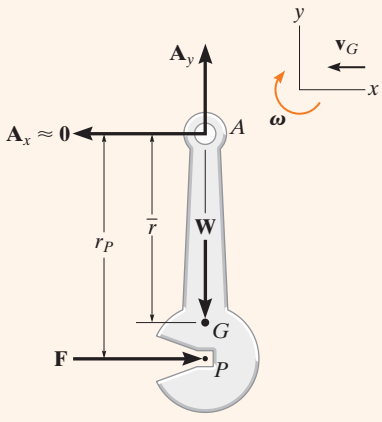
(c)

Fig. 19-7 (cont.)

EJEMPLO 19.5



(a)



(b)

Fig. 19-8

La prueba de impacto Charpy se utiliza en la prueba de materiales para determinar sus características de absorción de energía durante el impacto. La prueba se realiza por medio del péndulo mostrado en la figura 19-8*a*, el cual tiene una masa m, un centro de masa en G y un radio de giro k_G con respecto a G. Determine la distancia r_P del pasador en A al punto P donde el impacto con la muestra S deberá ocurrir, de modo que la fuerza horizontal en el pasador A sea esencialmente cero durante el impacto. Para el cálculo, suponga que la muestra absorbe toda la energía cinética del péndulo adquirida mientras cae y, de ese modo, detiene su oscilación cuando $\theta = 0°$.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre (fig. 19-8*b*), las condiciones del problema requieren que la fuerza horizontal en A sea cero. Justo antes del impacto, la velocidad angular del péndulo es $\boldsymbol{\omega}_1$ en sentido horario y su centro de masa está en movimiento a la izquierda en $(v_G)_1 = \bar{r}\omega_1$.

Principio de impulso y cantidad de movimiento. Aplicaremos el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares con respecto al punto A. Por lo tanto,

$$I_A\omega_1 + \Sigma\int M_A\,dt = I_A\omega_2$$

$$(\circlearrowleft +) \qquad I_A\omega_1 - \left(\int F\,dt\right)r_P = 0$$

$$m(v_G)_1 + \Sigma\int F\,dt = m(v_G)_2$$

$$(\pm\rightarrow) \qquad -m(\bar{r}\omega_1) + \int F\,dt = 0$$

Al eliminar el impulso $\int F\,dt$ y sustituir $I_A = mk_G^2 + m\bar{r}^2$ se obtiene

$$[mk_G^2 + m\bar{r}^2]\omega_1 - m(\bar{r}\omega_1)r_P = 0$$

Al factorizar $m\omega_1$ y al despejar r_P, obtenemos

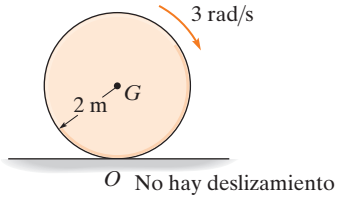
$$r_P = \bar{r} + \frac{k_G^2}{\bar{r}} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: El punto P, así definido, se llama *centro de percusión*. Al colocar el punto de impacto en P, la fuerza desarrollada en el pasador será mínima. Muchos implementos deportivos, como raquetas, palos de golf, etcétera, se diseñan de modo que el choque contra el objeto golpeado ocurra en el centro de percusión. En consecuencia, el jugador no tendrá ninguna sensación de "aguijoneo" ni de otra índole en su mano (vea además los problemas 17-66 y 19-1).

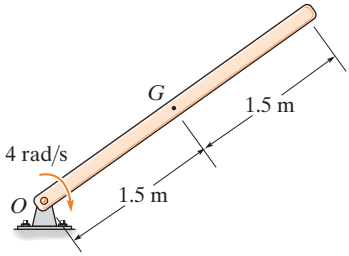
PROBLEMAS PRELIMINARES

P19-1. Determine la cantidad de movimiento angular del disco de 100 kg o de la varilla con respecto al punto G y con respecto al punto O.

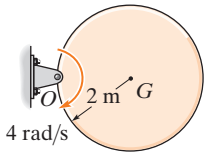
a)



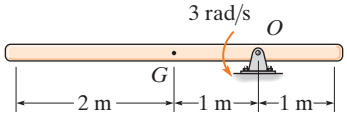
b)



c)



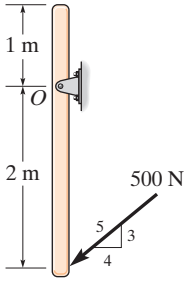
d)



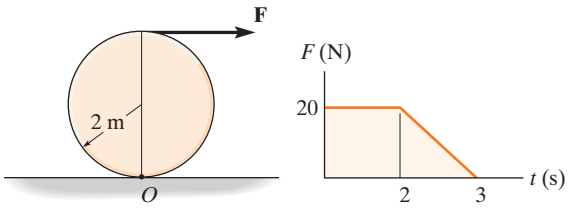
Prob. P19-1

P19-2. Determine el impulso angular con respecto al punto O para $t = 3$ s.

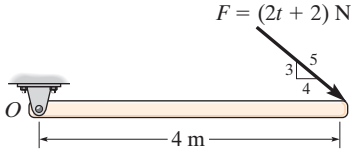
a)



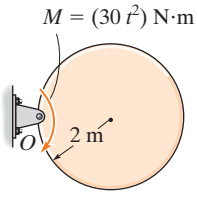
b)



c)



d)

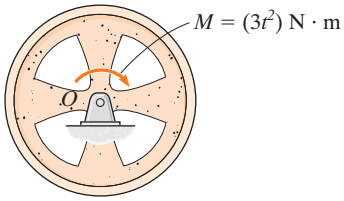


Prob. P19-2

19

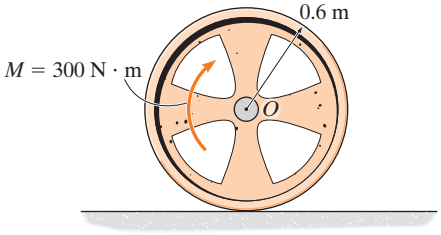
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F19-1. La rueda de 60 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro O de $k_O = 300$ mm. Si se somete a un momento de par de $M = (3t^2)$ N · m, donde t está en segundos, determine su velocidad angular cuando $t = 4$ s, a partir del reposo.



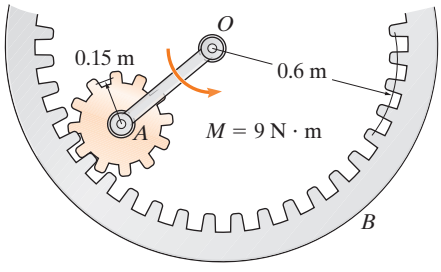
Prob. F19-1

F19-2. La rueda de 300 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro de masa O de $k_O = 400$ mm. Si se somete a un momento de par de $M = 300$ N · m, determine su velocidad angular 6 s después de que comienza a rodar del reposo sin deslizarse. Asimismo, determine la fuerza de fricción que ejerce el suelo sobre la rueda.



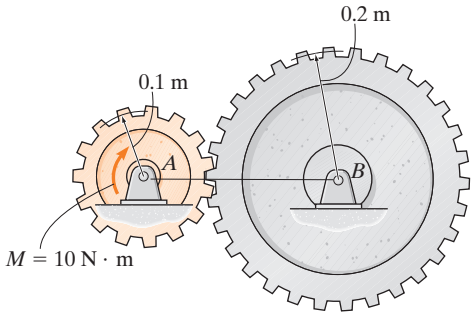
Prob. F19-2

F19-3. Si la varilla OA de masa insignificante se somete al momento de par $M = 9$ N · m, determine la velocidad angular del engrane interno $t = 5$ s después de que comienza a moverse del reposo y cuya masa es de 10 kg. El radio de giro del engrane con respecto a su centro de masa es $k_A = 100$ mm y rueda sobre el engrane externo fijo, B. El movimiento se desarrolla en el plano horizontal.



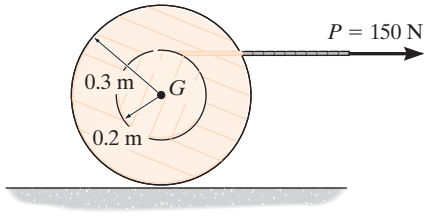
Prob. F19-3

F19-4. Los engranes A y B de 10 kg y 50 kg de masa tienen radios de giro con respecto a sus centros de masa respectivos de $k_A = 80$ mm y $k_B = 150$ mm. Si el engrane A se somete a un momento de par $M = 10$ N · m cuando está en reposo, determine la velocidad angular del engrane B cuando $t = 5$ s.



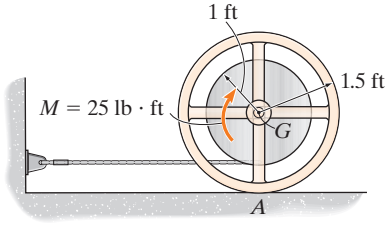
Prob. F19-4

F19-5. El carrete de 50 kg se somete a una fuerza horizontal $P = 150$ N. Si rueda sin deslizarse, determine su velocidad angular 3 s después de que comienza a rodar del reposo. Su radio de giro con respecto a su centro de masa es $k_G = 175$ mm.



Prob. F19-5

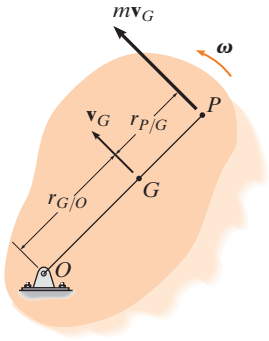
F19-6. El carrete pesa 150 lb y su radio de giro con respecto a su centro de gravedad es $k_G = 1.25$ ft. Si se somete a un par de torsión $M = 25$ lb · ft y comienza a rodar del reposo cuando se aplica el par de torsión, determine su velocidad angular en 3 segundos. El coeficiente de fricción cinética entre el carrete y el plano horizontal es $\mu_k = 0.15$.



Prob. F19-6

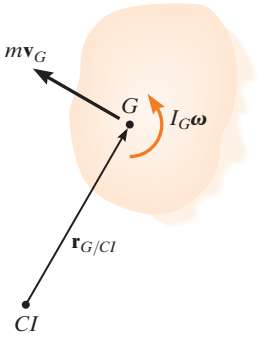
PROBLEMAS

19-1. El cuerpo rígido (losa) tiene una masa m y gira con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ con respecto a un eje que pasa por el punto fijo O. Demuestre que los momentos de todas las partículas que componen el cuerpo pueden representarse mediante un solo vector de magnitud mv_G y que actúa en el punto P, llamado *centro de percusión*, el cual queda a una distancia $r_{P/G} = k_G^2/r_{G/O}$ del centro de masa G. Aquí k_G es el radio de giro del cuerpo, calculado con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento y que pasa por G.



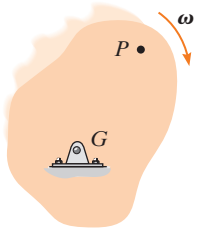
Prob. 19-1

19-2. En un instante dado, el cuerpo tiene una cantidad de movimiento lineal $\mathbf{L} = m\mathbf{v}_G$ y una cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G = I_G\boldsymbol{\omega}$ calculado con respecto a su centro de masa. Demuestre que la cantidad de movimiento angular del cuerpo calculada con respecto al centro instantáneo (CI) de velocidad cero puede expresarse como $\mathbf{H}_{CI} = I_{IC}\boldsymbol{\omega}$, donde I_{CI} representa el momento de inercia del cuerpo calculado con respecto al eje instantáneo de velocidad cero. Como se muestra, el CI está a una distancia $r_{G/CI}$ del centro de masa G.



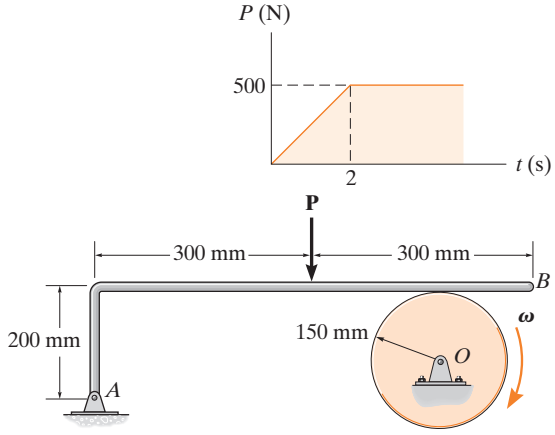
Prob. 19-2

19-3. Demuestre que si una losa gira con respecto a un eje perpendicular fijo a ella, y pasa por su centro de masa G, la cantidad de movimiento angular es la misma cuando se calcula con respecto a cualquier otro punto P.



Prob. 19-3

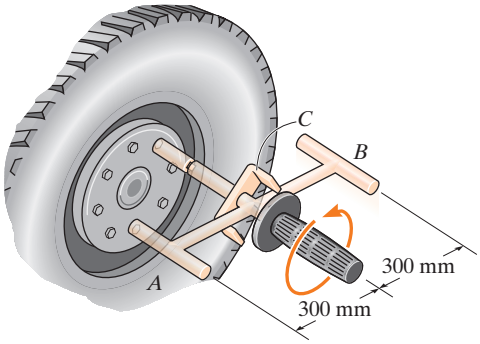
***19-4.** El disco de 40 kg gira a $\boldsymbol{\omega} = 100$ rad/s, cuando se aplica la fuerza $\mathbf{P}$ al freno, como lo indica la gráfica. Si el coeficiente de fricción cinética en B es $\mu_k = 0.3$, determine el tiempo t necesario para que el disco deje de girar. Desprecie el espesor del freno.



Prob. 19-4

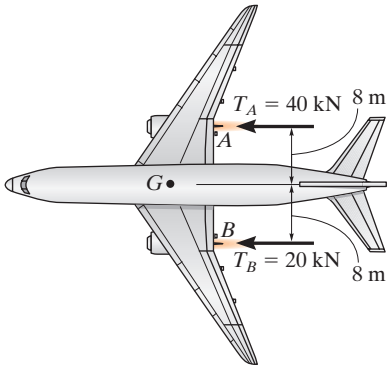
19

19-5. La llave de impacto se compone de una varilla delgada AB de 1 kg y 580 mm de largo y de contrapesos cilíndricos A y B de 20 mm de diámetro y 1 kg de masa. Este ensamble gira libremente con respecto a una manivela y un dado, los cuales están en contacto con la tuerca de la rueda de un automóvil. Si a la varilla AB se le imprime una velocidad angular de 4 rad/s y choca contra la ménsula C de la manivela sin rebotar, determine el impulso angular impartido a la tuerca.



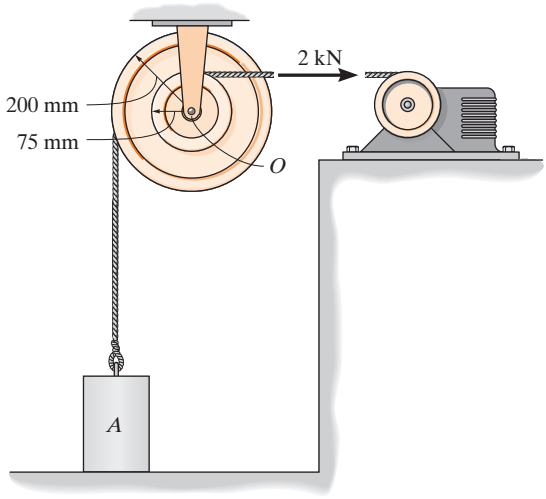
Prob. 19-5

19-6. El avión se desplaza en línea recta con una rapidez de 300 km/h, cuando los motores A y B producen un empuje de $T_A = 40$ kN y $T_B = 20$ kN, respectivamente. Determine la velocidad angular del avión en $t = 5$ s. El avión tiene una masa de 200 Mg, su centro de masa se encuentra en G y su radio de giro con respecto a G es $k_G = 15$ m.



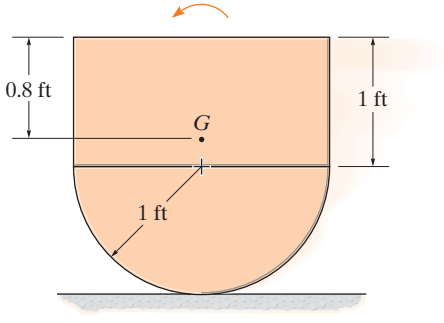
Prob. 19-6

19-7. La polea doble consta de dos ruedas que están unidas entre sí y giran a la misma velocidad. La polea tiene una masa de 15 kg y un radio de giro de $k_O = 110$ mm. Si el bloque en A tiene una masa de 40 kg, determine la rapidez del bloque, 3 s después de que se aplica una fuerza constante de 2 kN a la cuerda enrollada alrededor del eje interior de la polea. El bloque está originalmente en reposo.



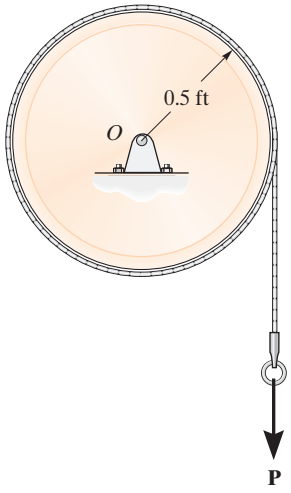
Prob. 19-7

*19-8. El ensamble pesa 10 lb y tiene un radio de giro $k_G = 0.6$ ft con respecto a su centro de masa G. La energía cinética del ensamble es de 31 ft · lb cuando está en la posición indicada. Si rueda en sentido antihorario sin deslizarse sobre la superficie, determine su cantidad de movimiento lineal en este instante.



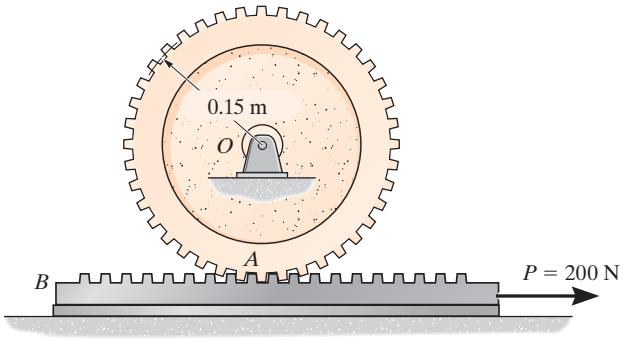
Prob. 19-8

19-9. El disco tiene un peso de 10 lb y está fijo mediante un pasador en su centro O. Si se aplica una fuerza vertical de $P = 2$ lb al cable enrollado alrededor de su borde exterior, determine la velocidad angular del disco en cuatro segundos a partir del reposo. Desprecie la masa de la cuerda.



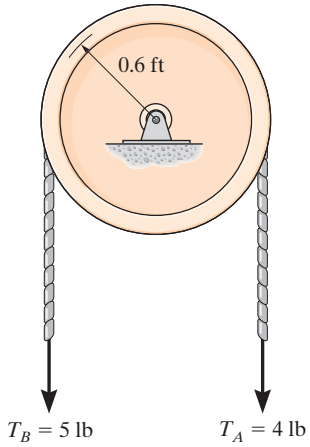
Prob. 19-9

19-10. El engrane A de 30 kg tiene un radio de giro alrededor de su centro de masa O de $k_O = 125$ mm. Si el engrane recto B de 20 kg se somete a una fuerza de $P = 200$ N, determine el tiempo requerido para que el engrane A obtenga una velocidad angular de 20 rad/s, a partir del reposo. La superficie de contacto entre el engrane recto y el plano horizontal es lisa.



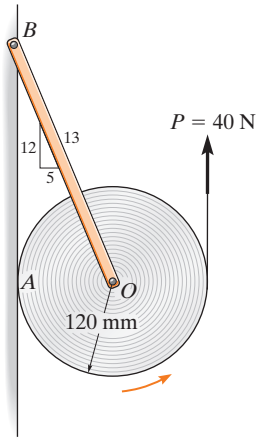
Prob. 19-10

19-11. La polea tiene un peso de 8 lb y puede tratarse como un disco delgado. Un cable enrollado sobre su superficie se somete a las fuerzas $T_A = 4$ lb y $T_B = 5$ lb. Determine la velocidad angular de la polea cuando $t = 4$ s si parte del reposo cuando $t = 0$. Desprecie la masa de la cuerda.



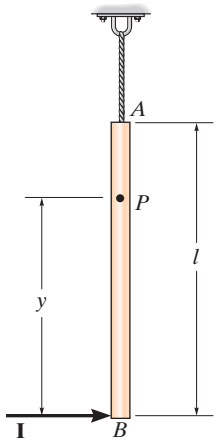
Prob. 19-11

***19-12.** El rollo de papel de 40 kg se apoya en la pared, donde el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.2$. Si se aplica una fuerza vertical de $P = 40$ N al papel, determine la velocidad angular del rollo cuando $t = 6$ s a partir del reposo. Desprecie la masa del papel desenrollado y considere que el radio de giro del rollo alrededor del eje O es $k_O = 80$ mm.



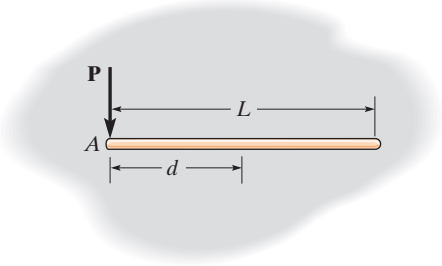
Prob. 19-12

19-13. La varilla delgada tiene una masa m y está suspendida de una cuerda en su extremo A. Si la varilla recibe un golpe horizontal que le da un impulso $\mathbf{I}$ en su parte inferior B, determine la ubicación y del punto P con respecto al cual la varilla parece girar durante el impacto.



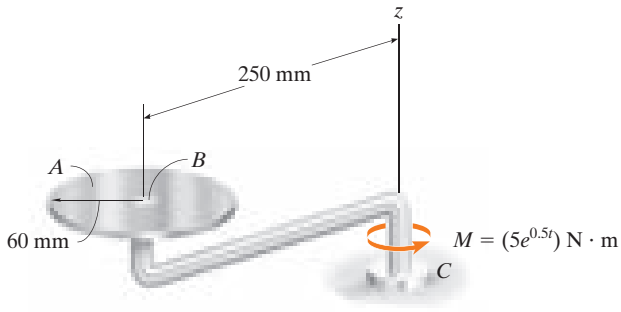
Prob. 19-13

19-14. La varilla de longitud L y la masa m descansa sobre una superficie horizontal lisa y está sometida a una fuerza $\mathbf{P}$ en su extremo A, como se indica. Determine la ubicación d del punto con respecto al cual la varilla empieza a girar, es decir, el punto que tiene velocidad cero.



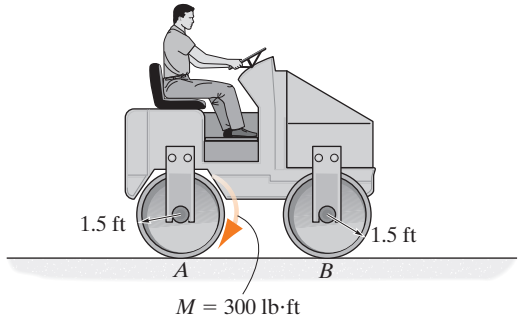
Prob. 19-14

19-15. Un disco A de 4 kg está montado sobre el brazo BC, que tiene una masa despreciable. Si un par de $M = (5e^{0.5t})$ N · m, donde t se da en segundos, se aplica al brazo en C, determine la velocidad angular de BC en 2 s a partir el reposo. Resuelva el problema suponiendo que (a) el disco se encuentra en un cojinete liso en B, de modo que se mueve con traslación curvilínea; (b) el disco está fijo al eje BC; y (c) el disco recibe una velocidad angular inicial con giro libre de $\boldsymbol{\omega}_D = \{-80\mathbf{k}\}$ rad/s antes de la aplicación del par de torsión.



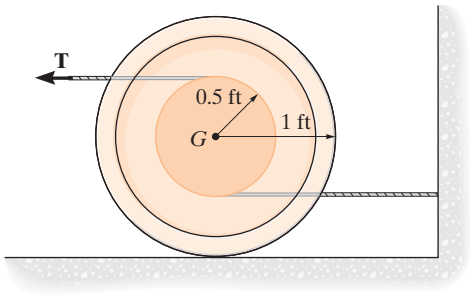
Prob. 19-15

***19-16.** El bastidor de una máquina aplanadora tiene un peso de 4000 lb sin incluir los dos rodillos. Cada rodillo tiene un peso de 1500 lb y un radio de giro alrededor de su eje de 1.25 ft. Si se suministra un par de $M = 300$ lb · ft al rodillo posterior A, determine la rapidez del rodillo 10 s después, a partir del reposo.



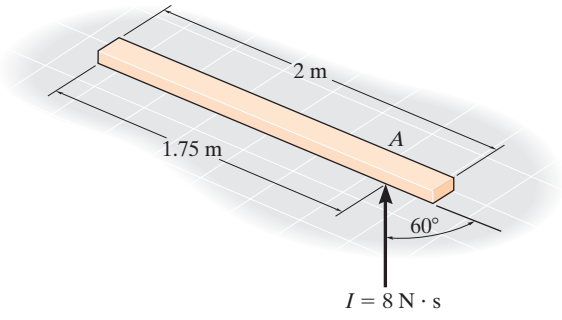
Prob. 19-16

19-17. La rueda de 100 lb tiene un radio de giro de $k_G = 0.75$ ft. Si el alambre superior se somete a una tensión de $T = 50$ lb, determine la velocidad del centro de la rueda en 3 s, a partir del reposo. El coeficiente de fricción cinética entre la rueda y la superficie es $\mu_k = 0.1$.



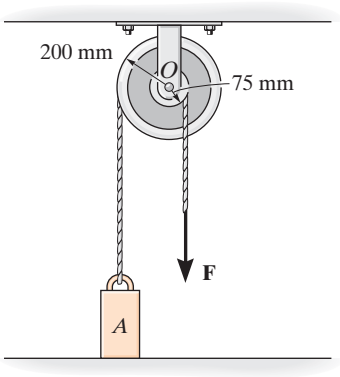
Prob. 19-17

19-18. La varilla delgada de 4 kg descansa sobre un piso liso. Si se patea de modo que recibe un impulso horizontal $I = 8$ N · s en el punto A, como se indica, determine su velocidad angular y la rapidez de su centro de masa.



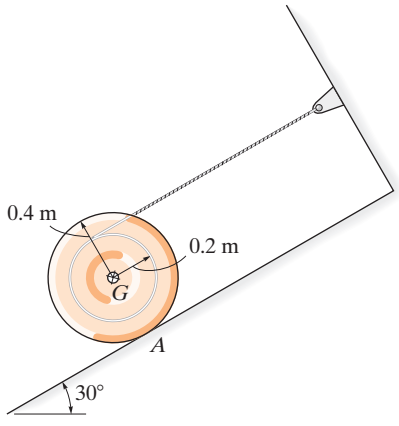
Prob. 19-18

19-19. La polea doble consta de dos ruedas que están unidas entre sí y giran a la misma velocidad. La polea tiene una masa de 15 kg y un radio de giro $k_O = 110$ mm. Si el bloque en A tiene una masa de 40 kg, determine la rapidez del bloque 3 s después de que una fuerza constante $F = 2$ kN se aplica a la cuerda enrollada alrededor del eje interior de la polea. El bloque está originalmente en reposo. Desprecie la masa de la cuerda.



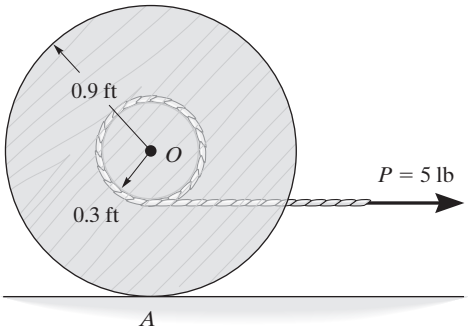
Prob. 19-19

***19-20.** El carrete de 100 kg descansa sobre la superficie inclinada cuyo coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.1$. Determine la velocidad angular del carrete cuando $t = 4$ s después de que se libera desde el reposo. El radio de giro alrededor del centro de masa es $k_G = 0.25$ m.



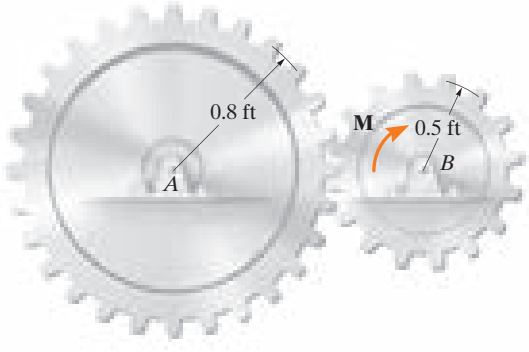
Prob. 19-20

19-21. El carrete tiene un peso de 30 lb y un radio de giro $k_O = 0.45$ ft. Una cuerda se enrolla alrededor de su eje interior y el extremo se somete a una fuerza horizontal $P = 5$ lb. Determine la velocidad angular del carrete en 4 s a partir del reposo. Suponga que el carrete rueda sin deslizarse.



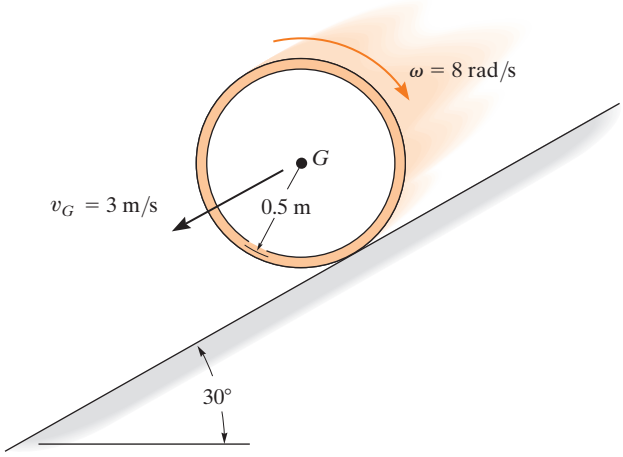
Prob. 19-21

19-22. Los dos engranes A y B tienen los pesos y los radios de giro $W_A = 15$ lb, $k_A = 0.5$ ft y $W_B = 10$ lb, $k_B = 0.35$ ft, respectivamente. Si un motor transmite un momento de par al engrane B de $M = 2(1 - e^{-0.5t})$ lb · ft, donde t se da en segundos, determine la velocidad angular del engrane A en $t = 5$ s, a partir del reposo.



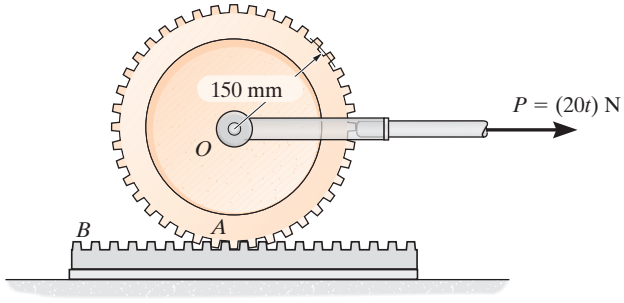
Prob. 19-22

19-23. El aro (anillo delgado) tiene una masa de 5 kg y se libera sobre el plano inclinado, de modo que tiene un efecto de retroceso $\omega = 8$ rad/s y su centro tiene una velocidad $v_G = 3$ m/s como se ilustra. Si el coeficiente de fricción cinética entre el aro y el plano es $\mu_k = 0.6$, determine cuánto tiempo rueda el aro antes de dejar de deslizarse.



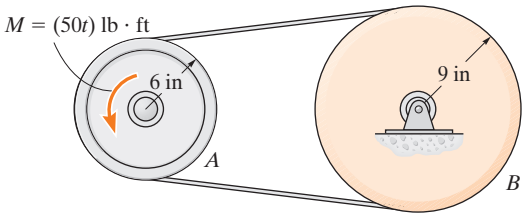
Prob. 19-23

***19-24.** El engrane de 30 kg se somete a una fuerza de $P = (20t)$ N, donde t se da en segundos. Determine la velocidad angular del engrane en $t = 4$ s, a partir del reposo. El engrane recto B está fijo al plano horizontal y el radio de giro del engrane con respecto a su centro de masa O es $k_O = 125$ mm.



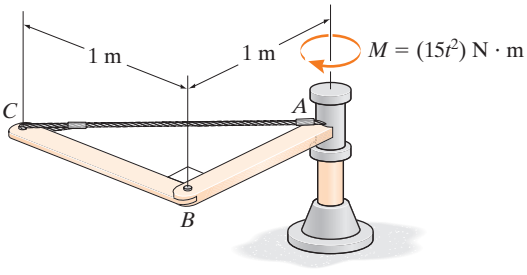
Prob. 19-24

19-25. El volante A de 30 de tiene un radio de giro con respecto a su centro de 4 in. El disco B pesa 50 lb y está acoplado al volante por medio de una banda que no se desliza sobre sus superficies de contacto. Si un motor suministra un par de torsión al volante en sentido antihorario de $M = (50t)$ lb · ft, donde t se da en segundos, determine el tiempo requerido para que el disco alcance una velocidad angular de 60 rad/s, a partir del reposo.



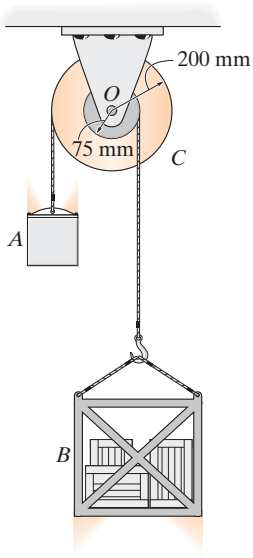
Prob. 19-25

19-26. Si el eje se somete a un par de torsión de $M = (15t^2)$ N · m, donde t se da en segundos, determine la velocidad angular del ensamble cuando $t = 3$ s, a partir del reposo. Las varillas AB y BC tienen una masa de 9 kg cada una.



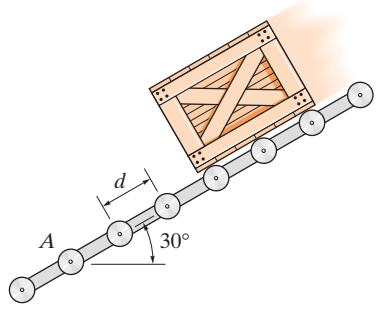
Prob. 19-26

19-27. La polea doble consta de dos ruedas que están unidas entre sí y giran a la misma velocidad. La polea tiene una masa de 15 kg y un radio de giro de $k_O = 110$ mm. Si el bloque en A tiene una masa de 40 kg y el contenedor en B tiene una masa de 85 kg, incluyendo sus contenidos, determine la velocidad del contenedor cuando $t = 3$ s después ser liberado desde el reposo.



Prob. 19-27

***19-28.** La caja tiene una masa m_c. Determine la rapidez constante v_0 que adquiere a medida que se mueve hacia abajo sobre el transportador de rodillos. Cada uno de los rodillos tiene un radio de r, una masa m y están espaciados a una distancia d. Tenga en cuenta que la fricción hace que cada rodillo gire cuando la caja entra en contacto con él.



Prob. 19-28

19

19.3 Conservación de la cantidad de movimiento

Conservación de la cantidad de movimiento lineal. Si la suma de todos los *impulsos lineales* que actúan en un sistema de cuerpos rígidos conectados es *cero* en una dirección específica, entonces la cantidad de movimiento lineal del sistema es constante o se conserva en esta dirección, es decir,

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento lineal}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_1 = \left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento lineal}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_2 \tag{19-16}$$

Esta ecuación se conoce como la *conservación de la cantidad de movimiento lineal*.

Sin introducir errores apreciables en los cálculos, la ecuación 19-16 puede aplicarse en una dirección específica, a lo largo de la cual los impulsos lineales son mínimos o *no impulsores*. De manera específica, las fuerzas no impulsoras ocurren cuando fuerzas mínimas actúan durante lapsos de tiempo muy cortos. Algunos ejemplos son la fuerza de un resorte levemente deformado, la fuerza de contacto inicial con suelo blando y, en algunos casos, el peso del cuerpo.

Conservación de la cantidad de movimiento angular. La cantidad de movimiento angular de un sistema de cuerpos rígidos conectados se conserva con respecto al centro de masa G del sistema, o con respecto a un punto fijo O, cuando la suma de todos los impulsos angulares con respecto a estos puntos es cero o apreciablemente mínima (no impulsores). La tercera de estas ecuaciones se vuelve entonces

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{O1} = \left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{O2} \tag{19-17}$$

Esta ecuación se conoce como la *conservación de la cantidad de movimiento angular*. En el caso de un solo cuerpo rígido, la ecuación 19-17 aplicada al punto G se vuelve $(I_G\omega)_1 = (I_G\omega)_2$. Considere, por ejemplo, un clavadista que ejecuta un salto mortal después de saltar desde un trampolín. Al juntar sus brazos y piernas al pecho, *reduce* el momento de inercia de su cuerpo y, por lo tanto, *incrementa* su velocidad angular ($I_G\omega$ debe ser constante). Si recobra la posición recta justo antes de entrar al agua, el momento de inercia de su cuerpo se *incrementa* y, por consiguiente, su velocidad angular *se reduce*. Como el peso crea un impulso lineal durante el tiempo del movimiento, este ejemplo también ilustra cómo puede conservarse la cantidad de movimiento angular de un cuerpo, *no* así la cantidad de movimiento lineal. Tales casos ocurren siempre que las fuerzas externas que crean el impulso lineal pasan ya sea por el centro de masa del cuerpo o por un eje de rotación fijo.

Procedimiento para el análisis

La conservación de la cantidad de movimiento lineal o angular deberá aplicarse con el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre

- Establezca el marco de referencia inercial x, y y trace el diagrama de cuerpo libre para el cuerpo o sistema de cuerpos durante el tiempo del impacto. A partir de este diagrama, clasifique cada una de las fuerzas aplicadas como "impulsoras" o "no impulsoras".
- Por inspección del diagrama de cuerpo libre, la *conservación de la cantidad de movimiento lineal* es válida en una dirección dada, cuando fuerzas impulsoras *no* externas actúan en el cuerpo o sistema en esa dirección; mientras que la *conservación de la cantidad de movimiento angular* es válida con respecto a un punto fijo O, o en el centro de masa G de un cuerpo o sistema de cuerpos cuando todas las fuerzas impulsoras externas que actúan en el cuerpo o sistema crean un momento cero (o impulso angular cero) con respecto a O o G.
- Como un procedimiento alternativo, trace los diagramas de impulso y cantidad de movimiento del cuerpo o sistema de cuerpos. Estos diagramas son muy útiles para visualizar los términos de "momento", utilizados en la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento angular, cuando se ha decidido que los momentos angulares tienen que calcularse con respecto a un punto diferente del centro de masa G del cuerpo.

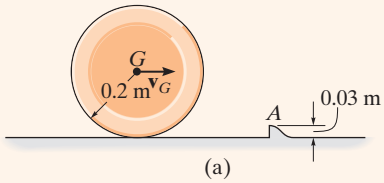
Conservación de la cantidad de movimiento

- Aplique la cantidad de movimiento lineal o angular en las direcciones apropiadas.

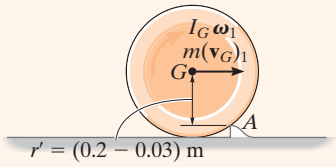
Cinemática

- Si el movimiento parece ser complicado, los diagramas cinemáticos (de velocidad) suelen ser útiles para obtener las relaciones cinemáticas necesarias.

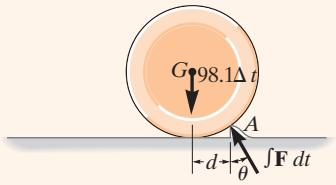
EJEMPLO 19.6



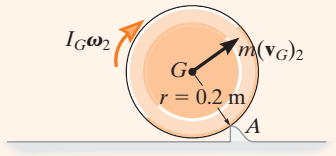
(a)



+



=



(b)

La rueda de 10 kg que se muestra en la figura 19-9*a* tiene un momento de inercia $I_G = 0.156\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. Suponiendo que la rueda no se deslice ni rebote, determine la velocidad mínima $\mathbf{v}_G$ que debe tener para apenas rodar sobre la obstrucción en A.

SOLUCIÓN

Diagramas de impulso y cantidad de movimiento. Como no hay deslizamiento ni rebote, la rueda en esencia *gira* alrededor del punto A durante el contacto. Esta condición se muestra en la figura 19-9*b*, la cual indica, respectivamente, la cantidad de movimiento de la rueda *justo antes del impacto*, los impulsos impartidos a la rueda *durante el impacto* y la cantidad de movimiento de la rueda *justo después del impacto*. Sólo dos impulsos (fuerzas) actúan sobre la rueda. Por comparación, la fuerza en A es mucho mayor que la del peso, y como el tiempo del impacto es muy corto, el peso puede considerarse como no impulsor. La magnitud y la dirección θ de la fuerza impulsora $\mathbf{F}$ en A se desconocen. Para eliminar esta fuerza del análisis, observe que la cantidad de movimiento angular con respecto a A en esencia *se conserva*, ya que $(98.1\Delta t)d \approx 0$.

Conservación de la cantidad de movimiento angular. Con referencia a la figura 19-9*b*,

$$(\circlearrowleft +) \qquad (H_A)_1 = (H_A)_2$$

$$r'm(v_G)_1 + I_G\omega_1 = rm(v_G)_2 + I_G\omega_2$$

$$(0.2\ \text{m} - 0.03\ \text{m})(10\ \text{kg})(v_G)_1 + (0.156\ \text{kg} \cdot \text{m}^2)(\omega_1) = (0.2\ \text{m})(10\ \text{kg})(v_G)_2 + (0.156\ \text{kg} \cdot \text{m}^2)(\omega_2)$$

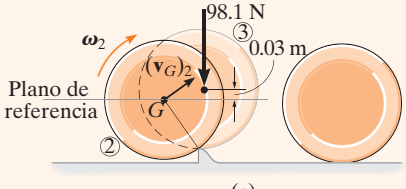
Cinemática. Como no hay deslizamiento, en general $\omega = v_G/r = v_G/0.2\ \text{m} = 5v_G$. Al sustituir esta expresión en la ecuación anterior y simplificar, obtenemos.

$$(v_G)_2 = 0.8921(v_G)_1 \qquad (1)$$

Conservación de la energía*. Para que ruede sobre la obstrucción, la rueda debe pasar a la posición 3 que se muestra en la figura 19-9*c*. Por consiguiente, si $(v_G)_2$ [o $(v_G)_1$] tiene que ser mínima, es necesario que la energía cinética de la rueda en la posición 2 sea igual a la energía potencial en la posición 3. Si colocamos el plano de referencia a través del centro de gravedad, como se muestra en la figura, y aplicamos la ecuación de la conservación de la energía, tenemos

$$\{T_2\} + \{V_2\} = \{T_3\} + \{V_3\}$$

$$\{\tfrac{1}{2}(10\ \text{kg})(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}(0.156\ \text{kg} \cdot \text{m}^2)\omega_2^2\} + \{0\} = \{0\} + \{(98.1\ \text{N})(0.03\ \text{m})\}$$



(c)

Fig. 19-9

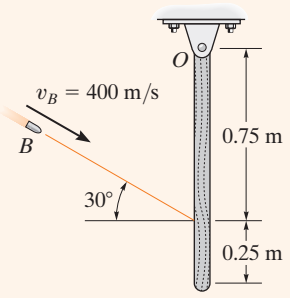
Al sustituir $\omega_2 = 5(v_G)_2$ y la ecuación 1 en esta ecuación y resolver,

$$(v_G)_1 = 0.729\ \text{m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

*Este principio *no es aplicable durante el impacto*, puesto que se pierde energía durante la colisión. Sin embargo, justo después del impacto, como en la figura 19-9*c*, sí puede utilizarse.

EJEMPLO 19.7

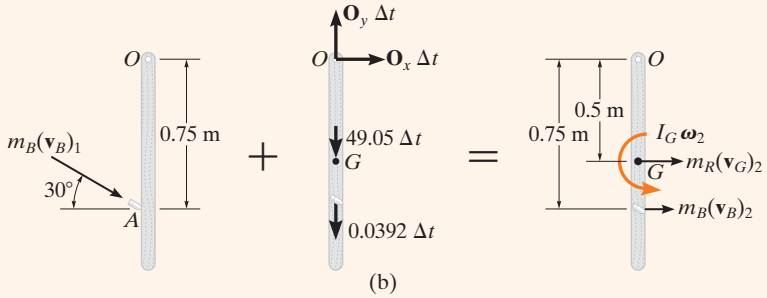
La varilla delgada de 5 kg que se muestra en la figura 19-10*a* está sujeta por medio de un pasador en O e inicialmente está en reposo. Si se dispara una bala de 4 g hacia la varilla con una velocidad de 400 m/s, como se muestra en la figura, determine la velocidad angular de la varilla justo después de que la bala se incrusta en ella.



(a)

SOLUCIÓN

Diagramas de impulso y cantidad de movimiento. El impulso que la bala ejerce en la varilla puede eliminarse del análisis, en tanto que la velocidad angular de la varilla justo después del impacto se determina considerando la bala y la varilla como un solo sistema. Para aclarar los principios implicados, los diagramas de impulso y cantidad de movimiento se ilustran en la figura 19-10*b*. Los diagramas de cantidad de movimiento se trazan *justo antes y justo después del impacto*. Durante el impacto, la bala y la varilla ejercen *impulsos internos iguales pero opuestos* en A. Como se indica en el diagrama de impulso, los impulsos que son externos al sistema se deben a las reacciones en O y a los pesos de la bala y la varilla. Como el tiempo del impacto, Δt, es muy corto, la varilla se mueve sólo una pequeña cantidad y, por lo tanto, los "momentos" de los impulsos creados por el peso con respecto al punto O en esencia son cero. Entonces, se conserva la cantidad de movimiento angular con respecto a este punto.



(b)

Conservación de la cantidad de movimiento angular. Según la figura 19-10*b*, tenemos

$$(\circlearrowright +) \qquad \Sigma(H_O)_1 = \Sigma(H_O)_2$$

$$m_B(v_B)_1 \cos 30°(0.75\text{ m}) = m_B(v_B)_2(0.75\text{ m}) + m_R(v_G)_2(0.5\text{ m}) + I_G\omega_2$$

$$(0.004\text{ kg})(400 \cos 30°\text{ m/s})(0.75\text{ m}) =$$

$$(0.004\text{ kg})(v_B)_2(0.75\text{ m}) + (5\text{ kg})(v_G)_2(0.5\text{ m}) + \left[\tfrac{1}{12}(5\text{ kg})(1\text{ m})^2\right]\omega_2 \quad (1)$$

o bien,

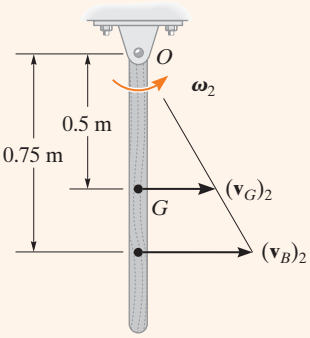
$$1.039 = 0.003(v_B)_2 + 2.50(v_G)_2 + 0.4167\omega_2$$

Cinemática. Como la varilla está sujeta por medio de un pasador en O, de acuerdo con la figura 19-10*c*, tenemos

$$(v_G)_2 = (0.5\text{ m})\omega_2 \quad (v_B)_2 = (0.75\text{ m})\omega_2$$

Si sustituimos en la ecuación 1 y resolvemos,

$$\omega_2 = 0.623\text{ rad/s}\circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

Fig. 19-10

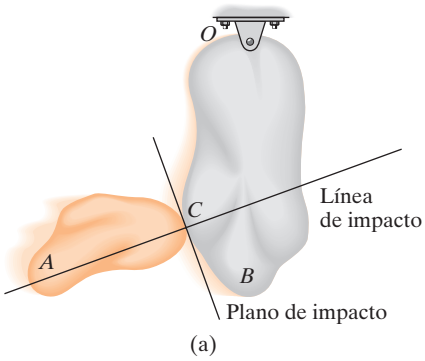


Fig. 19-11

*19.4 Impacto excéntrico

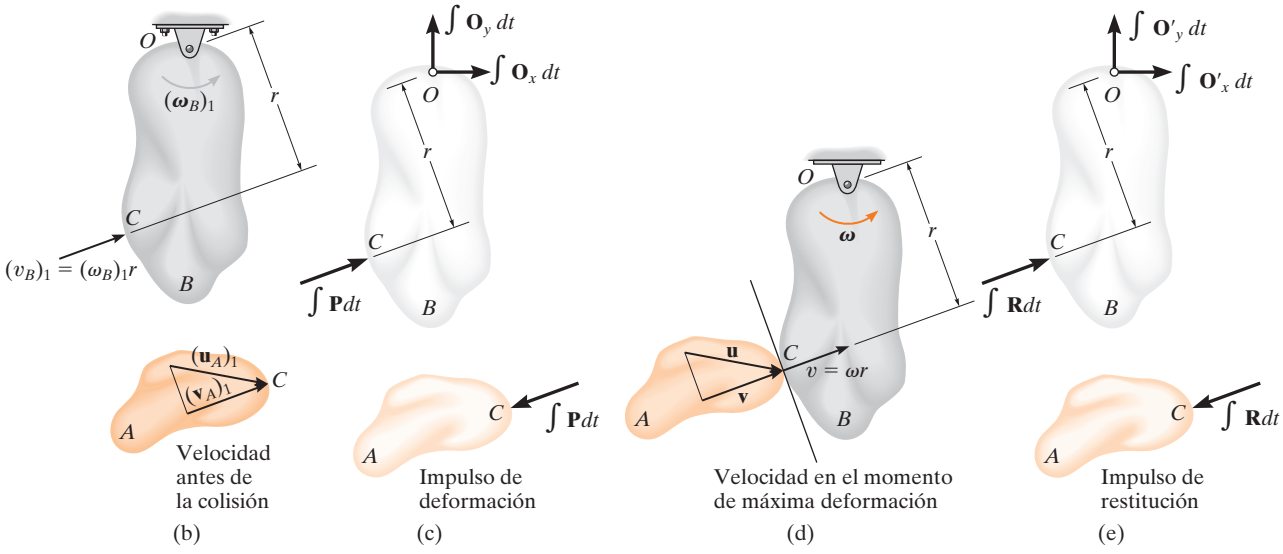
Los conceptos que implican el impacto central y oblicuo de partículas se presentaron en la sección 15.4. Ahora ampliaremos este tratamiento y analizaremos el impacto excéntrico de dos cuerpos. El *impacto excéntrico* ocurre cuando la línea que conecta los *centros de masa* de los dos cuerpos *no* coincide con la línea de impacto*. Este tipo de impacto suele ocurrir cuando uno o los dos cuerpos está(n) limitados a girar alrededor de un eje fijo. Considere, por ejemplo, la colisión en C entre los cuerpos A y B, que se muestra en la figura 19-11*a*. Se supone que justo antes de la colisión B gira en sentido antihorario a una velocidad angular $(\boldsymbol{\omega}_B)_1$ y que la velocidad del punto de contacto C localizado en A es $(\mathbf{u}_A)_1$. Los diagramas cinemáticos de ambos cuerpos justo antes de la colisión se muestran en la figura 19-11*b*. Siempre que los cuerpos sean uniformes, las *fuerzas impulsoras* que ejercen entre sí *están dirigidas a lo largo de la línea de impacto*. Por consiguiente, la componente de velocidad del punto C en el cuerpo B, el cual está dirigido a lo largo de la línea de impacto, es $(v_B)_1 = (\omega_B)_1 r$ (fig. 19-11*b*). Asimismo, en el cuerpo A la componente de la velocidad $(\mathbf{u}_A)_1$ a lo largo de la línea de impacto es $(\mathbf{v}_A)_1$. Para que la colisión ocurra $(v_A)_1 > (v_B)_1$.

Durante el impacto se ejerce una fuerza impulsora igual pero opuesta $\mathbf{P}$ entre los cuerpos, la cual los *deforma* en el punto de contacto. El impulso resultante se muestra en los diagramas de impulso de ambos cuerpos (fig. 19-11*c*). Observe que la fuerza impulsora en el punto C del cuerpo que gira crea reacciones impulsoras en el pasador en O. En estos diagramas se supone que el impacto crea fuerzas que son mucho más grandes que los pesos no impulsores de los cuerpos, los cuales no se muestran. Cuando la deformación en el punto C es máxima, en ambos cuerpos C se mueve con una velocidad común $\mathbf{v}$ a lo largo de la línea de impacto (fig. 19-11*d*). Ocurre entonces un periodo de *restitución*, durante el cual los cuerpos tienden a recuperar sus formas originales. La fase de restitución crea una fuerza impulsora igual pero opuesta $\mathbf{R}$ que actúa entre los cuerpos como se muestra en el diagrama de impulso (fig. 19-11*e*). Después de la restitución, los cuerpos se apartan, de modo que el punto C en el cuerpo B tiene una velocidad $(\mathbf{v}_B)_2$ y el punto C en el cuerpo A tiene una velocidad $(\mathbf{u}_A)_2$ (fig. 19-11*f*), donde $(v_B)_2 > (v_A)_2$.

En general, un problema que implica el impacto de dos cuerpos requiere determinar las *dos incógnitas* $(v_A)_2$ y $(v_B)_2$; suponemos que se conocen $(v_A)_1$ y $(v_B)_1$ (o que pueden determinarse con cinemática, métodos de energía, ecuaciones de movimiento, etcétera). Para resolver problemas como ésos deben escribirse dos ecuaciones. Por lo general, la *primera ecuación* implica la aplicación de la *conservación de la cantidad de movimiento angular a los dos cuerpos*. En el caso de los dos cuerpos A y B, podemos formular que la cantidad de movimiento angular se conserva con respecto al punto O, ya que los impulsos en C son internos al sistema y los impulsos en O crean un momento cero (o impulso angular cero) con respecto a O. La *segunda ecuación* se obtiene por la definición del *coeficiente de restitución*, e, el cual es la relación entre el impulso de restitución y el impulso de deformación.

Aquí se observa un ejemplo de impacto excéntrico que ocurre entre esta bola de bolos y el pino. (© R. C. Hibbeler)

*Cuando estas líneas coinciden, ocurre el impacto central y el problema puede analizarse como se hizo en la sección 15-4.



Sin embargo, es importante tener en cuenta que *este análisis tiene sólo una aplicación muy limitada en ingeniería, porque se encontró que los valores de e en este caso son muy sensibles al material, la geometría y la velocidad de cada uno de los cuerpos que chocan*. Para establecer una forma útil de la ecuación del coeficiente de restitución, primero debemos aplicar el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares con respecto al punto O a los cuerpos B y A por separado. Al combinar los resultados, obtenemos entonces la ecuación necesaria. Procediendo de esta manera, el principio de impulso y cantidad de movimiento aplicado al cuerpo B desde el instante justo antes de la colisión hasta el instante de máxima deformación, figuras 19-11*b*, 19-11*c* y 19-11*d*, se vuelve

$$(\circlearrowright +) \qquad I_O(\omega_B)_1 + r\int P\,dt = I_O\omega \qquad (19\text{-}18)$$

Donde I_O es el momento de inercia del cuerpo B con respecto al punto O. Asimismo, al aplicar el principio de impulso y cantidad de movimiento angulares desde el instante de máxima deformación hasta el instante justo después del impacto, figuras 19-11*d*, 19-11*e* y 19-11*f*, obtenemos

$$(\circlearrowright +) \qquad I_O\omega + r\int R\,dt = I_O(\omega_B)_2 \qquad (19\text{-}19)$$

Si resolvemos las ecuaciones 19-18 y 19-19 para $\int P\,dt$ y $\int R\,dt$, respectivamente, y formulamos e, tenemos

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} = \frac{r(\omega_B)_2 - r\omega}{r\omega - r(\omega_B)_1} = \frac{(v_B)_2 - v}{v - (v_B)_1}$$

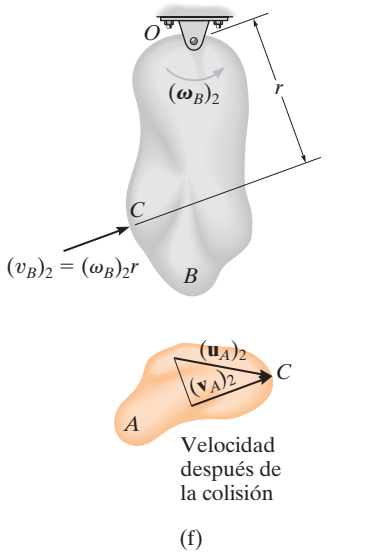


Fig. 19-11 (cont.)

Del mismo modo, podemos escribir una ecuación que relaciona las magnitudes de las velocidades $(v_A)_1$ y $(v_A)_2$ del cuerpo A. El resultado es

$$e = \frac{v - (v_A)_2}{(v_A)_1 - v}$$

Al combinar las dos ecuaciones anteriores y eliminar la velocidad común v se obtiene el resultado deseado, es decir,

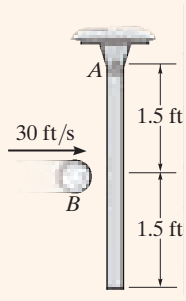
$$(+\nearrow) \qquad \boxed{e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}} \qquad (19\text{-}20)$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación 15-11, la cual se derivó para el impacto central entre dos partículas. Establece que el coeficiente de restitución es igual a la relación entre la velocidad relativa de *separación* de los puntos de contacto (C), *justo después del impacto,* y la velocidad relativa a la cual los puntos *se aproximan* entre sí, *justo* antes del impacto. Al derivar esta ecuación, supusimos que los puntos de contacto de ambos cuerpos se movieron hacia arriba y a la derecha *tanto antes como después* del impacto. Si el movimiento de cualquiera de los puntos en contacto ocurre hacia abajo y a la izquierda, la velocidad de este punto deberá considerarse como una cantidad negativa en la ecuación 19-20.

Muchas columnas de señales de carretera se diseñan para que se rompan durante un impacto en sus apoyos y se colapsen con facilidad en sus articulaciones. Esto se muestra por medio de las conexiones ranuradas en su base y las roturas a la mitad de la columna. (© R. C. Hibbeler)

EJEMPLO 19.8

La varilla delgada de 10 lb está colgada del pasador en A (fig. 19-12*a*). Si se lanza una bola B de 2 lb contra la varilla y choca con su centro a una velocidad de 30 ft/s, determine la velocidad angular de la varilla justo después del impacto. El coeficiente de restitución es $e = 0.4$.



(a)

SOLUCIÓN

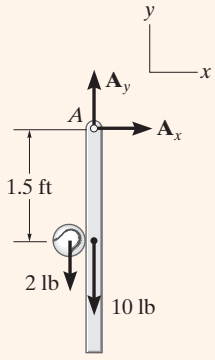
Conservación de la cantidad de movimiento angular. Considere la bola y la varilla como un sistema (fig. 19-12*b*). La cantidad de movimiento angular se conserva con respecto al punto A, ya que la fuerza impulsora entre la varilla y la bola es *interna*. Asimismo, los *pesos* de la bola y la varilla son *no impulsores*. Si observamos las direcciones de las velocidades de la bola y la varilla justo después del impacto, como se indica en el diagrama cinemático (fig. 19-12*c*), requerimos

$$(\curvearrowleft +) \qquad (H_A)_1 = (H_A)_2$$

$$m_B(v_B)_1(1.5\text{ ft}) = m_B(v_B)_2(1.5\text{ ft}) + m_R(v_G)_2(1.5\text{ ft}) + I_G\omega_2$$

$$\left(\frac{2\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(30\text{ ft/s})(1.5\text{ ft}) = \left(\frac{2\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(v_B)_2(1.5\text{ ft}) +$$

$$\left(\frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(v_G)_2(1.5\text{ ft}) + \left[\frac{1}{12}\left(\frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(3\text{ ft})^2\right]\omega_2$$



(b)

Como $(v_G)_2 = 1.5\omega_2$ entonces

$$2.795 = 0.09317(v_B)_2 + 0.9317\omega_2 \qquad (1)$$

Coeficiente de restitución. Con referencia a la figura 19-12*c*, tenemos

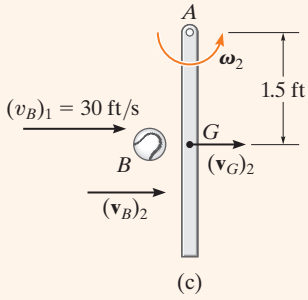
$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad e = \frac{(v_G)_2 - (v_B)_2}{(v_B)_1 - (v_G)_1} \qquad 0.4 = \frac{(1.5\text{ ft})\omega_2 - (v_B)_2}{30\text{ ft/s} - 0}$$

$$12.0 = 1.5\omega_2 - (v_B)_2 \qquad (2)$$

Al resolver las ecuaciones 1 y 2,

$$(v_B)_2 = -6.52\text{ ft/s} = 6.52\text{ ft/s} \leftarrow$$

$$\omega_2 = 3.65\text{ rad/s}\curvearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

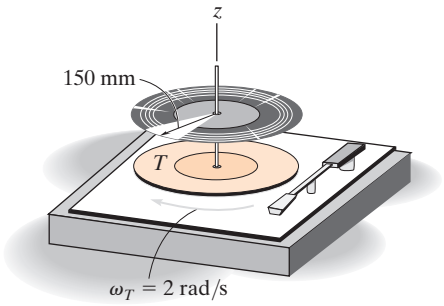


(c)

Fig. 19-12

PROBLEMAS

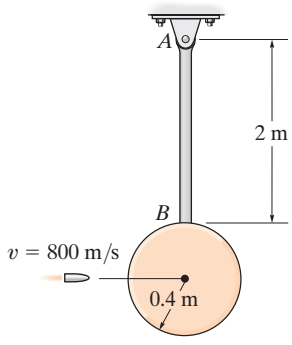
19-29. El tornamesa T de un tocadiscos tiene una masa de 0.75 kg y un radio de giro $k_z = 125$ mm. *Gira libremente* a $\omega_T = 2$ rad/s cuando el disco delgado de 50 g cae sobre él. Determine la velocidad angular final del tornamesa justo después de que el disco deja de deslizarse sobre él.



Prob. 19-29

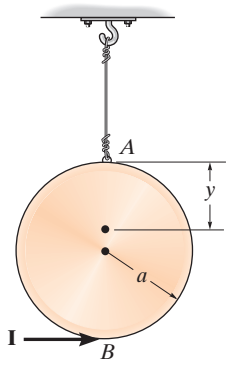
19-30. La bala de 10 g, que tiene una velocidad de 800 m/s, se dispara en el borde del disco de 5 kg, como se muestra en la figura. Determine la velocidad angular del disco justo después de que la bala se incrusta en su borde. Además, calcule el ángulo θ al que se moverá el disco cuando se detenga. El disco está originalmente en reposo. Desprecie la masa de la varilla AB.

19-31. La bala de 10 g, que tiene una velocidad de 800 m/s, se dispara en el borde del disco de 5 kg, como se indica en la figura. Determine la velocidad angular del disco, justo después de que la bala se incrusta en su borde. Asimismo, calcule el ángulo θ al que se moverá el disco cuando se detenga. El disco está originalmente en reposo. La varilla AB tiene una masa de 3 kg.



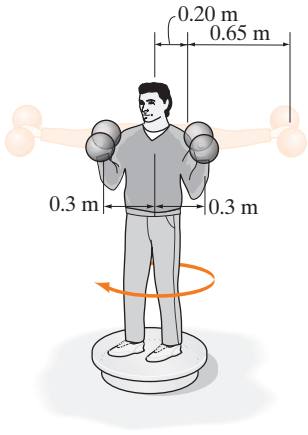
Probs. 19-30/31

***19-32.** El disco circular tiene una masa m, y se suspende en A por medio del alambre. Si recibe un impulso horizontal $\mathbf{I}$ en su borde B, determine la ubicación y del punto P respecto al cual parece rotar el disco durante el impacto.



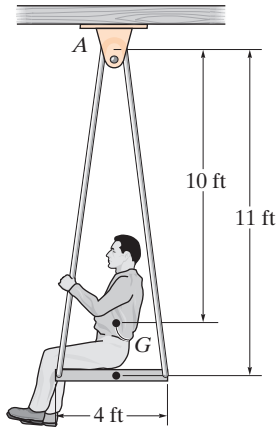
Prob. 19-32

19-33. El hombre de 80 kg sostiene dos mancuernas mientras está de pie sobre una plataforma giratoria de masa despreciable, que gira libremente alrededor de un eje vertical. Cuando los brazos están completamente extendidos, la plataforma rotatoria gira con una velocidad angular de 0.5 rev/s. Determine la velocidad angular del hombre cuando retrae los brazos a la posición mostrada. Cuando los brazos están completamente extendidos, aproxime cada brazo como una varilla uniforme de 6 kg con una longitud de 650 mm, y su cuerpo como un cilindro sólido de 68 kg con 400 mm de diámetro. Cuando los brazos están en la posición retraída, suponga que el hombre es un cilindro macizo de 80 kg con 450 mm de diámetro. Cada mancuerna consiste en dos esferas de 5 kg y tamaño insignificante.



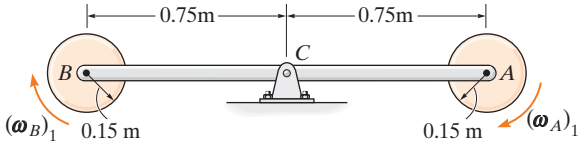
Prob. 19-33

19-34. El columpio de plataforma consta de una placa plana de 200 lb suspendida mediante cuatro varillas de peso despreciable. Con el columpio en reposo, el hombre de 150 lb salta de la plataforma, cuando su centro de gravedad G está a 10 ft del pasador en A. Hace esto con una velocidad horizontal de 5 ft/s, medida en relación con el columpio al nivel de G. Determine la velocidad angular que imparte al columpio justo después de saltar.



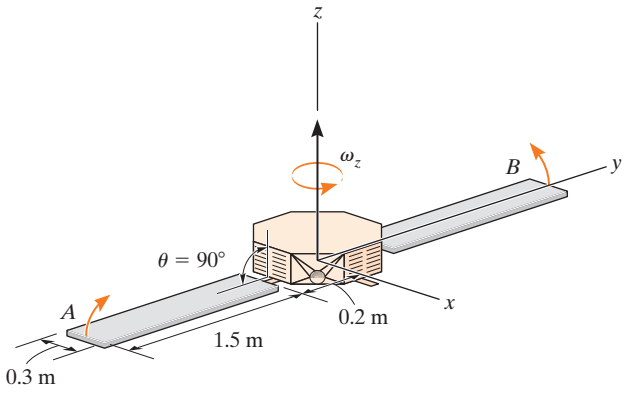
Prob. 19-34

19-35. La varilla ACB de 2 kg sostiene los dos discos de 4 kg en sus extremos. Si ambos discos reciben una velocidad angular en sentido horario $(w_A)_1 = (w_B)_1 = 5$ rad/s mientras que la varilla se mantiene fija y luego se libera, determine la velocidad angular de la varilla después de que ambos discos han dejado de girar en relación con la varilla debido a la resistencia de fricción en los pasadores A y B. El movimiento se da en el *plano horizontal*. Desprecie la fricción en el pasador C.



Prob. 19-35

***19-36.** El satélite tiene una masa de 200 kg y un radio de giro alrededor del eje z de $k_z = 0.1$ m, excluyendo los dos paneles solares A y B. Cada panel solar tiene una masa de 15 kg y se puede aproximar como una placa delgada. Si el satélite gira originalmente alrededor del eje z a razón constante de $\omega_z = 0.5$ rad/s cuando $\theta = 90°$, determine la velocidad de giro, si los dos paneles se levantan y alcanzan la posición elevada, $\theta = 0°$, en el mismo instante.



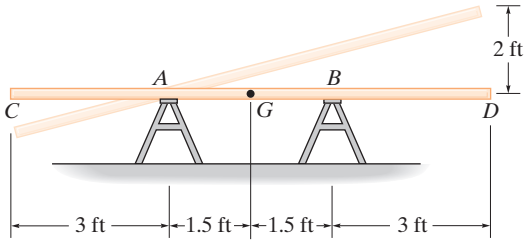
Prob. 19-36

19-37. El disco A tiene un peso de 20 lb. Un cable inextensible está unido al peso de 10 lb y enrollado alrededor del disco. El peso se deja caer 2 ft antes de que la cuerda se tense. Si el impacto es perfectamente elástico, es decir, $e = 1$, determine la velocidad angular del disco justo después del impacto.

Prob. 19-37

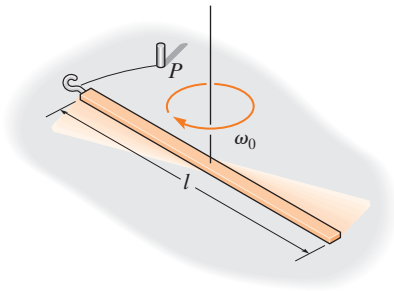
19

19-38. La plancha tiene un peso de 30 lb, centro de gravedad en G, y está apoyada en dos caballetes en A y B. Si el extremo D se eleva 2 ft por encima de la parte superior de los caballetes y se libera del reposo, determine a qué altura por encima de la parte superior de los caballetes llegará el extremo C después de que la plancha cae y gira en sentido horario alrededor de A, golpea y pivotea sobre el caballete en B, y gira en sentido horario separándose del caballete en A.



Prob. 19-38

***19-40.** Una varilla delgada de masa m tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_0$ mientras gira sobre una superficie lisa. Determine su nueva velocidad angular justo después de que su extremo golpea y se engancha a la clavija y la varilla comienza a girar alrededor de P sin rebotar. Resuelva el problema (a) utilizando los parámetros dados, y (b) considerando que $m = 2$ kg, $\omega_0 = 4$ rad/s, $l = 1.5$ m.

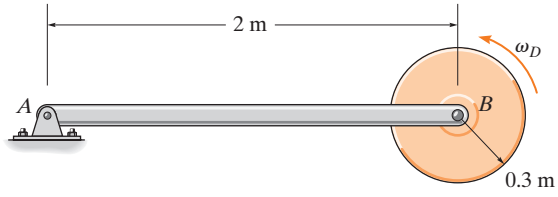


Prob. 19-40

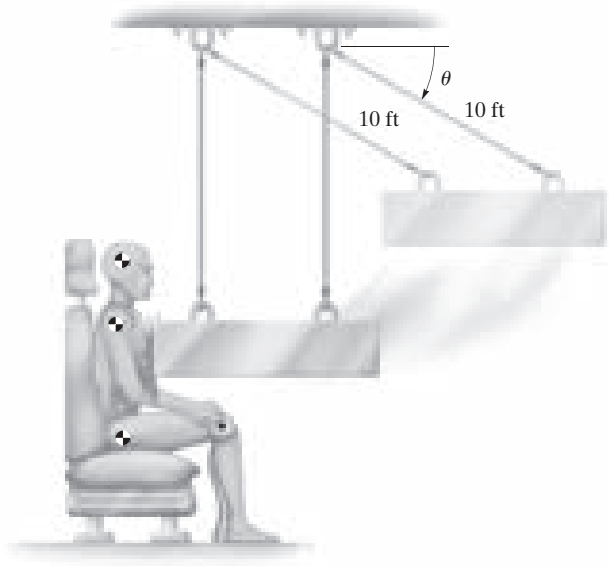
19-41. Las pruebas de impacto sobre maniquíes fijos utilizan un ariete de 300 lb, el cual se libera desde el reposo en $\theta = 30°$ y se deja caer para golpear el maniquí en $\theta = 90°$. Si el coeficiente de restitución entre el maniquí y el ariete es $e = 0.4$, determine el ángulo θ al que el ariete rebotará antes de llegar momentáneamente al reposo.

19

19-39. La varilla AB de 12 kg está fija mediante un pasador al disco de 40 kg. Si el disco recibe una velocidad angular $\omega_D = 100$ rad/s mientras que la varilla se mantiene estacionaria, y después se libera el ensamble, determine la velocidad angular de la varilla después de que el disco ha dejado de girar con respecto a la varilla, debido a la resistencia de fricción en el cojinete B. El movimiento se da en el *plano horizontal*. Desprecie la fricción en el pasador A.

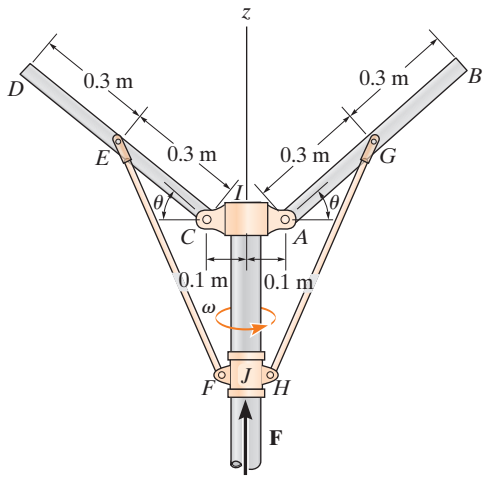


Prob. 19-39



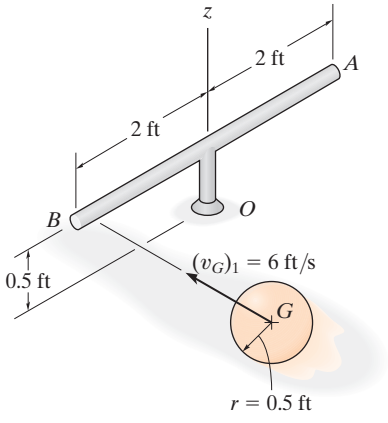
Prob. 19-41

19-42. El eje vertical gira con una velocidad angular de 3 rad/s cuando $\theta = 0°$. Si se aplica una fuerza **F** al collarín, de modo que $\theta = 90°$, determine la velocidad angular del eje. Además, encuentre el trabajo realizado por la fuerza **F**. Desprecie la masa de las varillas *GH* y *EF* y de los collarines *I* y *J*. Cada una de las varillas *AB* y *CD* tiene una masa de 10 kg.



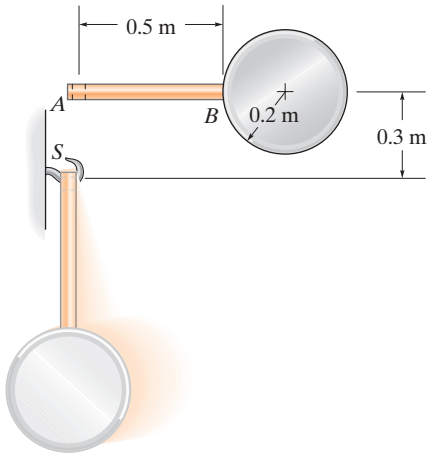
Prob. 19-42

19-43. El centro de masa de la bola de 3 lb tiene una velocidad de $(v_G)_1 = 6$ ft/s cuando golpea el extremo de la barra delgada lisa de 5 lb que está en reposo. Determine la velocidad angular de la barra con respecto al eje *z* justo después del impacto si $e = 0.8$.



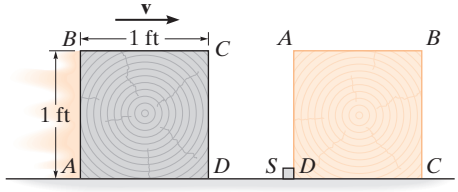
Prob. 19-43

***19-44.** El péndulo consiste en una varilla delgada *AB* de 2 kg y un disco de 5 kg. Se libera desde el reposo sin girar. Cuando cae 0.3 m, el extremo *A* golpea el gancho *S*, que proporciona una conexión permanente. Determine la velocidad angular del péndulo después de que ha girado 90°. Trate al peso del péndulo durante el impacto como una fuerza no impulsora.



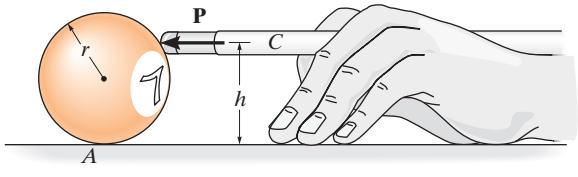
Prob. 19-44

19-45. El bloque de 10 lb se desliza sobre la superficie lisa cuando la esquina *D* golpea un tope *S*. Determine la velocidad mínima **v** que debe tener el bloque para que se vuelque y caiga en la posición indicada. Desprecie el tamaño de *S*. *Sugerencia:* Durante el impacto, considere que el peso del bloque es no impulsor.



Prob. 19-45

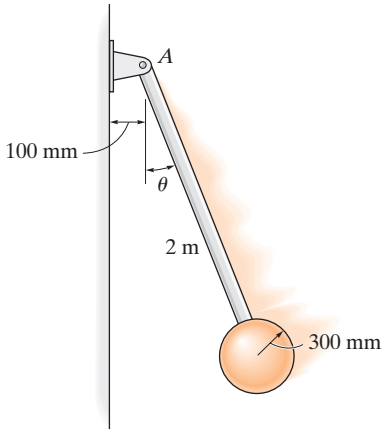
19-46. Determine la altura *h* a la que debe golpearse una bola de billar de masa *m*, para que no se desarrolle ninguna fuerza de fricción entre la bola y la mesa en *A*. Suponga que el palo *C* sólo ejerce una fuerza horizontal **P** sobre la bola.



Prob. 19-46

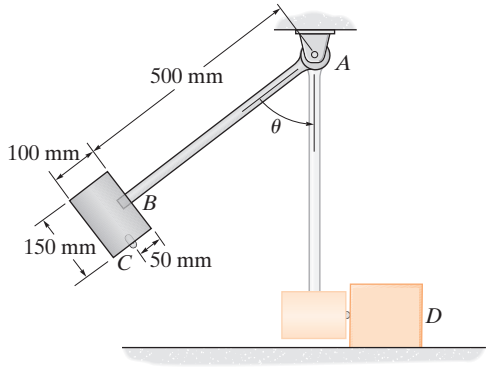
19

19-47. El péndulo consiste en una bola sólida de 15 kg y una varilla de 6 kg. Si se libera desde el reposo cuando $\theta_1 = 90°$, determine el ángulo θ_2 después de que la bola golpea la pared, rebota y el péndulo oscila hasta el punto de reposo momentáneo. Considere que $e = 0.6$.



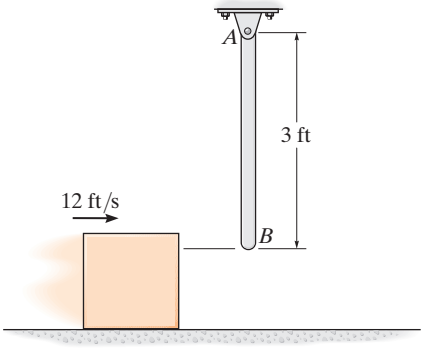
Prob. 19-47

19-49. El martillo se compone de un cilindro sólido C de 10 kg y una varilla delgada uniforme AB de 6 kg. Si el martillo se suelta desde el reposo cuando $\theta = 90°$ y golpea el bloque D de 30 kg cuando $\theta = 0°$, determine la velocidad del bloque D y la velocidad angular del martillo inmediatamente después del impacto. El coeficiente de restitución entre el martillo y el bloque es $e = 0.6$.



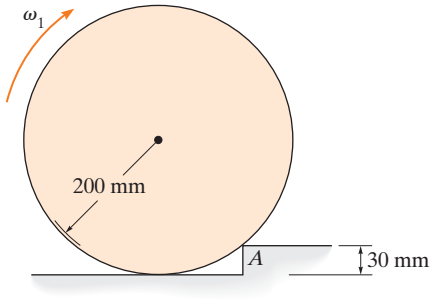
Prob. 19-49

***19-48.** La varilla AB de 4 lb cuelga en posición vertical. Un bloque de 2 lb se desliza sobre una superficie horizontal lisa con una velocidad de 12 ft/s y golpea la varilla en su extremo B. Determine la velocidad del bloque inmediatamente después de la colisión. El coeficiente de restitución entre el bloque y la varilla en B es $e = 0.8$.



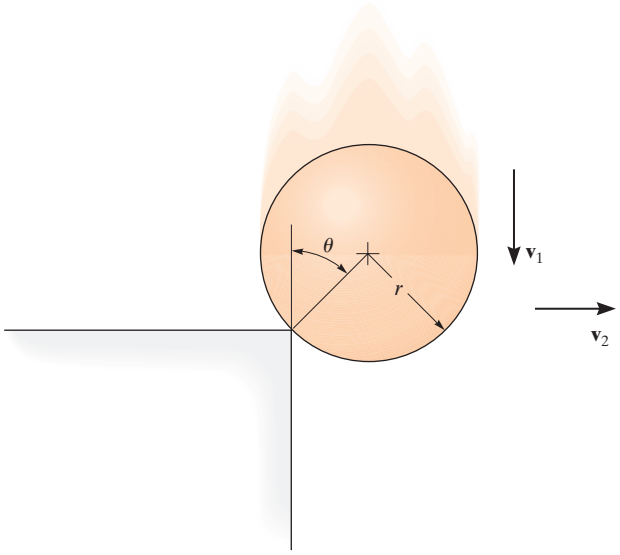
Prob. 19-48

19-50. El disco de 20 kg golpea el escalón sin rebotar. Determine la mayor velocidad angular ω_1 que puede tener el disco sin perder contacto con el escalón, A.



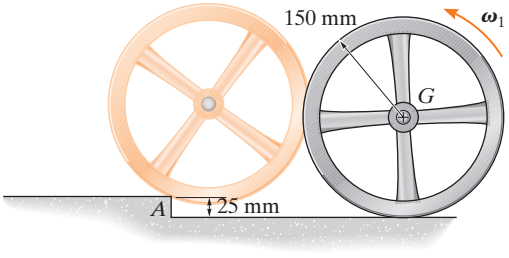
Prob. 19-50

19-51. La bola sólida de masa m se deja caer con una velocidad $\mathbf{v}_1$ sobre el borde del escalón rugoso. Si rebota horizontalmente en el escalón con una velocidad $\mathbf{v}_2$, determine el ángulo θ al que se produce el contacto. Suponga que no hay deslizamiento cuando la bola golpea el escalón. El coeficiente de restitución es e.



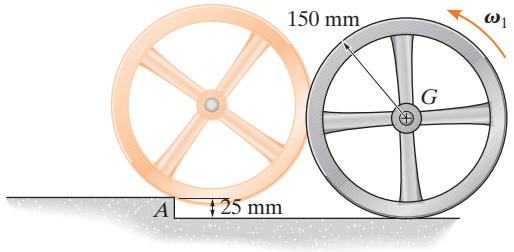
Prob. 19-51

***19-52.** La rueda tiene una masa de 50 kg y un radio de giro de 125 mm con respecto a su centro de masa G. Determine el valor mínimo de la velocidad angular ω_1 de la rueda, de modo que golpee el escalón en A sin rebotar y, después, rueda sobre él sin deslizarse.



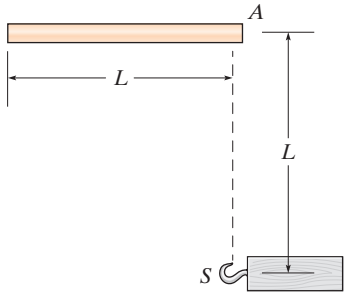
Prob. 19-52

19-53. La rueda tiene una masa de 50 kg y un radio de giro de 125 mm con respecto a su centro de masa G. Si rueda sin deslizarse con una velocidad angular de $\boldsymbol{\omega}_1 = 5$ rad/s, antes de golpear el escalón A, determine su velocidad angular después de que rueda sobre el escalón. La rueda no pierde contacto con el escalón al golpearlo.



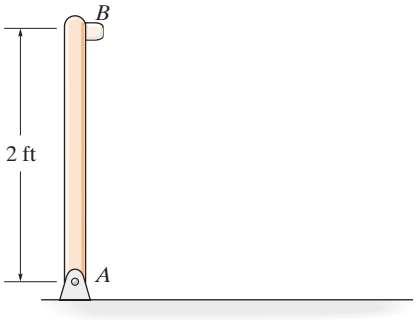
Prob. 19-53

19-54. La varilla de masa m y longitud L se libera desde el reposo sin girar. Cuando cae una distancia L, el extremo A golpea el gancho S, que le proporciona una conexión permanente. Determine la velocidad angular ω de la varilla después de que ha girado 90°. Trate al peso de la varilla durante el impacto como una fuerza no impulsora.



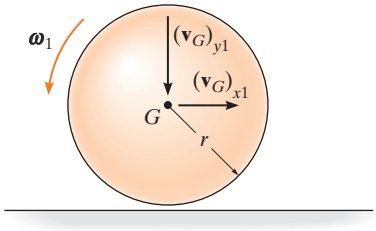
Prob. 19-54

19-55. La varilla AB de 15 lb se libera desde el reposo en la posición vertical. Si el coeficiente de restitución entre el piso y el cojín en B es $e = 0.7$, determine qué tan alto rebota el extremo de la varilla después de impactar con el piso.



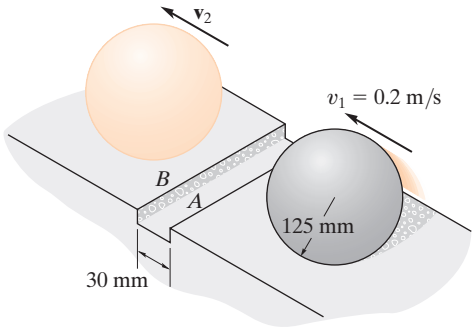
Prob. 19-55

19-57. Una bola sólida con masa m se lanza sobre el suelo, de manera que en el instante del contacto tiene un velocidad angular ω_1 y componentes de velocidad $(\mathbf{v}_G)_{x1}$ y $(\mathbf{v}_G)_{y1}$ como se muestra en la figura. Si el suelo es rugoso y no hay deslizamiento, determine las componentes de la velocidad de su centro de masa justo después del impacto. El coeficiente de restitución es e.



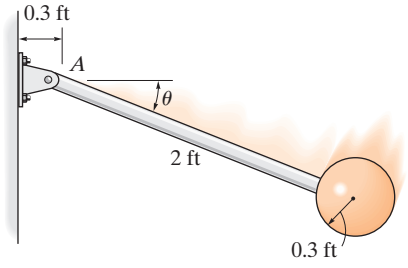
Prob. 19-57

***19-56.** Una bola que tiene una masa de 8 kg y rapidez inicial de $v_1 = 0.2$ m/s rueda sobre una depresión con 30 mm de longitud. Si se supone que la bola rueda sobre los bordes de contacto, primero A y luego B, sin deslizarse, determine su velocidad final $\mathbf{v}_2$ cuando llega al otro lado.



Prob. 19-56

19-58. El péndulo consiste en una bola sólida de 10 lb y una varilla de 4 lb. Si se libera desde el reposo cuando $\theta_0 = 0°$, determine el ángulo θ_1 de rebote después de que la pelota golpea la pared y el péndulo oscila hasta el punto de reposo momentáneo. Considere que $e = 0.6$.



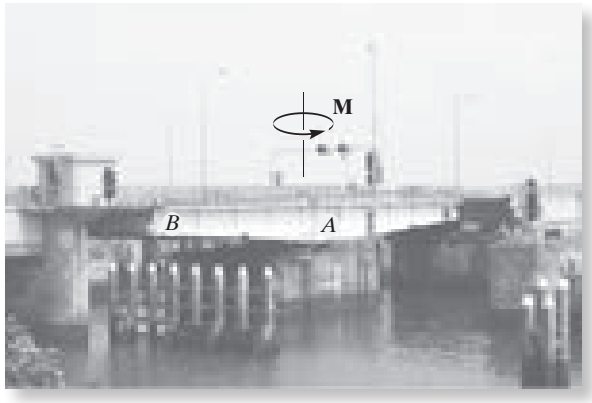
Prob. 19-58

PROBLEMAS CONCEPTUALES

C19.1. La aplanadora de tierra avanza a una velocidad constante al suministrar potencia a las ruedas traseras. Use datos numéricos apropiados para las ruedas, el rodillo y el cuerpo, y calcule la cantidad de movimiento angular de este sistema con respecto al punto A en el suelo, el punto B en el eje trasero y el punto G, el centro de gravedad del sistema.

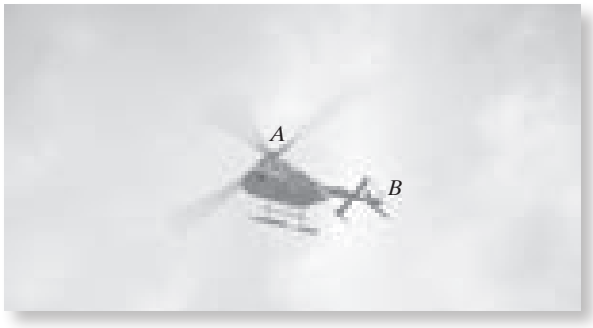
Prob. C19-1 (© R. C. Hibbeler)

C19-2. El puente levadizo se abre y cierra con un giro de 90° utilizando un motor localizado debajo del centro de la plataforma en A, que aplica un par de torsión **M** al puente. Si éste estuviera sostenido por su extremo B, ¿abriría con el mismo par el puente en el mismo tiempo, o abriría más lento o más rápido? Explique su respuesta con valores numéricos y un análisis del impulso y la cantidad de movimiento. Además, ¿cuáles son los beneficios de que el puente tenga un peralte variable como se muestra?



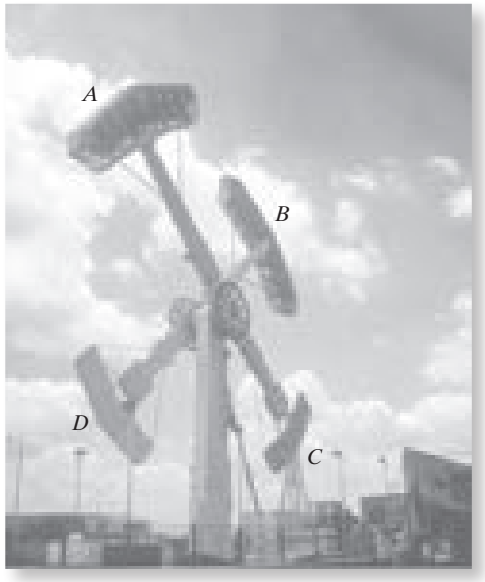
Prob. C19-2 (© R. C. Hibbeler)

C19-3. ¿Por qué es necesario que las aspas del rotor de cola B del helicóptero giren perpendiculares a las aspas del rotor principal A? Explique su respuesta con valores numéricos y un análisis del impulso y la cantidad de movimiento.



Prob. C19-3 (© R. C. Hibbeler)

C19-4. El juego mecánico de un parque de diversiones se compone de dos góndolas A y B y dos contrapesos C y D que oscilan en direcciones opuestas. Con dimensiones y masa realistas, calcule la cantidad de movimiento angular de este sistema en cualquier posición angular de las góndolas. Explique por medio de un análisis por qué es una buena idea diseñar este sistema con contrapesos con cada góndola.



Prob. C19-4 (© R. C. Hibbeler)

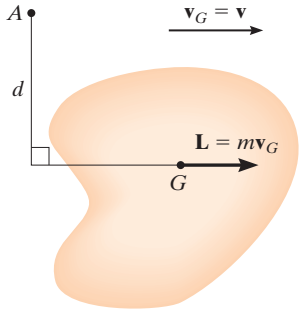
19

REPASO DEL CAPÍTULO

Cantidad de movimiento lineal y angular

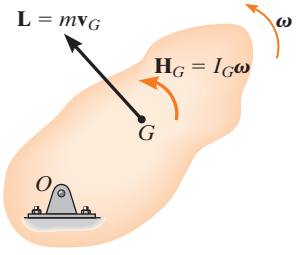
La cantidad de movimiento lineal y angular de un cuerpo rígido puede referirse a su centro de masa G.

Si se tiene que determinar la cantidad de movimiento angular con respecto a un eje diferente del que pasa por el centro de masa, entonces la cantidad de movimiento angular se determina por la suma del vector $\mathbf{H}_G$ y el momento del vector $\mathbf{L}$ con respecto a este eje.



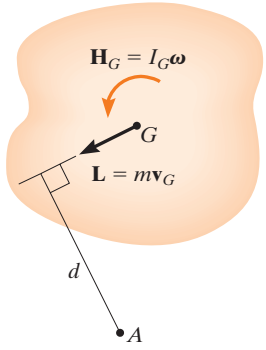
Traslación

$$L = mv_G$$
$$H_G = 0$$
$$H_A = (mv_G)d$$



Rotación con respecto a un eje fijo

$$L = mv_G$$
$$H_G = I_G\omega$$
$$H_O = I_O\omega$$



Movimiento plano general

$$L = mv_G$$
$$H_G = I_G\omega$$
$$H_A = I_G\omega + (mv_G)d$$

Principio de impulso y cantidad de movimiento

Los principios de impulso y cantidad de movimiento lineal y angular se utilizan para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo. Antes de aplicar estas ecuaciones, es importante establecer el sistema de coordenadas inercial x, y, z. También se deberá trazar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo con todas las fuerzas y momentos de par que producen impulsos en el cuerpo.

$$m(v_{Gx})_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt = m(v_{Gx})_2$$

$$m(v_{Gy})_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt = m(v_{Gy})_2$$

$$I_G\omega_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_G\, dt = I_G\omega_2$$

Conservación de la cantidad de movimiento

Siempre que la suma de los impulsos lineales que actúan en un sistema de cuerpos rígidos conectados sea cero en una dirección específica, entonces la cantidad de movimiento lineal del sistema se conserva en esta dirección. La conservación de la cantidad de movimiento angular ocurre si los impulsos pasan a través de un eje o son paralelos a él. También se conserva la cantidad de movimiento si las fuerzas externas son pequeñas y por ende crean fuerzas no impulsoras en el sistema. Un diagrama de cuerpo libre deberá acompañar cualquier aplicación para clasificar las fuerzas como impulsoras o no impulsoras, así como para determinar un eje con respecto al cual puede conservarse la cantidad de movimiento angular.

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento lineal}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_1 = \left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento lineal}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_2$$

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{O1} = \left(\sum \begin{matrix}\text{cantidad de}\\ \text{movimiento angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{O2}$$

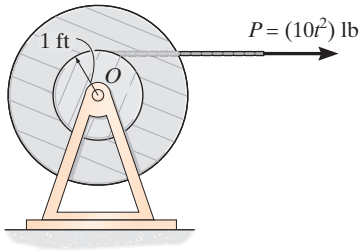
Impacto excéntrico

Si la línea de impacto no coincide con la línea que conecta los centros de masa de dos cuerpos que chocan, entonces ocurrirá un impacto excéntrico. Si se ha de determinar el movimiento de los cuerpos justo después del impacto, entonces es necesario considerar una ecuación de conservación de cantidad de movimiento para el sistema y utilizar la ecuación del coeficiente de restitución.

$$e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$$

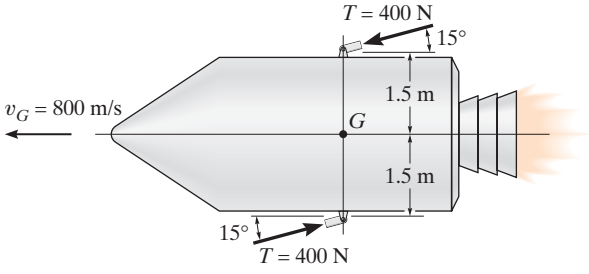
PROBLEMAS DE REPASO

R19-1. El cable está sometido a una fuerza de $P = (10t^2)$ lb, donde t se da en segundos. Determine la velocidad angular del carrete 3 s después de que se aplica **P**, partiendo del reposo. El carrete tiene un peso de 150 lb y un radio de giro de 1.25 ft con respecto a su centro, O.



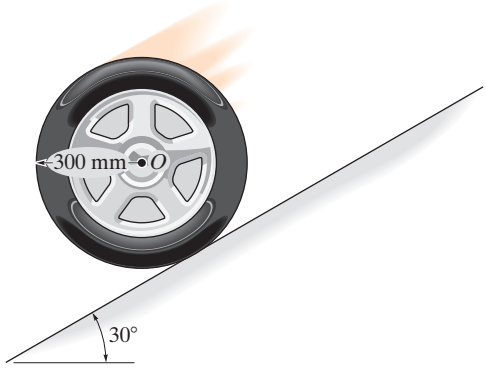
Prob. R19-1

R19-2. La cápsula espacial tiene una masa de 1200 kg y un momento de inercia $I_G = 900$ kg · m^2 con respecto a un eje que pasa a través de G y que tiene una dirección perpendicular a la página. Si viaja hacia adelante con una rapidez $v_G = 800$ m/s y realiza un giro por medio de dos propulsores a chorro, los cuales le proporcionan un empuje constante de 400 N durante 0.3 s, determine la velocidad angular de la cápsula justo después de que se apagan los propulsores.



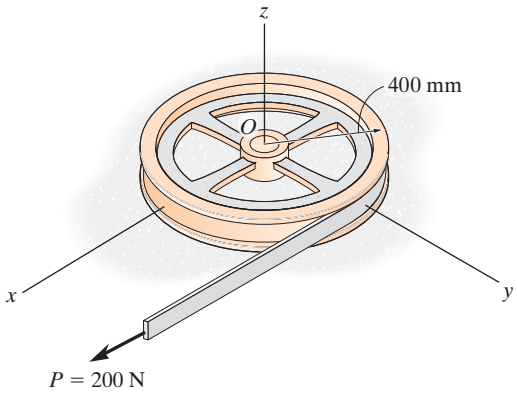
Prob. R19-2

R19-3. El neumático tiene una masa de 9 kg y un radio de giro $k_O = 225$ mm. Si se libera desde el reposo y rueda sobre el plano sin deslizarse, determine la rapidez de su centro O cuando $t = 3$ s.



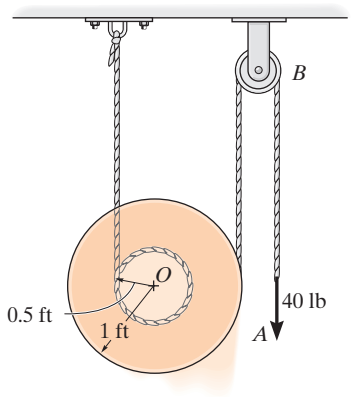
Prob. R19-3

R19-4. La rueda, que tiene una masa de 100 kg y un radio de giro alrededor del eje z de $k_z = 300$ mm, descansa sobre el plano horizontal liso. Si la banda se somete a una fuerza de $P = 200$ N, determine la velocidad angular de la rueda y la rapidez de su centro de masa O, tres segundos después de que se aplica la fuerza.



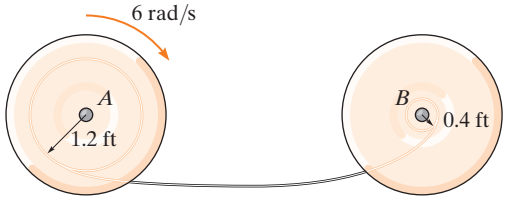
Prob. R19-4

R19-5. El carrete tiene un peso de 30 lb y un radio de giro $k_O = 0.65$ ft. Si se aplica una fuerza de 40 lb a la cuerda en A, determine la velocidad angular del carrete en $t = 3$ s, a partir del reposo. Desprecie la masa de la polea y la cuerda.



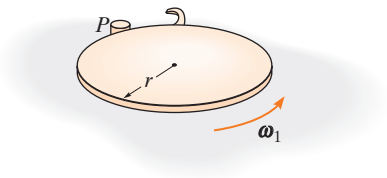
Prob. R19-5

R19-6. El carrete B está en reposo y el carrete A gira a 6 rad/s cuando se tensa la cuerda que los conecta. Si la cuerda no se estira, determine la velocidad angular de cada carrete inmediatamente después de que el cable se pone tenso. Los carretes A y B tienen pesos y radios de giro $W_A = 30$ lb, $k_A = 0.8$ ft, $W_B = 15$ lb, $k_B = 0.6$ ft, respectivamente.



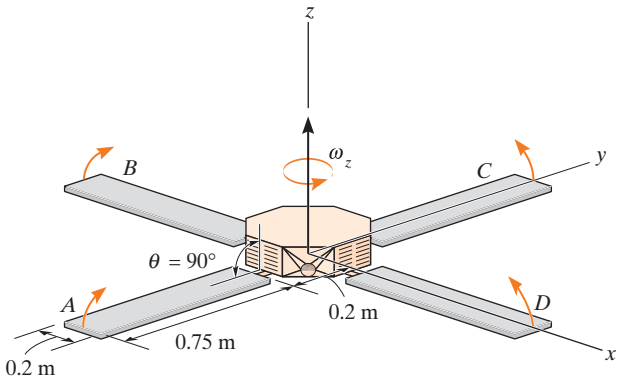
Prob. R19-6

R19-7. Un disco delgado de masa m tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$ mientras gira sobre una superficie lisa. Determine su nueva velocidad angular justo después de que el gancho en su borde golpea la clavija P y el disco comienza a girar alrededor de P sin rebotar.



Prob. R19-7

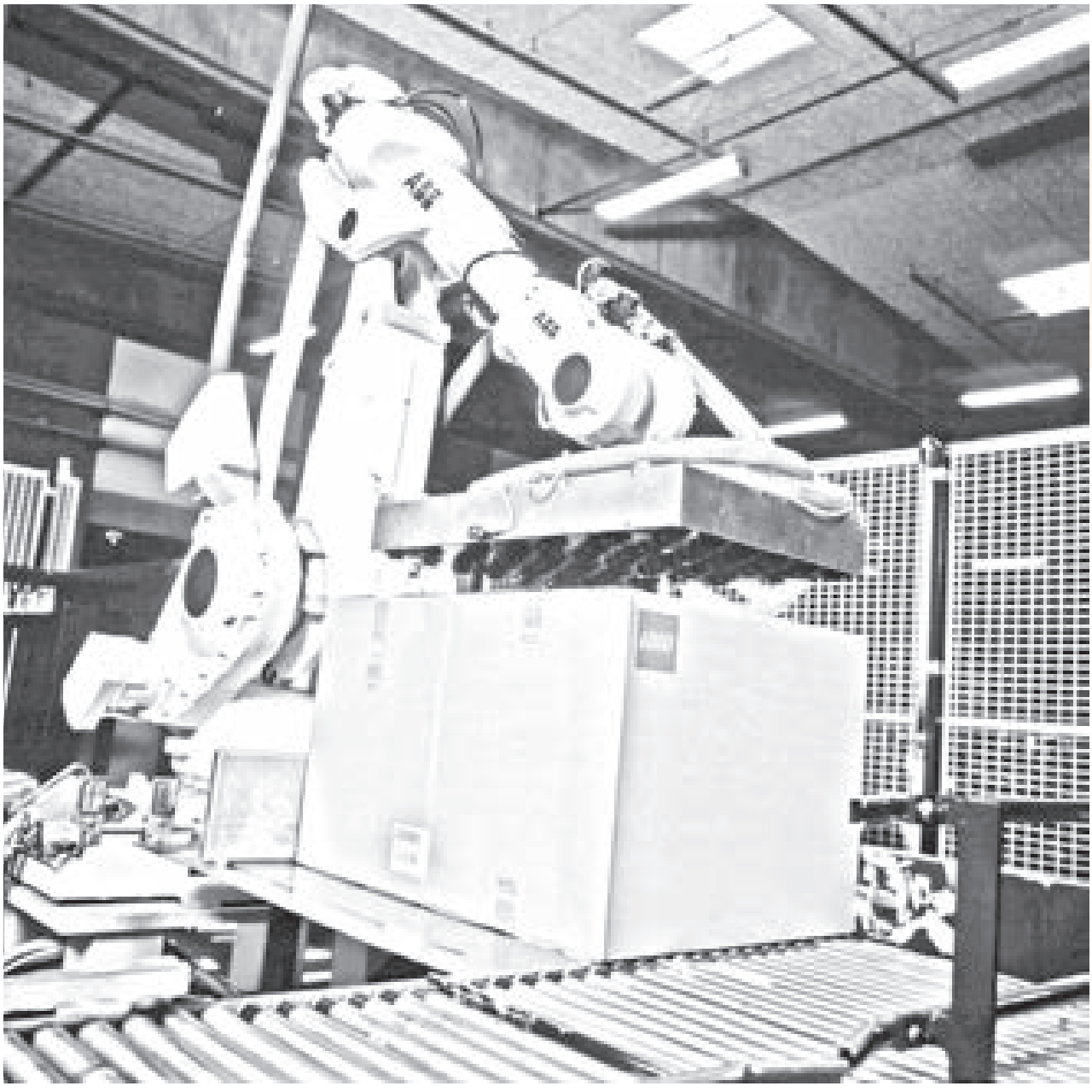
R19-8. El satélite espacial tiene una masa de 125 kg y un momento de inercia $I_z = 0.940\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$, excluyendo los cuatro paneles solares A, B, C y D. Cada panel solar tiene una masa de 20 kg y se puede aproximar como una placa delgada. Si el satélite gira originalmente con respecto al eje z a razón constante $\omega_z = 0.5$ rad/s cuando $\theta = 90°$, determine la velocidad de giro, si todos los paneles se levantan y llegan a la posición elevada $\theta = 0°$, en el mismo instante.



Prob. R19-8

19

Capítulo 20



(© Philippe Psaila/Science Source)

El diseño de robots industriales requiere el conocimiento de la cinemática acerca de sus movimientos tridimensionales.

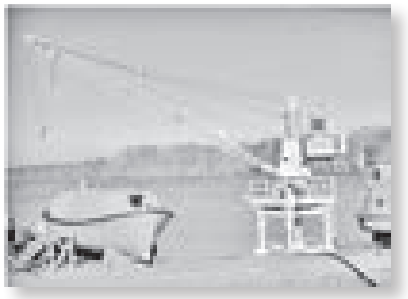
Cinemática tridimensional de un cuerpo rígido

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Analizar la cinemática de un cuerpo sometido a rotación alrededor de un punto fijo y a movimiento plano general.
- Analizar el movimiento relativo de un cuerpo rígido mediante ejes en traslación y en rotación.

20.1 Rotación alrededor de un punto fijo

Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un punto fijo, la distancia r del punto a una partícula localizada en el cuerpo es la *misma para cualquier posición* de éste. Por lo tanto, la trayectoria del movimiento de la partícula queda en la *superficie de una esfera* de radio r con su centro en el punto fijo. Como el movimiento a lo largo de esta trayectoria ocurre sólo con una serie de rotaciones realizadas durante un intervalo finito, primero nos familiarizaremos con algunas de las propiedades de los desplazamientos rotacionales.



La grúa tipo pluma puede girar hacia arriba y hacia abajo y, como está articulada en un punto del eje vertical alrededor del cual gira, se ve sometida a rotación alrededor de un punto fijo. (© R. C. Hibbeler)

Teorema de Euler. El teorema de Euler establece que dos rotaciones "parciales" alrededor de ejes diferentes que pasan por un punto equivalen a una sola rotación resultante, alrededor de un eje que pasa por el punto. Si se aplican más de dos rotaciones, pueden combinarse en pares y cada par reducirse aún más y combinarse en una rotación.

Rotaciones finitas. Si las rotaciones parciales utilizadas en el teorema de Euler son *finitas*, es importante mantener el orden en el cual se aplican. Para demostrarlo, considere las dos rotaciones finitas $\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2$ aplicadas al bloque en la figura 20-1*a*. Cada rotación tiene una magnitud de 90° y una dirección definida por la regla de la mano derecha, como se indica con la flecha. La posición final del bloque se muestra a la derecha. Cuando estas dos rotaciones se aplican en el orden $\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1$, como se indica en la figura 20-1*b*, la posición final del bloque *no* es la misma que la de la figura 20-1*a*. Como las *rotaciones finitas* no obedecen la ley conmutativa de la adición ($\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2 \neq \boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1$), *no pueden clasificarse como vectores*. Si se hubieran utilizado rotaciones más pequeñas, aunque finitas, para ilustrar este punto, por ejemplo, 10° en vez de 90°, la *posición final* del bloque después de cada combinación de rotaciones también sería diferente; no obstante, en este caso, la diferencia es tan sólo una cantidad pequeña.

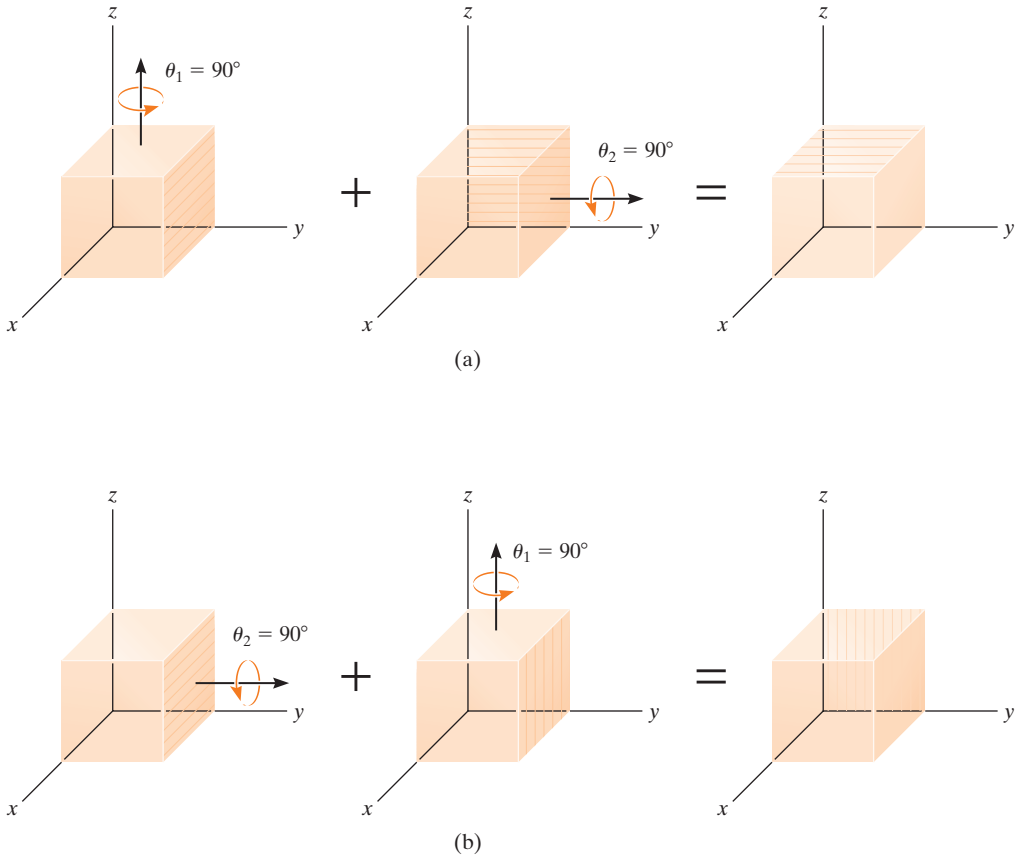
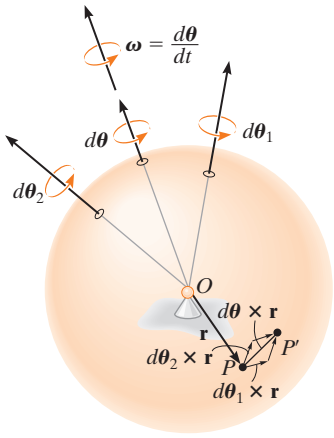


Fig. 20-1

Rotaciones infinitesimales. Cuando se definen los movimientos angulares de un cuerpo sometido a movimiento tridimensional, sólo se considerarán las *rotaciones que son infinitesimalmente pequeñas, las cuales pueden clasificarse como vectores, ya que se suman de manera vectorial de cualquier modo*. Para demostrar esto, por sencillez consideremos que el cuerpo rígido es una esfera a la que se le permite girar alrededor de su punto central fijo O (fig. 20-2*a*). Si aplicamos dos rotaciones infinitesimales $d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2$ al cuerpo, se observa que el punto P se mueve a lo largo de la trayectoria $d\boldsymbol{\theta}_1 \times \mathbf{r} + d\boldsymbol{\theta}_2 \times \mathbf{r}$ y termina en P'. Si hubieran ocurrido dos rotaciones sucesivas en el orden $d\boldsymbol{\theta}_2 + d\theta_1$, entonces los desplazamientos resultantes de P habrían sido $d\boldsymbol{\theta}_2 \times \mathbf{r} + d\boldsymbol{\theta}_1 \times \mathbf{r}$. Como el producto vectorial obedece la ley distributiva, al comparar $(d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2) \times \mathbf{r} = (d\boldsymbol{\theta}_2 + d\boldsymbol{\theta}_1) \times \mathbf{r}$. Por consiguiente, las rotaciones infinitesimales $d\boldsymbol{\theta}$ son vectores, ya que estas cantidades tienen tanto magnitud como dirección, por lo que el orden de la adición (vectorial) no es importante, esto es, $d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2 = d\boldsymbol{\theta}_2 + d\boldsymbol{\theta}_1$. Por lo tanto, como se ilustra en la figura 20-2a, las dos rotaciones "parciales" $d\boldsymbol{\theta}_1$ y $d\boldsymbol{\theta}_2$ equivalen a una sola rotación resultante $d\boldsymbol{\theta} = d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2$, una consecuencia del teorema de Euler.

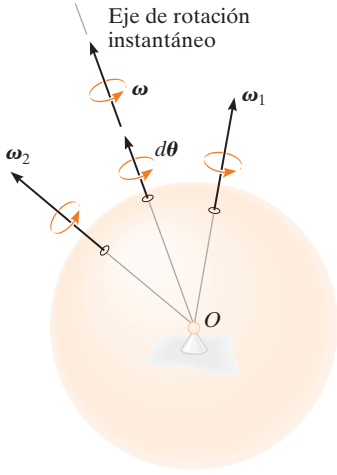


(a)

Velocidad angular. Si el cuerpo se somete a una rotación angular $d\boldsymbol{\theta}$ alrededor de un punto fijo, la velocidad angular del cuerpo se define mediante la derivada con respecto al tiempo,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{20-1}$$

La línea que especifica la dirección de $\boldsymbol{\omega}$, la cual es colineal con $d\boldsymbol{\theta}$, se conoce como *eje de rotación instantáneo* (fig. 20-2*b*). En general, este eje cambia de dirección durante cada instante. Como $d\boldsymbol{\theta}$ es una cantidad vectorial, $\boldsymbol{\omega}$ también lo es, y se desprende de la adición vectorial que si el cuerpo se somete a dos movimientos angulares $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\theta}_1$ y $\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\theta}_2$, la velocidad angular resultante será $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.



(b)

Fig. 20-2

Aceleración angular. La aceleración angular del cuerpo se determina con la derivada con respecto al tiempo de su velocidad angular, es decir,

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{20-2}$$

Para el movimiento con respecto a un punto fijo, $\boldsymbol{\alpha}$ dependerá del cambio *tanto* de magnitud *como* de dirección de $\boldsymbol{\omega}$, así que, en general, la dirección de $\boldsymbol{\alpha}$ no está a lo largo del eje de rotación instantáneo (fig. 20-3).

A medida que cambia la dirección del eje de rotación instantáneo (o la línea de acción de $\boldsymbol{\omega}$) en el espacio, el lugar geométrico del eje genera un *cono espacial* fijo (fig. 20-4). Si el cambio de dirección de este eje se considera con respecto al cuerpo que gira, el lugar geométrico del eje genera un *cono corporal*.

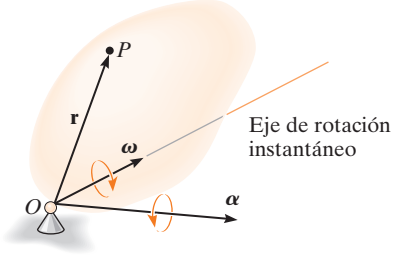


Fig. 20-3

20

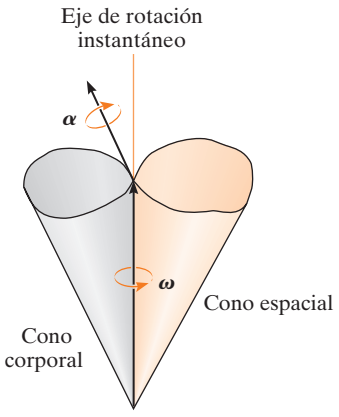
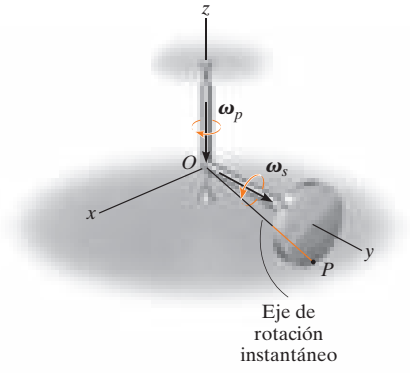
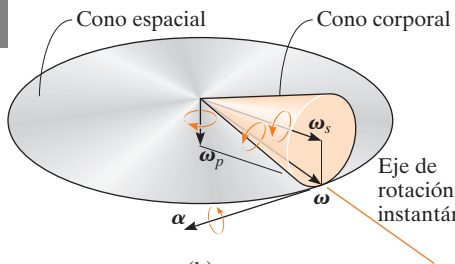


Fig. 20-4



(a)



(b)

Fig. 20-5

En un instante dado, estos conos se encuentran a lo largo del eje de rotación instantáneo y, cuando el cuerpo está en movimiento, el cono corporal parece que rueda sobre la superficie interna o sobre la superficie externa del cono espacial fijo. Dado que la punta del vector $\boldsymbol{\omega}$ describe las trayectorias definidas por los extremos abiertos de los conos, entonces $\boldsymbol{\alpha}$ debe actuar tangente a estas trayectorias en cualquier instante determinado, ya que el cambio con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$ es igual a $\boldsymbol{\alpha}$ (fig. 20-4).

Para ilustrar este concepto, considere el disco mostrado en la figura 20-5*a* que gira alrededor de la varilla en $\boldsymbol{\omega}_s$, mientras que la varilla y el disco experimentan precesión con respecto al eje vertical a $\boldsymbol{\omega}_p$. La velocidad angular resultante del disco es, por consiguiente, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p$. Como tanto el punto O como el punto de contacto P tienen velocidad cero, entonces todos los puntos sobre una línea entre estos puntos deben tener velocidad cero. Por consiguiente, tanto $\boldsymbol{\omega}$ como el eje instantáneo de rotación están a lo largo de OP. Por ello, a medida que gira el disco, este eje parece moverse a lo largo de la superficie del cono espacial fijo que se muestra en la figura 20-5*b*. Si el eje se observa desde el disco rotatorio, entonces parece que el eje se mueve sobre la superficie del cono corporal. Aunque en cualquier instante estos dos conos se encuentran a lo largo del eje OP. Si $\boldsymbol{\omega}$ tiene una magnitud constante, entonces $\boldsymbol{\alpha}$ indica sólo el cambio en la dirección de $\boldsymbol{\omega}$, la cual es tangente a los conos en la punta de $\boldsymbol{\omega}$ como se indica en la figura 20-5*b*.

Velocidad. Una vez que $\boldsymbol{\omega}$ se especifica, la velocidad de cualquier punto en un cuerpo que gira alrededor de un punto fijo se determina con los mismos métodos utilizados para un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo. Por lo tanto, de acuerdo con el producto vectorial,

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{20-3}$$

Donde $\mathbf{r}$ define la posición del punto medida con respecto al punto fijo O (fig. 20-3).

Aceleración. Si en un instante dado se conocen $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$, la aceleración de un punto se obtiene con la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 20-3, la cual resulta

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{20-4}$$

20

*20.2 Derivada con respecto al tiempo de un vector medido desde un sistema fijo o desde un sistema en traslación-rotatorio

En muchos tipos de problemas que implican el movimiento de un cuerpo con respecto a un punto fijo, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ se especifica en función de sus componentes. Entonces, si tiene que determinarse la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del mismo cuerpo, con frecuencia es más fácil calcular la derivada con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$ mediante un sistema de coordenadas, que tenga una *rotación* definida por una o más componentes de $\boldsymbol{\omega}$. Por ejemplo, en el caso del disco de la figura 20-5*a*, donde $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p$, a los ejes x, y, z se les puede impartir una velocidad angular de $\boldsymbol{\omega}_p$. Por ello, y para otros usos más adelante, ahora se derivará una ecuación, la cual relaciona

la derivada con respecto al tiempo de cualquier vector $\mathbf{A}$ —definido con respecto a una referencia en traslación-rotatoria— con su derivada con respecto al tiempo —definida desde una referencia fija.

Considere que los ejes x, y, z del marco de referencia móvil giran a una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$, medida con respecto a los ejes fijos X, Y, Z (fig. 20-6*a*). En el siguiente planteamiento, será conveniente expresar el vector $\mathbf{A}$ en función de sus componentes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, las cuales definen las direcciones de los ejes móviles. Por consiguiente,

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

En general, en el cálculo de la derivada con respecto al tiempo de $\mathbf{A}$ se debe tener en cuenta el cambio tanto de magnitud como de dirección. Sin embargo, si esta derivada se considera *con respecto al marco de referencia móvil*, únicamente debe considerarse el cambio de las magnitudes de las componentes de $\boldsymbol{A}$, ya que las direcciones de las componentes no cambian con respecto a la referencia móvil. Por consiguiente,

$$(\dot{\mathbf{A}})_{xyz} = \dot{A}_x\mathbf{i} + \dot{A}_y\mathbf{j} + \dot{A}_z\mathbf{k} \tag{20-5}$$

Cuando la derivada con respecto al tiempo de $\mathbf{A}$ se considera *con respecto al marco de referencia fijo*, las *direcciones* de $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ cambian sólo debido a la *rotación* $\boldsymbol{\Omega}$ de los ejes, pero no por su traslación. De ahí que, en general,

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}_x\mathbf{i} + \dot{A}_y\mathbf{j} + \dot{A}_z\mathbf{k} + A_x\dot{\mathbf{i}} + A_y\dot{\mathbf{j}} + A_z\dot{\mathbf{k}}$$

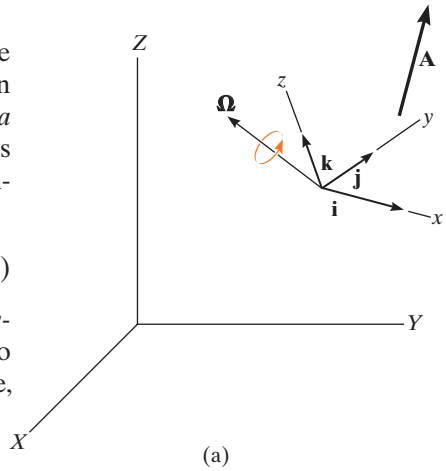
A continuación se considerarán las derivadas con respecto al tiempo de los vectores unitarios. Por ejemplo, $\dot{\mathbf{i}} = d\mathbf{i}/dt$ representa sólo el cambio en la *dirección* de $\mathbf{i}$ con respecto al tiempo, ya que la magnitud de $\mathbf{i}$ siempre es 1 unidad. Como se muestra en la figura 20-6*b*, el cambio, $d\mathbf{i}$, es *tangente a la trayectoria* descrita por la punta de flecha de $\mathbf{i}$ a medida que $\mathbf{i}$ oscila debido a la rotación $\boldsymbol{\Omega}$. Si tenemos en cuenta tanto la magnitud como la dirección de $d\mathbf{i}$, entonces podemos definir $\mathbf{i}$ mediante el producto vectorial, $\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}$. En general, tenemos que

$$\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i} \qquad \dot{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j} \qquad \dot{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}$$

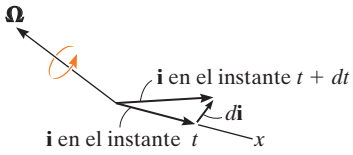
Estas formulaciones también se desarrollaron en la sección 16.8 en relación con el movimiento plano de los ejes. Al sustituir estos resultados en la ecuación anterior y utilizar la ecuación 20-5, obtenemos

$$\boxed{\dot{\mathbf{A}} = (\dot{\mathbf{A}})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}} \tag{20-6}$$

Este resultado es importante, y se utilizará a lo largo de la sección 20.4 y en el capítulo 21. Éste establece que la derivada con respecto al tiempo de *cualquier vector* $\mathbf{A}$ observada desde el marco de referencia X, Y, Z fijo es igual al cambio con respecto al tiempo de $\mathbf{A}$ observado desde el marco de referencia en traslación-rotatorio x, y, z, ecuación 20-5, más $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}$, que es el cambio de $\mathbf{A}$ causado por la rotación del marco x, y, z. Por consiguiente, deberá utilizarse la ecuación 20-6 siempre que $\boldsymbol{\Omega}$ cambie la dirección de $\mathbf{A}$ vista con respecto al marco de referencia X, Y, Z. Si no ocurre este cambio, es decir, $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$, entonces $\dot{\mathbf{A}} = (\dot{\mathbf{A}})_{xyz}$, y, por lo tanto, el cambio con respecto al tiempo de $\mathbf{A}$ observado desde ambos sistemas de coordenadas será el *mismo*.



(a)



(b)

Fig. 20-6

EJEMPLO 20.1

El disco de la figura 20-7 gira alrededor de su eje a una velocidad angular constante $\omega_s = 3$ rad/s, mientras que la plataforma horizontal sobre la cual está montado el disco gira alrededor del eje vertical a una velocidad constante $\omega_p = 1$ rad/s. Determine la aceleración angular del disco y la velocidad y aceleración del punto A del disco, cuando está en la posición indicada.

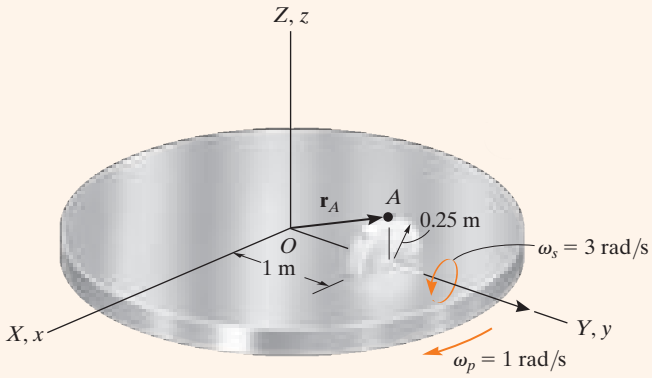


Fig. 20-7

SOLUCIÓN

El punto O representa un punto fijo de rotación para el disco, si consideramos la extensión hipotética del disco hasta este punto. Para determinar la velocidad y aceleración del punto A, primero es necesario determinar la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del disco, ya que estos vectores se utilizan en las ecuaciones 20-3 y 20-4.

Velocidad angular. La velocidad angular medida con respecto a X, Y, Z es simplemente la suma vectorial de los dos movimientos que la componen. Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p = \{3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}\} \text{ rad/s}$$

Aceleración angular. Como la magnitud de $\boldsymbol{\omega}$ es constante, sólo un cambio de su dirección, visto desde la referencia fija, crea la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del disco. Una forma de obtener $\boldsymbol{\alpha}$ es calcular la derivada con respecto al tiempo de *cada una de las dos componentes de* $\boldsymbol{\omega}$ con la ecuación 20-6. En el instante que se muestra en la figura 20-7, imagine que coinciden el marco de referencia fijo X, Y, Z y un marco x, y, z rotatorio. Si el marco rotatorio x, y, z se elige de modo que tenga una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p \{-1\mathbf{k}\}$ rad/s, entonces $\boldsymbol{\omega}_s$ *siempre* estará dirigida a lo largo del eje y (no del Y), y el cambio con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}_s$ *visto desde* x, y, z es *cero*, es decir, $(\dot{\boldsymbol{\omega}}_s)_{xyz} = \mathbf{0}$ (la magnitud y dirección de $\boldsymbol{\omega}_s$ es constante). Por lo tanto,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_s = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_s)_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_s = \mathbf{0} + (-1\mathbf{k}) \times (3\mathbf{j}) = \{3\mathbf{i}\} \text{ rad/s}^2$$

Con la misma selección de rotación de ejes, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p$, o incluso con $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$, la derivada con respecto al tiempo $(\dot{\boldsymbol{\omega}}_p)_{xyz} = \mathbf{0}$, como $\boldsymbol{\omega}_p$, tiene una magnitud y dirección constantes con respecto a x, y, z. Entonces,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_p = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_p)_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_p = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

La aceleración angular del disco es, por consiguiente,

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_s + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p = \{3\mathbf{i}\} \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Velocidad y aceleración. Como $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ ya se determinaron, la velocidad y aceleración del punto A se determinan con las ecuaciones 20-3 y 20-4. Habida cuenta de que $\mathbf{r}_A = \{1\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}\}$ m (fig. 20-7), tenemos

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A = (3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}) \times (1\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}) = \{1.75\mathbf{i}\} \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_A &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A) \\ &= (3\mathbf{i}) \times (1\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}) + (3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}) \times [(3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}) \times (1\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k})] \\ &= \{-2.50\mathbf{j} - 2.25\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}\end{aligned}$$

EJEMPLO 20.2

En el instante $\theta = 60°$, el giróscopo que se ilustra en la figura 20-8 tiene tres componentes de movimiento angular, dirigidas como se indica, y con magnitudes definidas como:

Rotación: $\omega_s = 10$ rad/s, que se incrementa a razón de 6 rad/s^2
Nutación: $\omega_n = 3$ rad/s, que se incrementa a razón de 2 rad/s^2
Precesión: $\omega_P = 5$ rad/s, que se incrementa a razón de 4 rad/s^2

Determine la velocidad y aceleración angulares del giróscopo.

SOLUCIÓN

Velocidad angular. El giróscopo rota con respecto al punto fijo O. Si los marcos fijo y rotatorio coinciden en el instante mostrado, entonces la velocidad angular puede representarse en función de las componentes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, con referencia al marco x, y, z, es decir,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= -\omega_n\mathbf{i} + \omega_s \operatorname{sen}\theta\mathbf{j} + (\omega_p + \omega_s\cos\theta)\mathbf{k}\\ &= -3\mathbf{i} + 10\operatorname{sen}60°\mathbf{j} + (5 + 10\cos 60°)\mathbf{k}\\ &= \{-3\mathbf{i} + 8.66\mathbf{j} + 10\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}\end{aligned}$$ *Resp.*

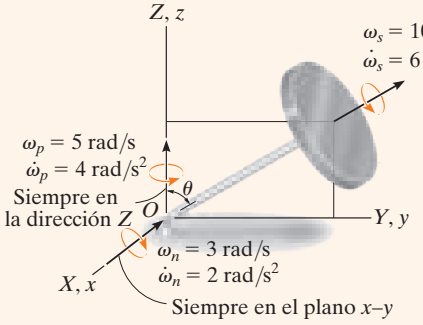


Fig. 20-8

Aceleración angular. Como en la solución del ejemplo 20.1, la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ se determinará investigando por separado la razón de cambio con respecto al tiempo de *cada una de las componentes de la velocidad angular* observadas desde el marco de referencia fijo X, Y, Z. Elegiremos $\boldsymbol{\Omega}$ para la referencia x, y, z, de modo que la componente de $\boldsymbol{\omega}$ considerada se vea como si tuviera una *dirección constante* cuando se observa desde x, y, z.

Un examen cuidadoso del movimiento del giróscopo revela que $\boldsymbol{\omega}_s$ tiene una *dirección constante* con respecto a x, y, z si estos ejes giran a $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_n + \boldsymbol{\omega}_p$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}}_s &= (\dot{\boldsymbol{\omega}}_s)_{xyz} + (\boldsymbol{\omega}_n + \boldsymbol{\omega}_p) \times \boldsymbol{\omega}_s\\ &= (6\operatorname{sen}60°\mathbf{j} + 6\cos 60°\mathbf{k}) + (-3\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times (10\operatorname{sen}60°\mathbf{j} + 10\cos 60°\mathbf{k})\\ &= \{-43.30\mathbf{i} + 20.20\mathbf{j} - 22.98\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2\end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{\omega}_n$ *siempre* queda en el plano fijo X-Y, este vector tiene una *dirección constante* si el movimiento se observa desde los ejes x, y, z que tienen una rotación de $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p$ (no $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_n + \boldsymbol{\omega}_p$). Por consiguiente,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_n = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_n)_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_n = -2\mathbf{i} + (5\mathbf{k}) \times (-3\mathbf{i}) = \{-2\mathbf{i} - 15\mathbf{j}\}\ \text{rad/s}^2$$

Por último, la componente $\boldsymbol{\omega}_p$ *siempre está dirigida* a lo largo del eje Z, de modo que no es necesario pensar en el marco x, y, z como rotatorio, es decir, $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$. Al expresar los datos en función de las componentes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, tenemos, entonces

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_p = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_p)_{xyz} + \mathbf{0} \times \boldsymbol{\omega}_p = \{4\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2$$

Por lo tanto, la aceleración angular del giróscopo es

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_s + \dot{\boldsymbol{\omega}}_n + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p = \{-45.3\mathbf{i} + 5.20\mathbf{j} - 19.0\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2$$ *Resp.*

20.3 Movimiento general

En la figura 20-9 se muestra un cuerpo rígido sometido a movimiento general en tres dimensiones, con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$. Si se sabe que el punto A tiene un movimiento de $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$, el movimiento de cualquier otro punto B se determina por medio de un análisis de movimiento relativo. En esta sección se utilizará un *sistema de coordenadas en traslación* para definir el movimiento relativo y, en la siguiente sección, se considerará una referencia que gira (rota) y se traslada.

Si el origen del sistema de coordenadas en traslación x, y, z ($\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$) se encuentra en el "punto base" A, entonces, en el instante ilustrado, el movimiento del cuerpo puede considerarse como la suma de una traslación instantánea del cuerpo que tiene un movimiento de $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$, y una rotación con respecto a un eje instantáneo que pasa por el punto A. Como el cuerpo es rígido, el movimiento del punto B medido por un observador localizado en A es, por ende, el mismo que *la rotación del cuerpo con respecto a un punto fijo*. Este movimiento relativo ocurre con respecto al eje instantáneo de rotación y se define como $\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, ecuación 20-3 y $\mathbf{a}_{B/A} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$, ecuación 20-4. Para ejes en traslación, los movimientos relativos se relacionan con los movimientos absolutos por medio de $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ y $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$, ecuaciones 16-15 y 16-17, de modo que la velocidad y aceleración absolutas del punto B se determinan con las ecuaciones

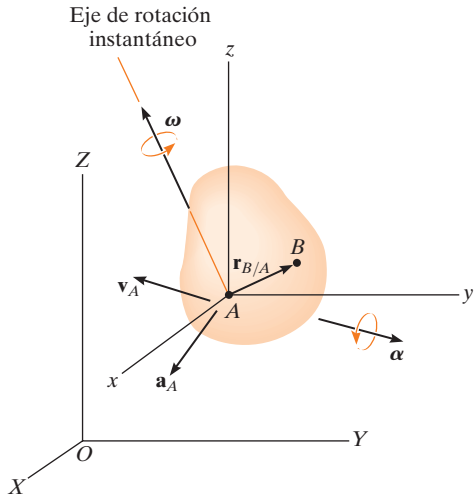


Fig. 20-9

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{20-7}$$

y

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \tag{20-8}$$

Estas dos ecuaciones son esencialmente iguales a las que describen el movimiento plano general de un cuerpo rígido, ecuaciones 16-16 y 16-18. Sin embargo, su aplicación se complica cuando el movimiento es tridimensional, porque $\boldsymbol{\alpha}$ ahora mide el cambio *tanto* de magnitud *como* de dirección de $\boldsymbol{\omega}$.

Aunque esto puede ser así, una solución directa para $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{a}_B$ se obtiene considerando que $\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ y, entonces, la ecuación 20-7 se convierte en $\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$. El producto cruz indica que $\mathbf{v}_{B/A}$ es *perpendicular* a $\mathbf{r}_{B/A}$, y así, como se indica en la ecuación C-14 del apéndice C, requerimos

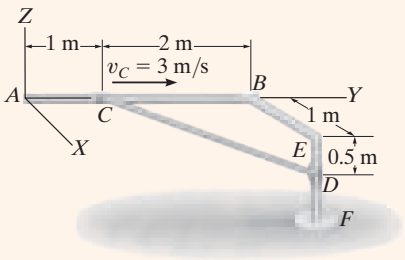
$$\mathbf{r}_{B/A} \cdot \mathbf{v}_{B/A} = 0 \tag{20-9}$$

Si se obtiene la derivada con respecto al tiempo, tenemos

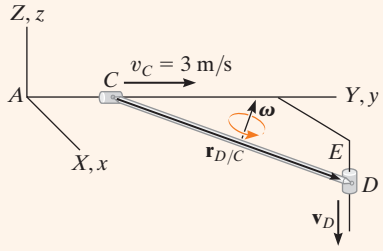
$$\mathbf{v}_{B/A} \cdot \mathbf{v}_{B/A} + \mathbf{r}_{B/A} \cdot \mathbf{a}_{B/A} = 0 \tag{20-10}$$

La solución II del siguiente ejemplo ilustra la aplicación de esta idea.

EJEMPLO 20.3



(a)



(b)

Fig. 20-10

Si el collarín en C que se ilustra en la figura 20-10*a* se mueve hacia *B* a una rapidez de 3 m/s, determine la velocidad del collarín en *D* y la velocidad angular de la barra en el instante que se muestra. La barra está conectada a los collarines en sus extremos por medio de articulaciones de rótula esférica.

SOLUCIÓN I

La varilla *CD* está sometida a movimiento general. ¿Por qué? La velocidad del punto *D* en la barra puede relacionarse con la velocidad del punto *C* mediante la ecuación

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{D/C}$$

Si se supone que los marcos de referencia fijo y de traslación coinciden en el instante considerado (fig. 20-10*b*), tenemos

$$\mathbf{v}_D = -v_D\mathbf{k} \qquad \mathbf{v}_C = \{3\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$$

$$\mathbf{r}_{D/C} = \{1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k}\}\ \text{m} \qquad \omega = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$$

Al sustituir en la ecuación anterior,

$$-v_D\mathbf{k} = 3\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 2 & -0.5 \end{vmatrix}$$

Expandiendo e igualando las componentes respectivas **i**, **j**, **k**, resulta

$$-0.5\omega_y - 2\omega_z = 0 \tag{1}$$

$$0.5\omega_x + 1\omega_z + 3 = 0 \tag{2}$$

$$2\omega_x - 1\omega_y + v_D = 0 \tag{3}$$

Estas ecuaciones contienen cuatro incógnitas*. Puede escribirse una cuarta ecuación si se especifica la dirección de $\boldsymbol{\omega}$. En particular, cualquier componente de $\boldsymbol{\omega}$ que actúa a lo largo del eje de la barra no afecta el movimiento de los collarines. Esto se debe a que la barra *gira libremente* alrededor de su eje. Por consiguiente, si $\boldsymbol{\omega}$ se especifica como que actúa *perpendicular* al eje de la barra, entonces $\boldsymbol{\omega}$ debe tener una *magnitud única* para satisfacer las ecuaciones anteriores. Por consiguiente,

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{D/C} = (\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}) \cdot (1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k}) = 0$$

$$1\omega_x + 2\omega_y - 0.5\omega_z = 0 \tag{4}$$

*Aunque éste sea el caso, puede obtenerse la magnitud de $\mathbf{v}_D$. Por ejemplo, resuelva las ecuaciones 1 y 2 para ω_y y ω_x en función de ω_z y sustituya en la ecuación 3. Entonces, ω_z se elimina, lo cual permite una solución para v_D.

Al resolver las ecuaciones 1 a 4 simultáneamente, obtenemos

$$\omega_x = -4.86 \text{ rad/s} \quad \omega_y = 2.29 \text{ rad/s} \quad \omega_z = -0.571 \text{ rad/s},$$
$$v_D = 12.0 \text{ m/s, por lo que} \quad \omega = 5.40 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

SOLUCIÓN II

Al aplicar la ecuación 20-9, $\mathbf{v}_{D/C} = \mathbf{v}_D - \mathbf{v}_C = -v_D\mathbf{k} - 3\mathbf{j}$, de modo que

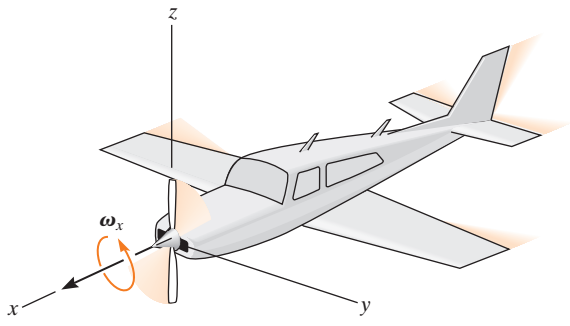
$$\mathbf{r}_{D/C} \cdot \mathbf{v}_{D/C} = (1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k}) \cdot (-v_D\mathbf{k} - 3\mathbf{j}) = 0$$
$$(1)(0) + (2)(-3) + (-0.5)(-v_D) = 0$$
$$v_D = 12 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Puesto que $\boldsymbol{\omega}$ es *perpendicular* a $\mathbf{r}_{D/C}$, entonces $\mathbf{v}_{D/C} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{D/C}$ o

$$v_{D/C} = \omega\, r_{D/C}$$
$$\sqrt{(-12)^2 + (-3)^2} = \omega\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-0.5)^2}$$
$$\omega = 5.40 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

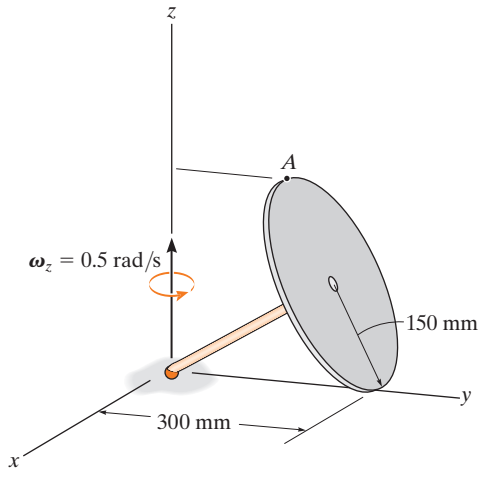
PROBLEMAS

20-1. La hélice de un avión gira a una rapidez constante $\omega_x\mathbf{i}$, mientras el avión experimenta una vuelta a razón constante ω_t. Determine la aceleración angular de la hélice, (a) si la vuelta es horizontal, es decir, $\omega_t\mathbf{k}$ y (b) si la vuelta es vertical, hacia abajo, es decir, $\omega_t\mathbf{j}$.



Prob. 20-1

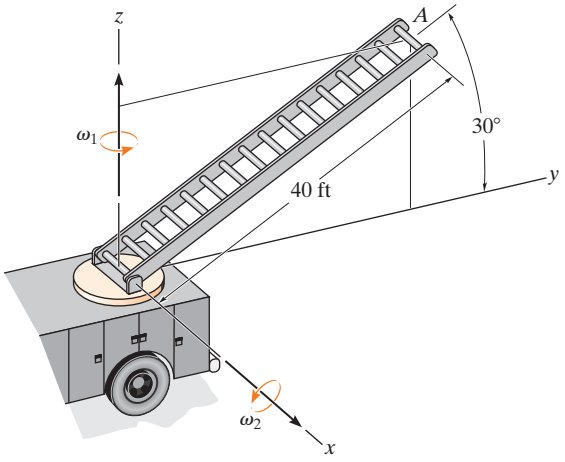
20-2. El disco gira con respecto al eje z a la razón constante $\omega_z = 0.5$ rad/s sin resbalar sobre el plano horizontal. Determine la velocidad y la aceleración del punto A en el disco.



Prob. 20-2

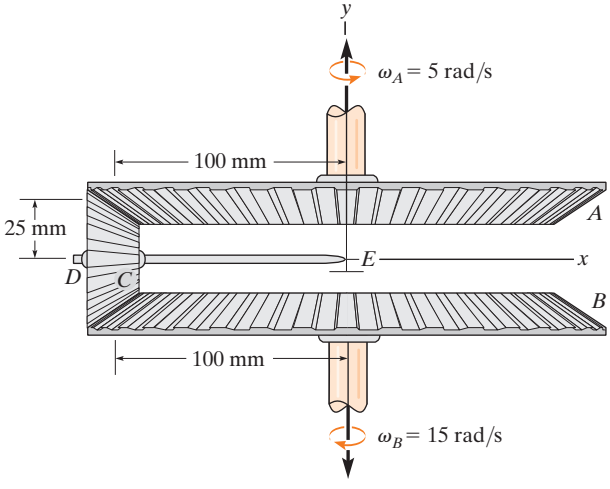
20-3. La escalera del camión de bomberos gira alrededor del eje z con una velocidad angular $\omega_1 = 0.15$ rad/s, que está aumentando a 0.8 rad/s^2. En el mismo instante, gira hacia arriba a la razón constante $\omega_2 = 0.6$ rad/s. Determine la velocidad y la aceleración del punto A situado en la parte superior de la escalera en este instante.

***20-4.** La escalera del camión de bomberos gira alrededor del eje z con una velocidad angular $\omega_1 = 0.15$ rad/s, que está aumentando a 0.2 rad/s^2. En el mismo instante, gira hacia arriba a $\omega_2 = 0.6$ rad/s mientras aumenta a 0.4 rad/s^2. Determine la velocidad y la aceleración del punto A situado en la parte superior de la escalera en este instante.



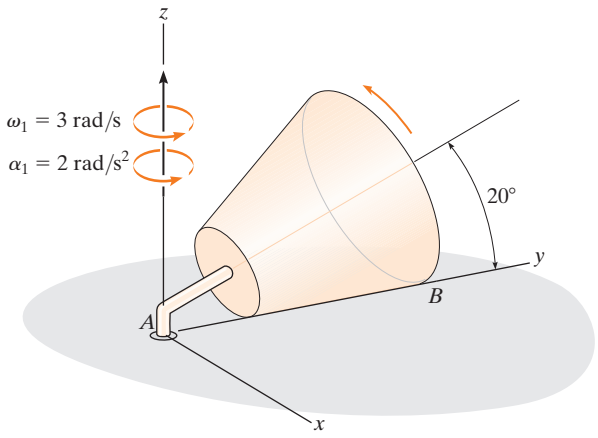
Probs. 20-3/4

20-5. Si los engranes de placa A y B giran con las velocidades angulares indicadas, determine la velocidad angular del engrane C con respecto a la flecha DE. ¿Cuál es la velocidad angular de DE con respecto al eje y?



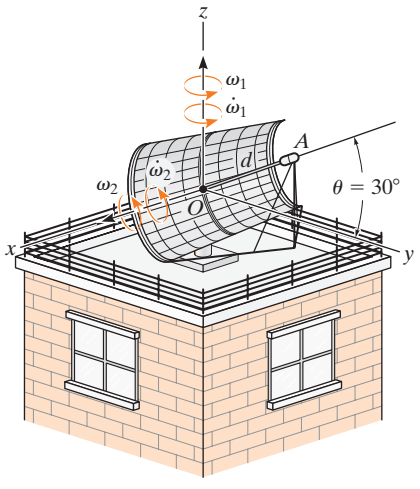
Prob. 20-5

20-6. El carrete cónico rueda sobre el plano sin deslizarse. Si el eje tiene una velocidad angular de $\omega_1 = 3$ rad/s y una aceleración angular de $\alpha_1 = 2$ rad/s^2 en el instante indicado, determine la velocidad angular y la aceleración angular del carrete en este instante.



Prob. 20-6

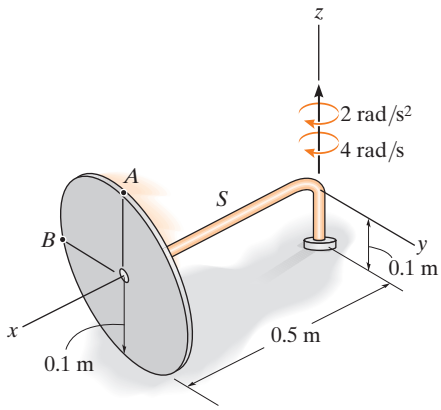
20-7. En un instante dado, la antena tiene un movimiento angular $\omega_1 = 3$ rad/s y $\dot{\omega}_1 = 2$ rad/s^2 con respecto al eje z. En este mismo instante $\theta = 30°$, el movimiento angular con respecto al eje x es $\omega_2 = 1.5$ rad/s y $\dot{\omega}_2 = 4$ rad/s^2. Determine la velocidad y la aceleración de la bocina de la antena A en este instante. La distancia desde O hasta A es $d = 3$ ft.



Prob. 20-7

***20-8.** El disco gira alrededor de la flecha S, mientras que ésta gira alrededor del eje z a razón de $\omega_z = 4$ rad/s, que está aumentando a 2 rad/s^2. Determine la velocidad y la aceleración del punto A sobre el disco en el instante mostrado. No ocurre deslizamiento.

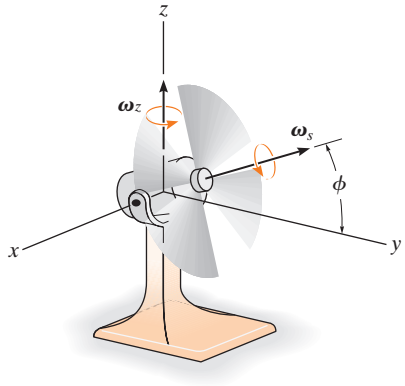
20-9. El disco gira alrededor de la flecha S, mientras que ésta gira alrededor del eje z a razón de $\omega_z = 4$ rad/s, que está aumentando a 2 rad/s^2. Determine la velocidad y la aceleración del punto B sobre el disco en el instante mostrado. No ocurre deslizamiento.



Probs. 20-8/9

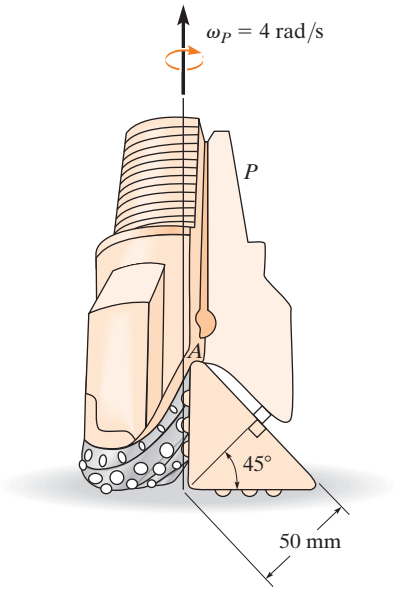
20-10. El ventilador eléctrico está montado sobre un soporte giratorio, de modo que el ventilador gira alrededor del eje z a razón constante de $\omega_z = 1$ rad/s y el aspa gira a una velocidad constante $\omega_s = 60$ rad/s. Si $\phi = 45°$ para el movimiento, determine la velocidad angular y la aceleración angular del aspa.

20-11. El ventilador eléctrico está montado sobre un soporte giratorio, de modo que el ventilador gira alrededor del eje z a razón constante de $\omega_z = 1$ rad/s y el aspa gira a una velocidad constante $\omega_s = 60$ rad/s. Si en el instante $\phi = 45°$, $\dot{\phi} = 2$ rad/s para el movimiento, determine la velocidad angular y la aceleración angular del aspa.



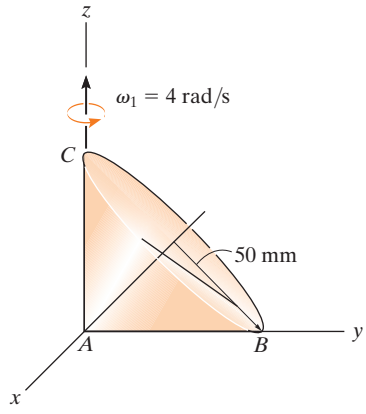
Probs. 20-10/11

***20-12.** El tubo de perforación P gira a una velocidad angular constante de $\omega_P = 4$ rad/s. Determine la velocidad angular y la aceleración angular de la broca cónica para roca, que rueda sin deslizarse. Además, ¿cuáles son la velocidad y la aceleración del punto A?



Prob. 20-12

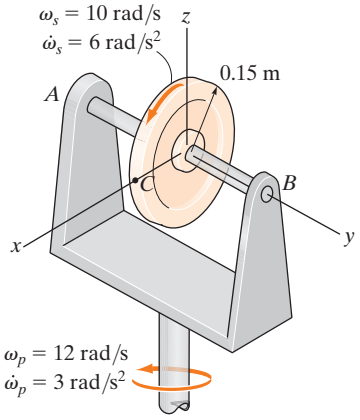
20-13. El cono circular recto gira alrededor del eje z a razón constante de $\omega_1 = 4$ rad/s sin deslizarse sobre el plano horizontal. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de los puntos B y C.



Prob. 20-13

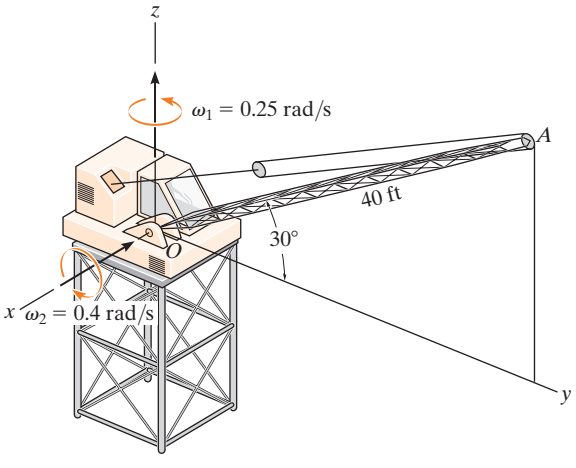
20

20-14. La rueda gira alrededor de la flecha AB con una velocidad angular de $\omega_s = 10$ rad/s, que está aumentando a razón constante de $\dot{\omega}_s = 6$ rad/s^2 mientras que el bastidor gira con respecto al eje z con una velocidad angular de $\omega_p = 12$ rad/s, que está aumentando a razón constante de $\dot{\omega}_p = 3$ rad/s^2. Determine la velocidad y la aceleración del punto C ubicado sobre el borde de la rueda en este instante.



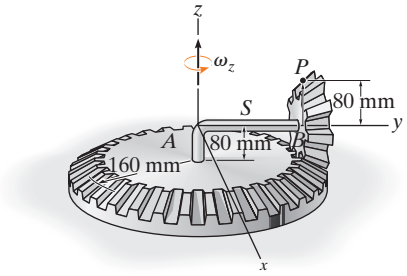
Prob. 20-14

20-15. En el instante mostrado, la grúa de torre gira alrededor del eje z con una velocidad angular $\omega_1 = 0.25$ rad/s, que aumenta a 0.6 rad/s^2. El brazo OA gira hacia abajo con una velocidad angular $\omega_2 = 0.4$ rad/s, que aumenta a 0.8 rad/s^2. Determine la velocidad y la aceleración del punto A ubicado en el extremo del brazo en este instante.



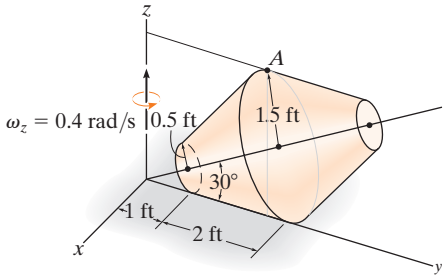
Prob. 20-15

***20-16.** El engrane A está fijo mientras que el engrane B gira libremente alrededor de la flecha S. Si la flecha está girando con respecto el eje z a $\omega_z = 5$ rad/s, mientras aumenta a 2 rad/s^2, determine la velocidad y la aceleración del punto P en el instante indicado. La cara del engrane B se encuentra en un plano vertical.



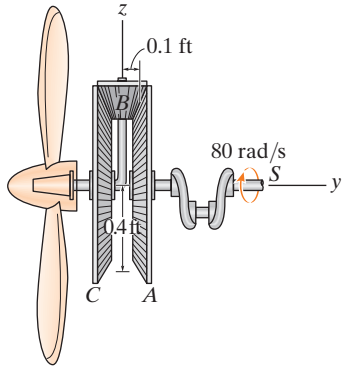
Prob. 20-16

20-17. El doble cono trunco gira alrededor del eje z a $\omega_z = 0.4$ rad/s sin deslizarse sobre el plano horizontal. Si en este mismo instante ω_z está aumentando a $\dot{\omega}_z = 0.5$ rad/s^2, determine la velocidad y la aceleración del punto A sobre el doble cono.



Prob. 20-17

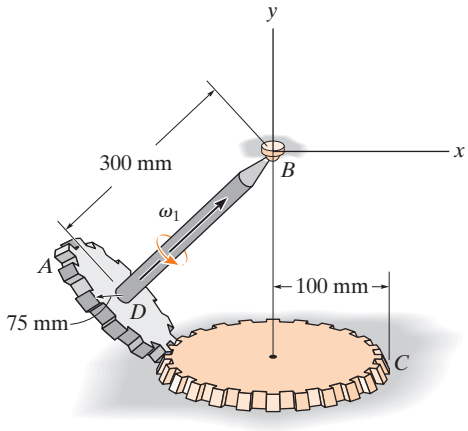
20-18. Un engrane A está fijo al cigüeñal S, mientras que el engrane C se encuentra estático. El engrane B y la hélice giran libremente. El cigüeñal gira a 80 rad/s con respecto a su eje. Determine las magnitudes de la velocidad angular de la hélice y la aceleración angular del engrane B.



Prob. 20-18

20

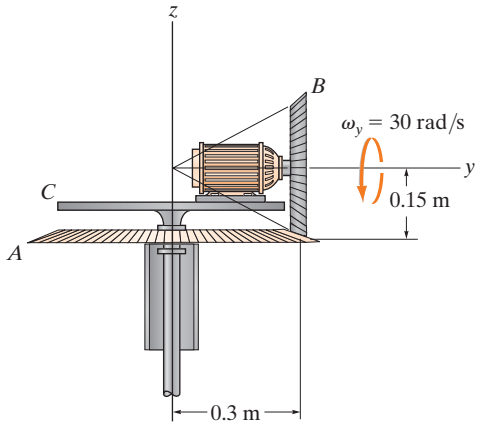
20-19. La flecha BD está conectada a una junta de rótula en B, y un engrane biselado A está unido a su otro extremo. El engrane está acoplado con un piñón fijo C. Si la flecha y el engrane A *giran* con una velocidad angular constante $\omega_1 = 8$ rad/s, determine la velocidad y la aceleración angulares del engrane A.



Prob. 20-19

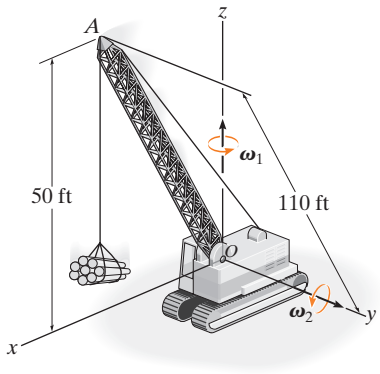
***20-20.** El engrane B está impulsado por un motor montado sobre el tornamesa C. Si el engrane A se mantiene fijo y la flecha del motor gira con una velocidad angular constante de $\omega_y = 30$ rad/s, determine la velocidad y la aceleración angulares del engrane B.

20-21. El engrane B está impulsado por un motor montado sobre el tornamesa C. Si el engrane A y la flecha del motor giran con velocidades angulares constantes de $\omega_A = \{10\mathbf{k}\}$ rad/s y $\omega_y = \{30\mathbf{j}\}$ rad/s, respectivamente, determine la velocidad y la aceleración angulares del engrane B.



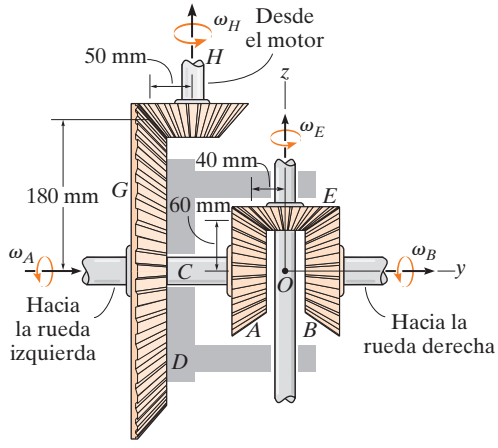
Probs. 20-20/21

20-22. El brazo OA de la grúa gira alrededor del eje z con una velocidad angular constante de $\omega_1 = 0.15$ rad/s, mientras gira hacia abajo con una velocidad angular constante de $\omega_2 = 0.2$ rad/s. Determine la velocidad y la aceleración del punto A localizado en el extremo del brazo en el instante indicado.



Prob. 20-22

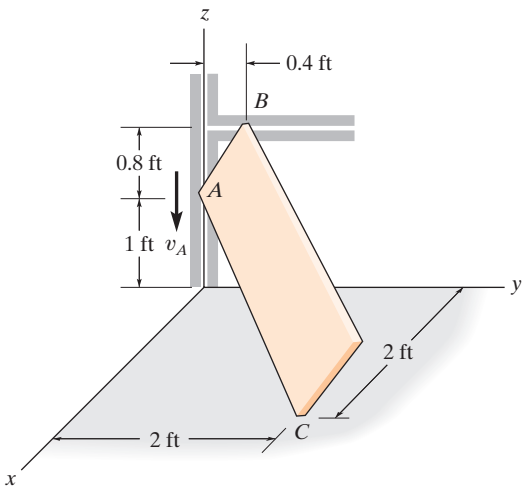
20-23. El diferencial de un automóvil permite que las dos ruedas traseras giren a diferentes velocidades cuando el automóvil se desplaza a lo largo de una curva. Para su operación, los ejes traseros están conectados a las ruedas en un extremo y tienen engranes biselados A y B en sus otros extremos. La caja D del diferencial está colocada sobre el eje izquierdo, pero puede girar alrededor de C independiente del eje. La caja sostiene un engrane de piñón E sobre una flecha, que se acopla con los engranes A y B. Por último, un engrane de anillo G está *fijo* a la caja del diferencial, por lo que ésta gira con el engrane de anillo cuando se acciona mediante el piñón de accionamiento H. Este engrane, al igual que la caja del diferencial, puede girar libremente alrededor del eje de la rueda izquierda. Si el piñón de accionamiento gira a $\omega_H = 100$ rad/s y el engrane de piñón E gira alrededor de su flecha a $\omega_E = 30$ rad/s, determine la velocidad angular, ω_A y ω_B, de cada eje.



Prob. 20-23

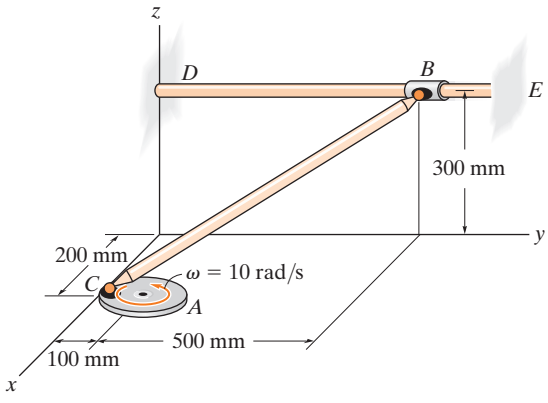
20

***20-24.** El extremo C de la placa descansa sobre el plano horizontal, mientras que los puntos extremos A y B están limitados a moverse a lo largo de las ranuras acanaladas. Si en el instante mostrado A se mueve hacia abajo con una velocidad constante de $v_A = 4$ ft/s, determine la velocidad angular de la placa y las velocidades de los puntos B y C.



Prob. 20-24

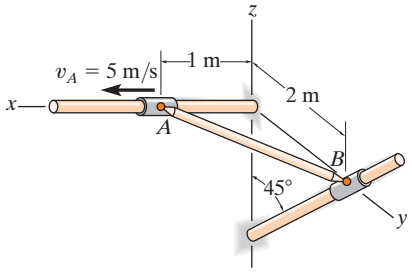
20-25. El disco A gira a una velocidad angular constante de 10 rad/s. Si la varilla BC está unida al disco y a un collarín mediante juntas de rótula, determine la velocidad del collarín B en el instante mostrado. Además, cuál es la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{BC}$ de la varilla, si está dirigida en forma perpendicular a su eje?



Prob. 20-25

20-26. La varilla AB está unida a los collarines en sus extremos mediante articulaciones de rótula. Si el collarín A se mueve a lo largo de la varilla fija a $v_A = 5$ m/s, determine la velocidad angular de la varilla y la velocidad del collarín B en el instante indicado. Suponga que la velocidad angular de la varilla está dirigida en forma perpendicular a su eje.

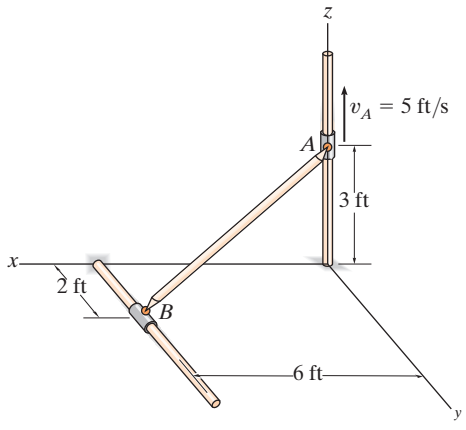
20-27. La varilla AB está unida a los collarines en sus extremos mediante articulaciones de rótula. Si el collarín A se mueve a lo largo de la varilla fija a $v_A = 5$ m/s y tiene una aceleración $a_A = 2$ m/s^2 en el instante mostrado, determine la aceleración angular de la varilla y la aceleración del collarín B en este instante. Suponga que la velocidad angular y la aceleración angular de la varilla están dirigidas en forma perpendicular al eje de la varilla.



Probs. 20-26/27

***20-28.** Si la varilla está unida con juntas de rótula a los collarines lisos A y B en sus puntos extremos, determine la velocidad de B en el instante mostrado, si A se mueve hacia arriba a una rapidez constante de $v_A = 5$ ft/s. Además, determine la velocidad angular de la varilla si está dirigida en forma perpendicular a su eje.

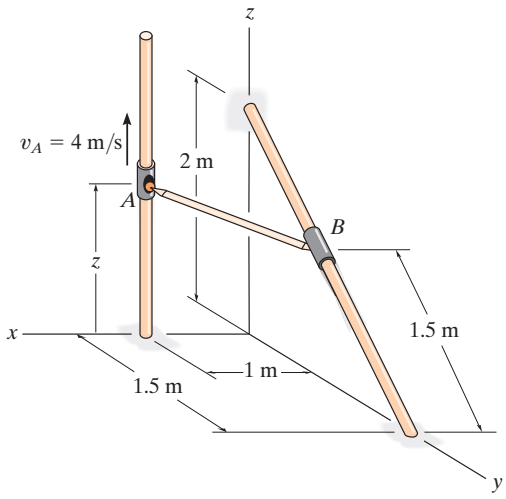
20-29. Si el collarín en el punto A del problema 20-28 se mueve hacia arriba con una aceleración de $\mathbf{a}_A = \{-2\mathbf{k}\}$ ft/s^2, en el instante en que su rapidez es $v_A = 5$ ft/s, determine la aceleración del collarín en B en ese instante.



Probs. 20-28/29

20

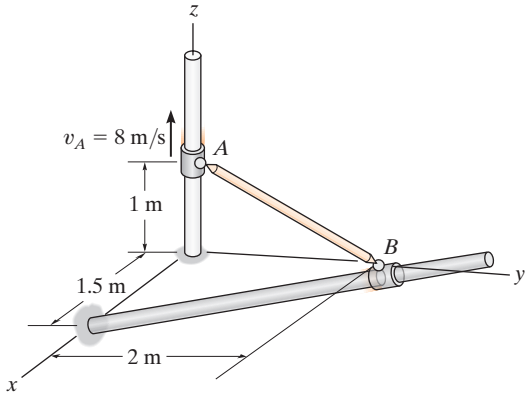
20-30. La varilla AB está unida a los collarines en sus extremos mediante juntas de rótula. Si el collarín A tiene una rapidez $v_A = 4$ m/s, determine la velocidad de collarín B en el instante $z = 2$ m. Suponga que la velocidad angular de la varilla está dirigida en forma perpendicular a ésta.



Prob. 20-30

20-31. La varilla está unida a los collarines lisos A y B en sus extremos mediante juntas de rótula. Determine la rapidez de B en el instante mostrado, si A se mueve a $v_A = 8$ m/s. Además, determine la velocidad angular de la varilla si está dirigida en forma perpendicular a su eje.

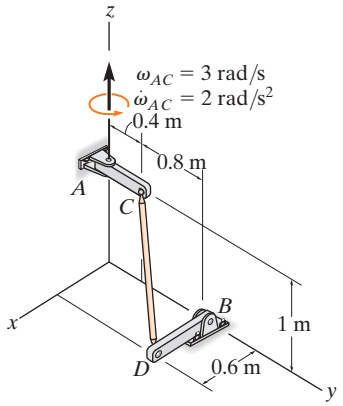
***20-32.** Si el collarín A del problema 20-31 tiene una desaceleración de $\mathbf{a}_A = \{-5\mathbf{k}\}$ m/s^2 en el instante mostrado, determine la aceleración del collarín B en este instante.



Probs. 20-31/32

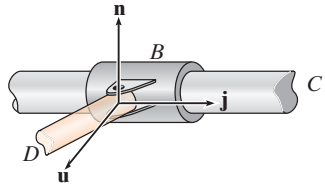
20-33 La varilla CD está unida a los brazos giratorios mediante juntas de rótula. Si AC tiene el movimiento mostrado, determine la velocidad angular del eslabón BD en el instante que se muestra en la figura.

20-34. La varilla CD está unida a los brazos giratorios mediante juntas de rótula. Si AC tiene el movimiento mostrado, determine la aceleración angular del eslabón BD en este instante.



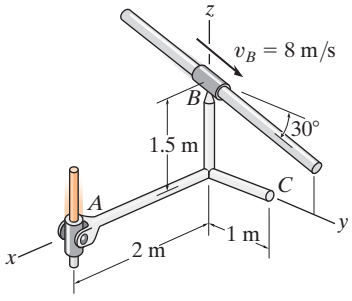
Probs. 20-33/34

20-35. Resuelva el problema 20-28 si la conexión en B consiste en un pasador como se muestra en la siguiente figura, en vez de una junta de rótula. *Sugerencia:* La restricción permite la rotación de la varilla, tanto a lo largo de la varilla (dirección $\mathbf{j}$) como a lo largo del eje del pasador (dirección $\mathbf{n}$). Como no hay componente de rotación en la dirección $\mathbf{u}$, es decir, perpendicular a $\mathbf{n}$ y $\mathbf{j}$, donde $\mathbf{u} = \mathbf{j} \times \mathbf{n}$, es posible obtener una ecuación adicional para la solución a partir de $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u} = 0$. El vector $\mathbf{n}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{r}_{D/B} \times \mathbf{r}_{C/B}$.



Prob. 20-35

***20-36.** El elemento ABC está conectado mediante un pasador en A y tiene una junta de rótula en B. Si el collarín en B se mueve a lo largo de la varilla inclinada a $v_B = 8$ m/s, determine la velocidad del punto C en el instante mostrado. *Sugerencia:* Vea el problema 20-35.



Prob. 20-36

*20.4 Análisis de movimiento relativo por medio de ejes en traslación y en rotación

La forma más general de analizar el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido requiere el uso de ejes x, y, z que se trasladan y giran con respecto a un segundo marco X, Y, Z. Este análisis también permite determinar los movimientos de dos puntos A y B localizados en miembros distintos de un mecanismo, así como el movimiento relativo de una partícula con respecto a otra, cuando una o ambas partículas se mueven a lo largo de *trayectorias curvas*.

Como se muestra en la figura 20-11, las ubicaciones de los puntos A y B se especifican con respecto al marco de referencia X, Y, Z por medio de vectores de posición $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$. El punto base A representa el origen del sistema de coordenadas x, y, z, el cual se traslada y gira con respecto a X, Y, Z. En el instante considerado, la velocidad y aceleración del punto A son $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$ y la velocidad y aceleración angulares de los ejes x, y, z son $\boldsymbol{\Omega}$ y $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = d\boldsymbol{\Omega}/dt$. Todos estos vectores se *miden* con respecto al marco de referencia X, Y, Z, aunque pueden expresarse en forma de componentes cartesianas a lo largo de cualquier sistema de ejes.

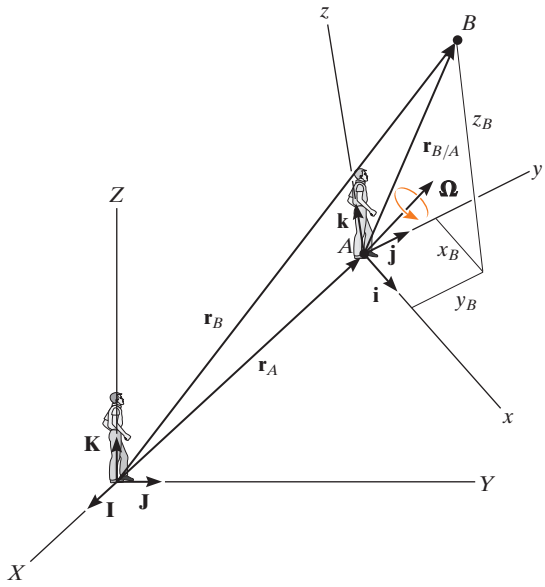


Fig. 20-11

Posición. Si la posición de "B con respecto a A" se especifica por medio del *vector de posición relativa* $\mathbf{r}_{B/A}$ (fig. 20-11), entonces, por adición vectorial,

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \tag{20-11}$$

donde

$\mathbf{r}_B$ = posición de B
$\mathbf{r}_A$ = posición del origen A
$\mathbf{r}_{B/A}$ = posición de "B con respecto a A"

Velocidad. La velocidad del punto B medida con respecto a X, Y, Z se determina al considerar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 20-11,

$$\dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_{B/A}$$

Los primeros dos términos representan $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_A$. El último término debe evaluarse mediante la aplicación de la ecuación 20-6, ya que $\mathbf{r}_{B/A}$ se mide con respecto a una referencia que gira. De modo que,

$$\dot{\mathbf{r}}_{B/A} = (\dot{\mathbf{r}}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{20-12}$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \tag{20-13}$$

donde

$\mathbf{v}_B$ = velocidad de B
$\mathbf{v}_A$ = velocidad del origen A del marco de referencia x, y, z
$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = velocidad de "B con respecto a A" medida por un observador situado en el marco de referencia que gira x, y, z
$\boldsymbol{\Omega}$ = velocidad angular del marco de referencia x, y, z
$\mathbf{r}_{B/A}$ = posición de "B con respecto a A".

Aceleración. La aceleración del punto B medida con respecto a X, Y, Z se determina derivando con respecto al tiempo la ecuación 20-13.

$$\dot{\mathbf{v}}_B = \dot{\mathbf{v}}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}_{B/A} + \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

Las derivadas con respecto al tiempo definidas por el primero y el segundo términos representan $\mathbf{a}_B$ y $\mathbf{a}_A$, respectivamente. El cuarto término se evalúa con la ecuación 20-12 y el último término se evalúa con la ecuación 20-6, la cual resulta como

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} = (\dot{\mathbf{v}}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} = (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

En este caso, $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$ es la aceleración de B con respecto a A medida en relación con x, y, z. Si sustituimos este resultado y la ecuación 20-12 en la ecuación anterior y simplificamos, tenemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} \tag{20-14}$$

donde

$\mathbf{a}_B$ = aceleración de B

$\mathbf{a}_A$ = aceleración del origen A del marco de referencia x, y, z

$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}, (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = aceleración y velocidad relativas de "B con respecto a A" medidas por un observador situado en el marco de referencia en rotación x, y, z

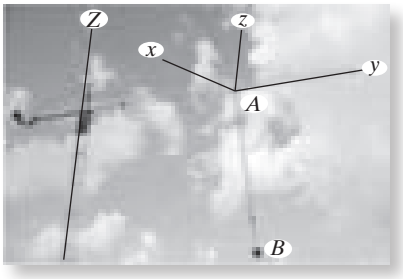
$\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \boldsymbol{\Omega}$ = aceleración y velocidad angulares del marco de referencia x, y, z

$\mathbf{r}_{B/A}$ = posición de "B con respecto a A"

Las ecuaciones 20-13 y 20-14 son idénticas a las que se utilizaron en la sección 16-8 para analizar el movimiento plano relativo*. En ese caso, sin embargo, se simplificó la aplicación, ya que $\boldsymbol{\Omega}$ y $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ tienen una *dirección constante*, la cual siempre es perpendicular al plano del movimiento. Para movimiento tridimensional, $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ se calcula con la ecuación 20-6, ya que $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ depende del cambio *tanto* de magnitud *como* de dirección de $\boldsymbol{\Omega}$.

*Remítase a la sección 16-8 para una interpretación de los términos.

20



El movimiento espacial complicado del balde de concreto B ocurre debido a la rotación de la pluma alrededor del eje Z, el movimiento del carro deslizante A a lo largo de la pluma, y la extensión y oscilación del cable AB. Puede establecerse un sistema de coordenadas x, y, z en traslación-rotatorio en el carro y, luego, aplicar un análisis de movimiento relativo para estudiar este movimiento. (© R. C. Hibbeler)

Procedimiento para el análisis

El movimiento tridimensional de partículas o cuerpos rígidos puede analizarse con las ecuaciones 20-13 y 20-14 mediante el siguiente procedimiento.

Ejes de coordenadas

- Seleccione la ubicación y orientación de los ejes de coordenadas X, Y, Z, y x, y, z. Con mucha frecuencia, las soluciones son fáciles de obtener si en el instante considerado:

  (1) los orígenes *coinciden*

  (2) los ejes son colineales

  (3) los ejes son paralelos

- Si varias componentes de la velocidad angular intervienen en un problema, los cálculos se reducirán si los ejes x, y, z se seleccionan de tal modo que sólo una componente de la velocidad angular se observe con respecto a este marco $(\boldsymbol{\Omega}_{xyz})$, y éste gira a $\boldsymbol{\Omega}$ definida por las demás componentes de velocidad angular.

Ecuaciones de cinemática

- Una vez que se define el origen de la referencia móvil, A, y el punto móvil B se especifica, deberán escribirse entonces las ecuaciones 20-13 y 20-14 en forma simbólica como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

- Si parece que $\mathbf{r}_A$ y $\boldsymbol{\Omega}$ *cambian de dirección* cuando se les observa desde la referencia X, Y, Z fija, entonces utilice un sistema de ejes de referencia primado x', y', z' que tenga una rotación $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega}$. Se utiliza entonces la ecuación 20-6 para determinar $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ y el movimiento $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$ del origen de los ejes móviles x, y, z.

- Si parece que $(\mathbf{r}_{B/A})_{xyz}$ y $\boldsymbol{\Omega}_{xyz}$ cambian de dirección observados desde x, y, z, entonces utilice un sistema de eje de referencia bipri-mo x'', y'', z'' con $\boldsymbol{\Omega}'' = \boldsymbol{\Omega}_{xyz}$ y aplique la ecuación 20-6 para determinar $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ y el movimiento relativo $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$.

- Una vez que se obtienen las formas finales de $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$, $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{a}_A$, $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$, $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$, se sustituyen los datos numéricos del problema y se evalúan los términos cinemáticos. Las componentes de todos estos vectores se seleccionan a lo largo de los ejes X, Y, Z, o de los ejes x, y, z. La selección es arbitraria siempre que se utilice un sistema consistente de vectores unitarios.

EJEMPLO 20.4

Un motor y la varilla AB conectada tienen los movimientos angulares que se muestran en la figura 20-12. Un collarín C insertado en la varilla se encuentra a 0.25 m de A y desciende a lo largo de la varilla a una velocidad de 3 m/s y una aceleración de 2 m/s^2. Determine la velocidad y aceleración de C en este instante.

SOLUCIÓN

Ejes de coordenadas. El origen de la referencia X, Y, Z fija se elige en el centro de la plataforma y el origen del marco x, y, z móvil en el punto A (fig. 20-12). Como el collarín se somete a dos componentes de movimiento angular $\boldsymbol{\omega}_p$ y $\boldsymbol{\omega}_M$, su velocidad angular será $\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_M$ en x, y, z. Por consiguiente, los ejes x, y, z se ubicarán en la plataforma de modo que $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_P$.

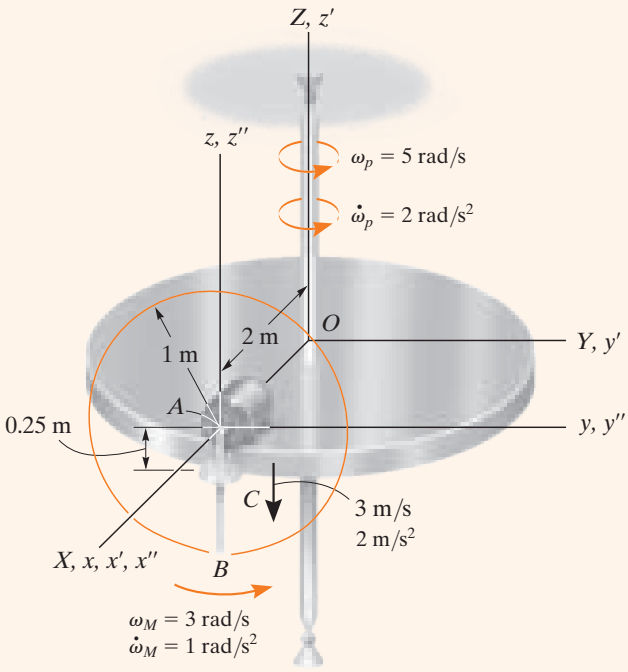


Fig. 20-12

Ecuaciones cinemáticas. Las ecuaciones 20-13 y 20-14 aplicadas a los puntos C y A se vuelven

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A} + (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz}$$
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/A})_{xyz}$$

Movimiento de *A*. Aquí $\mathbf{r}_A$ cambia de dirección con respecto a X, Y, Z. Para determinar las derivadas con respecto al tiempo de $\mathbf{r}_A$ utilizaremos un sistema de ejes x', y', z' coincidentes con los ejes X, Y, Z que giran a $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\omega}_p$. Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p = \{5\mathbf{k}\} \text{ rad/s } (\boldsymbol{\Omega} \text{ no cambia de dirección con respecto a } X, Y, Z.)$$
$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_p = \{2\mathbf{k}\} \text{ rad/s}^2$$
$$\mathbf{r}_A = \{2\mathbf{i}\} \text{ m}$$
$$\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_A = (\dot{\mathbf{r}}_A)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_A = \mathbf{0} + 5\mathbf{k} \times 2\mathbf{i} = \{10\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$
$$\mathbf{a}_A = \ddot{\mathbf{r}}_A = [(\ddot{\mathbf{r}}_A)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times (\dot{\mathbf{r}}_A)_{x'y'z'}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\omega}_p \times \dot{\mathbf{r}}_A$$
$$= [\mathbf{0} + \mathbf{0}] + 2\mathbf{k} \times 2\mathbf{i} + 5\mathbf{k} \times 10\mathbf{j} = \{-50\mathbf{i} + 4\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$$

Movimiento de *C* con respecto a *A*. Aquí $\mathbf{r}_{C/A}$ cambia de dirección con respecto a x, y, z, y para determinar las derivadas con respecto al tiempo, utilice un sistema de ejes x'', y'', z'' que giren a $\boldsymbol{\Omega}'' = \boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_M$. Entonces,

$$\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_M = \{3\mathbf{i}\} \text{ rad/s } (\boldsymbol{\Omega}_{xyz} \text{ no cambia de dirección con respecto a } y, y, z.)$$
$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{xyz} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_M = \{1\mathbf{i}\} \text{ rad/s}^2$$
$$\mathbf{r}_{C/A} = \{-0.25\mathbf{k}\} \text{ m}$$
$$(\mathbf{v}_{C/A})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{x''y''z''} + \boldsymbol{\omega}_M \times \mathbf{r}_{C/A}$$
$$= -3\mathbf{k} + [3\mathbf{i} \times (-0.25\mathbf{k})] = \{0.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\} \text{ m/s}$$
$$(\mathbf{a}_{C/A})_{xyz} = (\ddot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz} = [(\ddot{\mathbf{r}}_{C/A})_{x''y''z''} + \boldsymbol{\omega}_M \times (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{x''y''z''}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_M \times \mathbf{r}_{C/A} + \boldsymbol{\omega}_M \times (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz}$$
$$= [-2\mathbf{k} + 3\mathbf{i} \times (-3\mathbf{k})] + (1\mathbf{i}) \times (-0.25\mathbf{k}) + (3\mathbf{i}) \times (0.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$$
$$= \{18.25\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2$$

Movimiento de *C*

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A} + (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz}$$
$$= 10\mathbf{j} + [5\mathbf{k} \times (-0.25\mathbf{k})] + (0.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$$
$$= \{10.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\} \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/A})_{xyz}$$
$$= (-50\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) + [2\mathbf{k} \times (-0.25\mathbf{k})] + 5\mathbf{k} \times [5\mathbf{k} \times (-0.25\mathbf{k})]$$
$$+ 2[5\mathbf{k} \times (0.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k})] + (18.25\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k})$$
$$= \{-57.5\mathbf{i} + 22.25\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 20.5

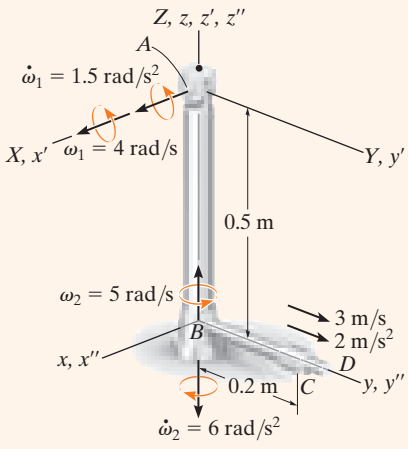


Fig. 20-13

El péndulo de la figura 20-13 se compone de dos varillas: AB está soportada en A por medio de un pasador y oscila sólo en el plano Y-Z, mientras que un cojinete en B permite que la varilla BD gire en torno a la varilla AB. En un instante dado, las varillas tienen los movimientos angulares que se indican. Incluso un collarín C, localizado a 0.2 m de B tiene una velocidad de 3 m/s y una aceleración de 2 m/s² a lo largo de la varilla. Determine la velocidad y aceleración del collarín en este instante.

SOLUCIÓN I

Ejes de coordenadas. El origen del marco X, Y, Z fijo se colocará en A. El movimiento del collarín se observa convenientemente desde B, por lo que el origen del marco de referencia x, y, z se localiza en este punto. Seleccionaremos $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1$ y $\mathbf{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_2$.

Ecuaciones cinemáticas

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B} + (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz}$$
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/B} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/B})_{xyz}$$

Movimiento de *B*. Para determinar las derivadas con respecto al tiempo de $\mathbf{r}_B$ se eligen los ejes x', y', z' que giran con $\mathbf{\Omega}' = \boldsymbol{\omega}_1$. Entonces

$$\mathbf{\Omega}' = \boldsymbol{\omega}_1 = \{4\mathbf{i}\} \text{ rad/s} \quad \dot{\mathbf{\Omega}}' = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \{1.5\mathbf{i}\} \text{ rad/s}^2$$
$$\mathbf{r}_B = \{-0.5\mathbf{k}\} \text{ m}$$
$$\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B = (\dot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_B = \mathbf{0} + 4\mathbf{i} \times (-0.5\mathbf{k}) = \{2\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$
$$\mathbf{a}_B = \ddot{\mathbf{r}}_B = [(\ddot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\dot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_B$$
$$= [\mathbf{0} + \mathbf{0}] + 1.5\mathbf{i} \times (-0.5\mathbf{k}) + 4\mathbf{i} \times 2\mathbf{j} = \{0.75\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2$$

Movimiento de *C* con respecto a *B*. Para determinar las derivadas con respecto al tiempo de $(\mathbf{r}_{C/B})$ en relación con x, y, z, se eligen los ejes x'', y'', z'' que giran con $\mathbf{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_2$. Entonces

$$\mathbf{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_2 = \{5\mathbf{k}\} \text{ rad/s} \quad \dot{\mathbf{\Omega}}_{xyz} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \{-6\mathbf{k}\} \text{ rad/s}^2$$
$$\mathbf{r}_{C/B} = \{0.2\mathbf{j}\} \text{ m}$$
$$(\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/B})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/B})_{x''y''z''} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{C/B} = 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \times 0.2\mathbf{j} = \{-1\mathbf{i} + 3\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$
$$(\mathbf{a}_{C/B})_{xyz} = (\ddot{\mathbf{r}}_{C/B})_{xyz} = [(\ddot{\mathbf{r}}_{C/B})_{x''y''z''} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\dot{\mathbf{r}}_{C\,B})_{x''y''z''}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \mathbf{r}_{C/B} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\dot{\mathbf{r}}_{C/B})_{xyz}$$
$$= (2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \times 3\mathbf{j}) + (-6\mathbf{k} \times 0.2\mathbf{j}) + [5\mathbf{k} \times (-1\mathbf{i} + 3\mathbf{j})]$$
$$= \{-28.8\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$$

Movimiento de *C*

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B} + (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} = 2\mathbf{j} + 4\mathbf{i} \times 0.2\mathbf{j} + (-1\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$
$$= \{-1\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 0.8\mathbf{k}\} \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/B} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/B})_{xyz}$$
$$= (0.75\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) + (1.5\mathbf{i} \times 0.2\mathbf{j}) + [4\mathbf{i} \times (4\mathbf{i} \times 0.2\mathbf{j})]$$
$$+ 2[4\mathbf{i} \times (-1\mathbf{i} + 3\mathbf{j})] + (-28.8\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$$
$$= \{-28.8\mathbf{i} - 5.45\mathbf{j} + 32.3\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

SOLUCIÓN II

Ejes de coordenadas. Aquí consideraremos que los ejes x, y, z giran a

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = \{4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}\} \text{ rad/s}$$

Entonces $\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \mathbf{0}$.

Movimiento de *B*. Por las restricciones del problema $\boldsymbol{\omega}_1$ no cambia de dirección con respecto a X, Y, Z; sin embargo, la dirección de $\boldsymbol{\omega}_2$ se cambia por $\boldsymbol{\omega}_1$. Por consiguiente, para obtener $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ considere que los ejes x', y', z' coinciden con los ejes X, Y, Z en A, de modo que $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\omega}_1$. Entonces, al considerar la derivada de las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$,

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\Omega}} &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = [(\dot{\boldsymbol{\omega}}_1)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_1] + [(\dot{\boldsymbol{\omega}}_2)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2] \\ &= [1.5\mathbf{i} + \mathbf{0}] + [-6\mathbf{k} + 4\mathbf{i} \times 5\mathbf{k}] = \{1.5\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 6\mathbf{k}\} \text{ rad/s}^2\end{aligned}$$

Además, $\boldsymbol{\omega}_1$ cambia la dirección de $\mathbf{r}_B$ de modo que las derivadas con respecto al tiempo de $\mathbf{r}_B$ se determinan con los ejes primados antes definidos. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_B &= \dot{\mathbf{r}}_B = (\dot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_B \\ &= \mathbf{0} + 4\mathbf{i} \times (-0.5\mathbf{k}) = \{2\mathbf{j}\} \text{ m/s} \\ \mathbf{a}_B &= \ddot{\mathbf{r}}_B = [(\ddot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\dot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_B \\ &= [\mathbf{0} + \mathbf{0}] + 1.5\mathbf{i} \times (-0.5\mathbf{k}) + 4\mathbf{i} \times 2\mathbf{j} = \{0.75\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

Movimiento de *C* con respecto a *B*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_{xyz} &= \mathbf{0} \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{xyz} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{r}_{C/B} &= \{0.2\mathbf{j}\} \text{ m} \\ (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} &= \{3\mathbf{j}\} \text{ m/s} \\ (\mathbf{a}_{C/B})_{xyz} &= \{2\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

Movimiento de *C*

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B} + (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} \\ &= 2\mathbf{j} + [(4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{j})] + 3\mathbf{j} \\ &= \{-1\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 0.8\mathbf{k}\} \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/B} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/B})_{xyz} \\ &= (0.75\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) + [(1.5\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{j})] \\ &\quad + (4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times [(4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times 0.2\mathbf{j}] + 2[(4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times 3\mathbf{j}] + 2\mathbf{j} \\ &= \{-28.8\mathbf{i} - 5.45\mathbf{j} + 32.3\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}\end{aligned}$$

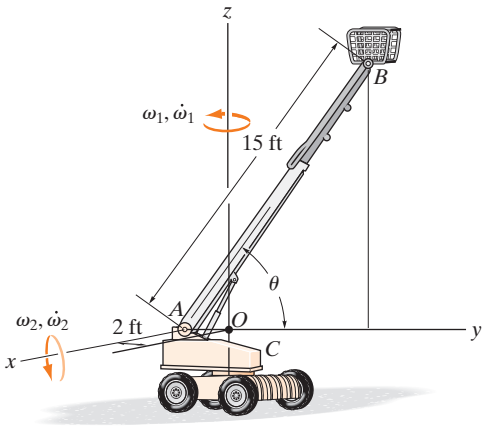
PROBLEMAS

20-37. Resuelva el ejemplo 20.5 de modo que los ejes x, y, z se muevan con translación curvilínea, $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ en cuyo caso parece que el collarín tiene tanto velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ como movimiento radial.

20-38. Resuelva el ejemplo 20.5 con los ejes x, y, z fijos en la varilla BD de modo que $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$. En este caso, parece que el collarín se mueve sólo radialmente hacia fuera a lo largo de BD; por consiguiente, $\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \mathbf{0}$.

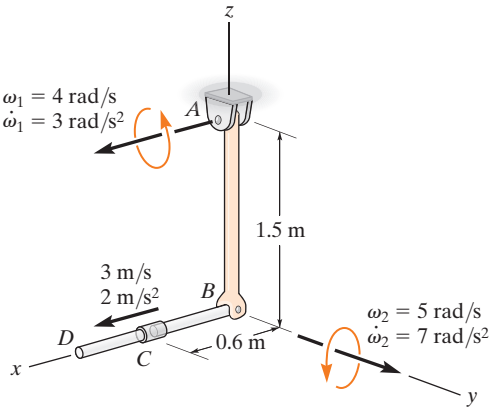
20-39. En el instante $\theta = 60°$, la pluma telescópica AB del elevador para construcción gira con una velocidad angular constante alrededor del eje z de $\omega_1 = 0.5$ rad/s, y con respecto al pasador A con una rapidez angular constante de $\omega_2 = 0.25$ rad/s. Al mismo tiempo, la pluma se extiende con una velocidad de 1.5 ft/s, y tiene una aceleración de 0.5 ft/s^2, ambas medidas con respecto al elevador para construcción. Determine la velocidad y la aceleración del punto B situado en el extremo de la pluma en este instante.

***20-40.** En el instante $\theta = 60°$, la pluma telescópica AB del elevador para construcción gira con una velocidad angular constante alrededor del eje z de $\omega_1 = 0.5$ rad/s y una aceleración angular de $\dot{\omega}_1 = 0.25$ rad/s^2, mientras que la pluma telescópica AB gira alrededor del pasador A con una velocidad angular de $\omega_2 = 0.25$ rad/s y una aceleración angular de $\dot{\omega}_2 = 0.1$ rad/s^2. Al mismo tiempo, el brazo se extiende con una velocidad de 1.5 ft/s, y tiene una aceleración de 0.5 ft/s^2, ambas medidas con respecto al marco de referencia. Determine la velocidad y la aceleración del punto B situado en el extremo de la pluma en este instante.



Probs. 20-39/40

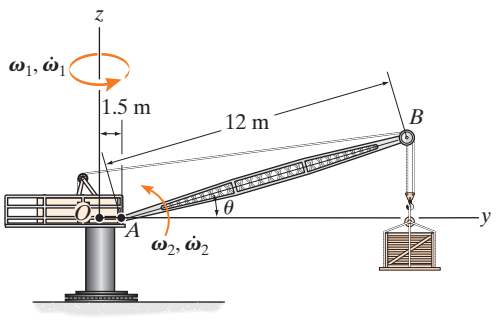
20-41. En el instante mostrado, el brazo AB está girando alrededor del eje fijo A con una velocidad angular $\omega_1 = 4$ rad/s y una aceleración angular $\dot{\omega}_1 = 3$ rad/s^2. En este mismo instante, la varilla BD gira con respecto a la varilla AB con una velocidad angular $\omega_2 = 5$ rad/s, que está aumentando a $\dot{\omega}_2 = 7$ rad/s^2. Además, el collarín C se mueve a lo largo de la varilla BD con una velocidad de 3 m/s y una aceleración de 2 m/s^2, ambas medidas con respecto a la varilla. Determine la velocidad y la aceleración del collarín en este instante.



Prob. 20-41

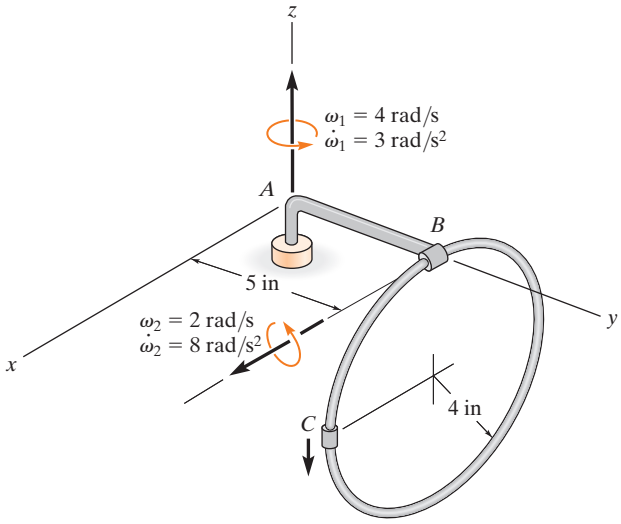
20-42. En el instante $\theta = 30°$, el bastidor de la grúa y el brazo AB giran con una velocidad angular constante de $\omega_1 = 1.5$ rad/s y $\omega_2 = 0.5$ rad/s, respectivamente. Determine la velocidad y la aceleración del punto B en este instante.

20-43. En el instante $\theta = 30°$, el bastidor de la grúa gira con una velocidad angular de $\omega_1 = 1.5$ rad/s y una aceleración angular de $\dot{\omega}_1 = 0.5$ rad/s^2, mientras que el brazo AB gira con una velocidad angular de $\omega_2 = 0.5$ rad/s y la aceleración angular de $\dot{\omega}_2 = 0.25$ rad/s^2. Determine la velocidad y la aceleración del punto B en este instante.



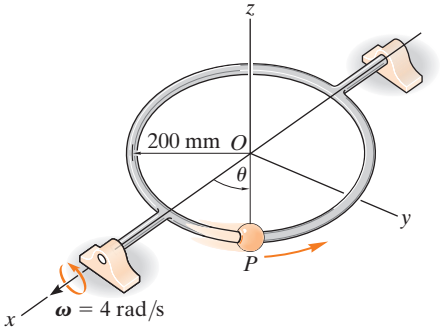
Probs. 20-42/43

***20-44.** En el instante mostrado, la varilla AB gira alrededor del eje z con una velocidad angular $\omega_1 = 4$ rad/s y una aceleración angular $\dot{\omega}_1 = 3$ rad/s^2. En este mismo instante, la varilla circular tiene un movimiento angular respecto a la varilla de la manera indicada. Si el collarín C se mueve hacia abajo alrededor de la varilla circular con una rapidez de 3 in/s, que está aumentando a 8 in/s^2, ambos medidos con respecto a la varilla. Determine la velocidad y la aceleración del collarín en este instante.



Prob. 20-44

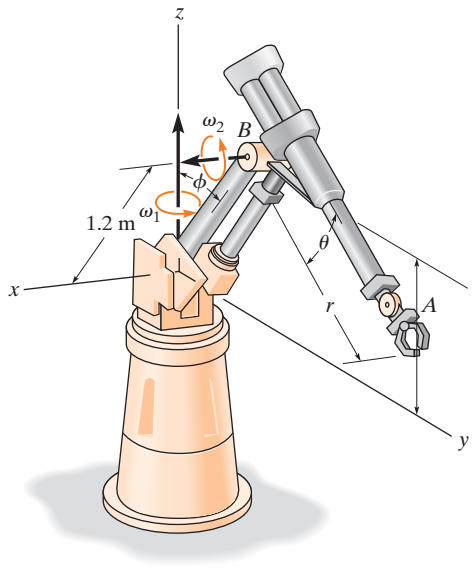
20-45. Las partícula P se desliza alrededor del aro circular con una velocidad angular constante de $\dot{\theta} = 6$ rad/s, mientras que el aro gira alrededor del eje x a una razón constante de $\omega = 4$ rad/s. Si en el instante mostrado el aro está en el plano x-y y el ángulo $\theta = 45°$, determine la velocidad y la aceleración de la partícula en este instante.



Prob. 20-45

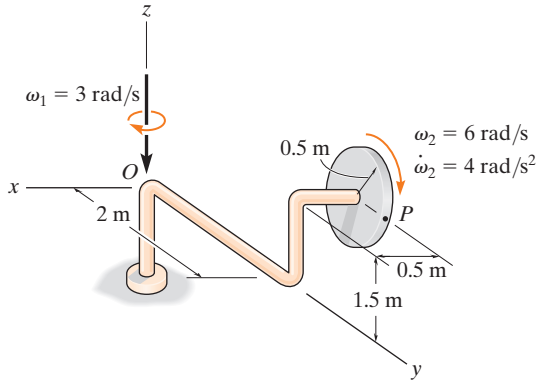
20-46. En el instante mostrado, el manipulador industrial gira alrededor del eje z a $\omega_1 = 5$ rad/s, y alrededor de la junta B a $\omega_2 = 2$ rad/s. Determine la velocidad y la aceleración de la tenaza A en este instante, cuando $\phi = 30°$, $\theta = 45°$ y $r = 1.6$ m.

20-47. En el instante mostrado, el manipulador industrial gira alrededor del eje z a $\omega_1 = 5$ rad/s y $\dot{\omega}_1 = 2$ rad/s^2, y alrededor de la junta B a $\omega_2 = 2$ rad/s y $\dot{\omega}_2 = 3$ rad/s^2. Determine la velocidad y la aceleración de la tenaza A en este instante, cuando $\phi = 30°$, $\theta = 45°$ y $r = 1.6$ m.



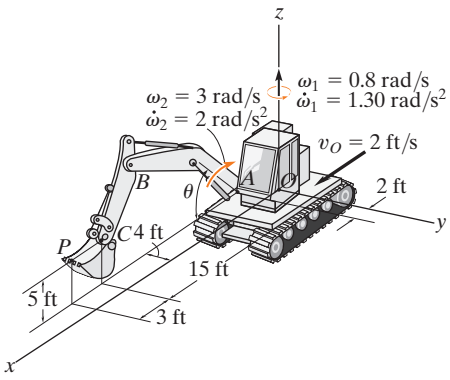
Probs. 20-46/47

***20-48.** En el instante dado, la varilla gira alrededor del eje z con una velocidad angular constante $\omega_1 = 3$ rad/s. En este mismo instante, el disco gira a $\omega_2 = 6$ rad/s cuando $\dot{\omega}_2 = 4$ rad/s^2, ambas medidas con respecto a la varilla. Determine la velocidad y la aceleración del punto P ubicado sobre el disco en este instante.



Prob. 20-48

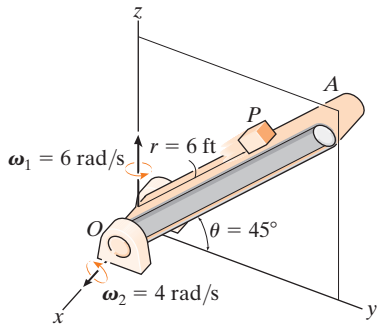
20-49. En el instante mostrado, la retroexcavadora se desplaza hacia adelante a una rapidez constante $v_O = 2$ ft/s, y el brazo ABC gira con respecto al eje z con una velocidad angular $\omega_1 = 0.8$ rad/s y una aceleración angular $\dot{\omega}_1 = 1.30$ rad/s^2. En este mismo instante, el brazo gira con $\omega_2 = 3$ rad/s cuando $\dot{\omega}_2 = 2$ rad/s^2, ambas medidas con respecto al bastidor. Determine la velocidad y la aceleración del punto P ubicado sobre el cucharón en este instante.



Prob. 20-49

20-50. En el instante mostrado, el brazo OA de la banda transportadora gira alrededor del eje z con una velocidad angular constante $\omega_1 = 6$ rad/s, mientras que, en el mismo instante, el brazo gira hacia arriba a una velocidad angular constante $\omega_2 = 4$ rad/s. Si la banda transportadora gira a razón constante de $\dot{r} = 5$ ft/s, determine la velocidad y la aceleración del paquete P en el instante mostrado. Desprecie el tamaño del paquete.

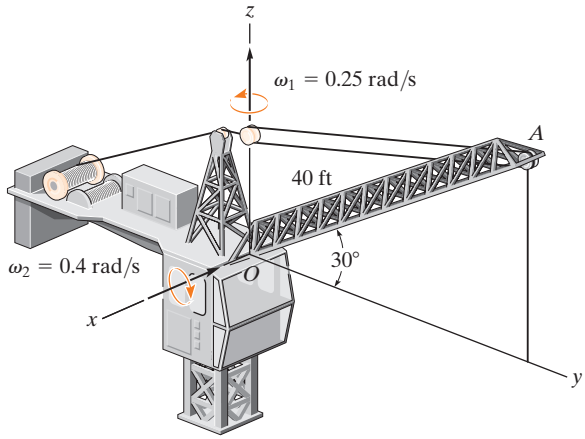
20-51. En el instante mostrado, el brazo OA de la banda transportadora gira alrededor del eje z con una velocidad angular constante $\omega_1 = 6$ rad/s; mientras que, en el mismo instante, el brazo gira hacia arriba a una velocidad angular constante $\omega_2 = 4$ rad/s. Si la banda transportadora gira a razón de $\dot{r} = 5$ ft/s, que está aumentando a $\ddot{r} = 8$ ft/s^2, determine la velocidad y la aceleración del paquete P en el instante indicado. Desprecie el tamaño del paquete.



Probs. 20-50/51

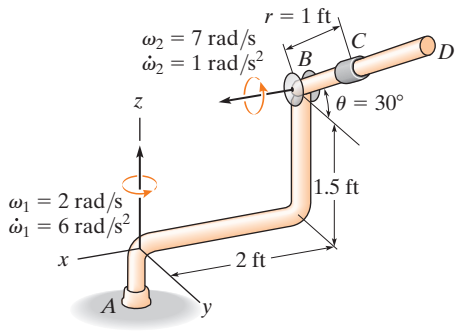
***20-52.** La grúa gira alrededor del eje z con una velocidad angular constante $\omega_1 = 0.25$ rad/s, mientras que el brazo OA está girando hacia abajo con una velocidad angular constante $\omega_2 = 0.4$ rad/s. Calcule la velocidad y la aceleración del punto A situado en la parte superior del brazo en el instante mostrado.

20-53. Resuelva el problema 20-52 si los movimientos angulares están aumentando a $\dot{\omega}_1 = 0.4$ rad/s^2 y $\dot{\omega}_2 = 0.8$ rad/s^2 en el instante mostrado.



Probs. 20-52/53

20-54. En el instante mostrado, el brazo AB está girando sobre el cojinete fijo con una velocidad angular $\omega_1 = 2$ rad/s y una aceleración angular $\dot{\omega}_1 = 6$ rad/s^2. En el mismo instante, la varilla BD gira con respecto a la varilla AB a $\omega_2 = 7$ rad/s, que está aumentando a $\dot{\omega}_2 = 1$ rad/s^2. Además, el collarín C se mueve a lo largo de la varilla BD con una velocidad $\dot{r} = 2$ ft/s y una *desaceleración* $\ddot{r} = -0.5$ ft/s^2, ambas medidas con respecto a la varilla. Determine la velocidad y la aceleración del collarín en este instante.



Prob. 20-54

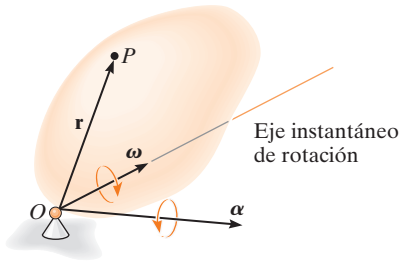
REPASO DEL CAPÍTULO

Rotación alrededor de un punto fijo

Cuando un cuerpo gira alrededor de un punto fijo O, entonces los puntos en el cuerpo siguen una trayectoria que queda en la superficie de una esfera con su centro en O.

Como la aceleración angular es una razón de cambio con respecto al tiempo de la velocidad angular, entonces es necesario tener en cuenta los cambios de magnitud y dirección de $\boldsymbol{\omega}$ cuando se determine su derivada con respecto al tiempo. Para hacerlo, a menudo se especifica la velocidad angular en función de sus movimientos parciales, de modo que la dirección de algunos de estos movimientos permanece constante con respecto a los ejes rotatorios x, y, z. Si éste es el caso, entonces la derivada con respecto al eje fijo puede determinarse con $\dot{\mathbf{A}} = (\dot{\mathbf{A}})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}$.

Una vez conocidas $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{a}$, entonces pueden determinarse la velocidad y aceleración de cualquier punto P del cuerpo.



$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a}_P = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

Movimiento general

Si el cuerpo experimenta movimiento general, entonces el movimiento de un punto B del cuerpo puede relacionarse con el movimiento de otro punto A mediante un análisis de movimiento relativo, con ejes en traslación fijos en A.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

Análisis de movimiento relativo por medio de ejes en traslación y en rotación

El movimiento de dos puntos A y B de un cuerpo, una serie de cuerpos conectados, o cada punto localizado en dos trayectorias diferentes, puede relacionarse usando un análisis de movimiento relativo con ejes en rotación y en traslación en A.

Cuando se aplican las ecuaciones para determinar $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{a}_B$, es importante tener en cuenta los cambios de magnitud y dirección de $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_{B/A}$, $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Omega}_{xyz}$ cuando se consideran su derivadas con respecto al tiempo para determinar $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{a}_A$, $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$, $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$, $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$, y $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{xyz}$. Para hacer esto de manera correcta debemos utilizar la ecuación 20-6.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

Capítulo 21

(© Derek Watt/Alamy)

Las fuerzas que actúan sobre cada una de las motocicletas pueden determinarse con las ecuaciones de movimiento que se analizan en este capítulo.

Cinética tridimensional de un cuerpo rígido

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Presentar los métodos para determinar los momentos de inercia y los productos de inercia de un cuerpo con respecto a varios ejes.
- Demostrar cómo se aplican los principios de trabajo y energía, y el impulso y la cantidad de movimiento angular y lineal a un cuerpo rígido que tiene movimiento tridimensional.
- Desarrollar y aplicar las ecuaciones de movimiento en tres dimensiones.
- Estudiar el movimiento giroscópico y sin par de torsión.

*21.1 Momentos y productos de inercia

Cuando se estudió la cinética plana de un cuerpo, fue necesario presentar el momento de inercia I_G, el cual se calculó con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento y que pasa por el centro de masa G del cuerpo. Para el análisis cinético del movimiento tridimensional, en ocasiones será necesario calcular seis cantidades inerciales. Estos términos, llamados momentos y productos de inercia, describen en una forma particular la distribución de la masa de un cuerpo con respecto a un sistema de coordenadas proporcionado con su orientación y punto de origen especificados.

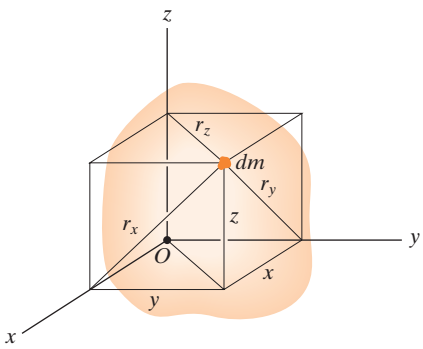


Fig. 21-1

Momento de inercia. Considere el cuerpo rígido que se muestra en la figura 21-1. El *momento de inercia* de un elemento diferencial *dm* del cuerpo con respecto a cualquiera de los tres ejes de coordenadas se define como el producto de la masa del elemento por el cuadrado de la distancia más corta del eje al elemento. Por ejemplo, como se indica en la figura, $r_x = \sqrt{y^2 + z^2}$, por lo que el momento de inercia de masa del elemento con respecto al eje *x* es

$$dI_{xx} = r_x^2\, dm = (y^2 + z^2)\, dm$$

El momento de inercia I_{xx} puede determinarse al integrar esta expresión a lo largo de toda su masa. Por consiguiente, para cada uno de los ejes, podemos escribir

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_m r_x^2 dm = \int_m (y^2 + z^2)\, dm \\ I_{yy} &= \int_m r_y^2 dm = \int_m (x^2 + z^2)\, dm \\ I_{zz} &= \int_m r_z^2 dm = \int_m (x^2 + y^2)\, dm \end{aligned} \tag{21-1}$$

Se observa que el momento de inercia *siempre es una cantidad positiva*, ya que es la suma del producto de la masa *dm*, la cual siempre es positiva, y las distancias al cuadrado.

Producto de inercia. El *producto de inercia* de un elemento diferencial *dm* con respecto a un sistema de *dos planos ortogonales* se define como el producto de la masa del elemento por las distancias perpendiculares (o más cortas) de los planos al elemento. Por ejemplo, esta distancia es *x* al plano *y*-*z*, y *y* al plano *x*-*z* (fig. 21-1). Por consiguiente, el producto de inercia dI_{xy} para el elemento es

$$dI_{xy} = xy\, dm$$

Considere también que $dI_{yx} = dI_{xy}$. Al integrarlos a largo de toda la masa, los productos de inercia del cuerpo con respecto a cada combinación de planos se expresan como

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = \int_m xy\, dm \\ I_{yz} &= I_{zy} = \int_m yz\, dm \\ I_{xz} &= I_{zx} = \int_m xz\, dm \end{aligned} \tag{21-2}$$

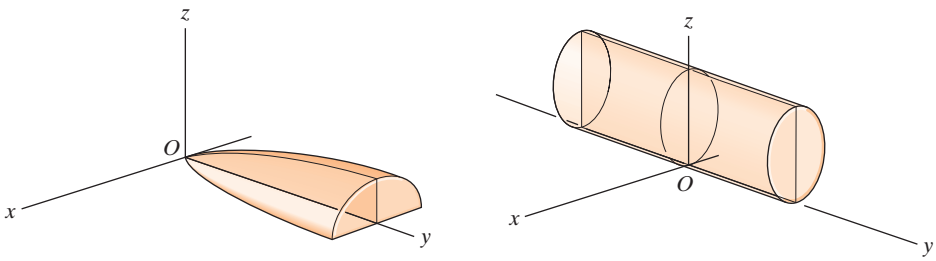


Fig. 21-2

A diferencia del momento de inercia, el cual siempre es positivo, el producto de inercia puede ser positivo, negativo o cero. El resultado depende de los signos algebraicos de las dos coordenadas definitorias, las cuales varían independientemente una de otra. En específico, si alguno o ambos planos ortogonales son *planos de simetría* para la masa, el *producto de inercia* con respecto a estos planos será *cero*. En tales casos, los elementos de masa ocurrirán en *pares* localizados a cada lado del plano de simetría. En un lado del plano, el producto de inercia del elemento será positivo, mientras que en el otro el producto de inercia del elemento correspondiente será negativo y la suma por ende es cero. Ejemplos de esto se ilustran en las figuras 21-2. En el primer caso (fig. 21-2*a*), el plano y-z es un plano de simetría y, por consiguiente, $I_{xy} = I_{xz} = 0$. El cálculo de I_{yz} dará un resultado *positivo*, ya que todos los elementos de masa se localizan al utilizar sólo coordenadas y y z positivas. Para el cilindro, con los ejes de coordenadas localizados como se indica en la figura 21-2*b*, los planos x-z y y-z son planos de simetría. Por lo tanto, $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$.

Teoremas de los ejes paralelos y del plano paralelo. En la sección 17.1 se describieron las técnicas de integración que se utilizaron para determinar el momento de inercia de un cuerpo. Además, se analizaron métodos para determinar el momento de inercia de un cuerpo compuesto, es decir, un cuerpo compuesto de segmentos más simples, los cuales aparecen en las tablas de los forros y las guardas de este libro. En ambos casos, con frecuencia se utiliza en los cálculos el *teorema de los ejes paralelos*, el cual, desarrollado en la sección 17.1, nos permite transferir el momento de inercia de un cuerpo, desde un eje que pasa por su centro de masa G hasta un eje paralelo que pasa por algún otro punto. Si las coordenadas de G son x_G, y_G, z_G definidas con respecto a los ejes x, y, z (fig. 21-3), entonces las ecuaciones de los ejes paralelos utilizadas para calcular los momentos de inercia con respecto a los ejes x, y, z son

$$\begin{aligned} I_{xx} &= (I_{x'x'})_G + m(y_G^2 + z_G^2) \\ I_{yy} &= (I_{y'y'})_G + m(x_G^2 + z_G^2) \\ I_{zz} &= (I_{z'z'})_G + m(x_G^2 + y_G^2) \end{aligned} \tag{21-3}$$

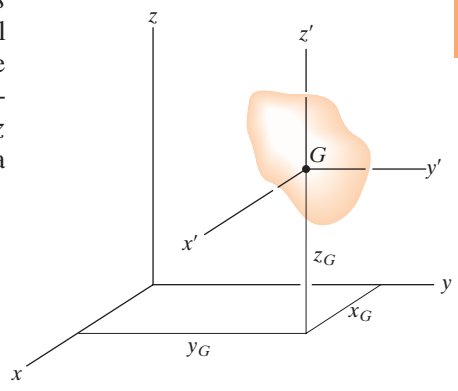


Fig. 21-3

21

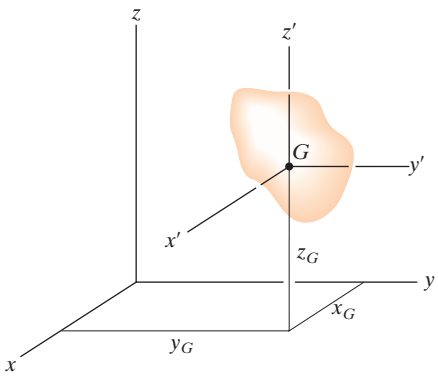


Fig. 21-3 (reiterada)

Los productos de inercia de un cuerpo compuesto se calculan de la misma manera que los momentos de inercia de un cuerpo. En este caso, sin embargo, es importante el *teorema del plano paralelo*, el cual se utiliza para transferir los productos de inercia del cuerpo con respecto a un sistema de tres planos ortogonales que pasan por el centro de masa del cuerpo, a un sistema correspondiente de tres planos paralelos que pasan por algún otro punto O. Al definir las distancias perpendiculares entre los planos como x_G, y_G y z_G (fig. 21-3), las ecuaciones del plano paralelo se escriben como

$$\begin{aligned} I_{xy} &= (I_{x'y'})_G + mx_G y_G \\ I_{yz} &= (I_{y'z'})_G + my_G z_G \\ I_{zx} &= (I_{z'x'})_G + mz_G x_G \end{aligned} \tag{21-4}$$

La derivación de estas fórmulas es similar a la de la ecuación de los ejes paralelos, sección 17.1.

Tensor de inercia. Por consiguiente, las propiedades inerciales de un cuerpo están totalmente caracterizadas por nueve términos, seis de los cuales son independientes entre sí. Este conjunto de términos se define utilizando las ecuaciones 21-1 y 21-2 y se escribe como

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Esta matriz se denomina *tensor de inercia**. Tiene un conjunto único de valores para un cuerpo, cuando se determina para cada ubicación del origen O y orientación de los ejes de coordenadas.

En general, para el punto O podemos especificar una inclinación única de los ejes, con la cual los productos de inercia del cuerpo son cero cuando se calculan con respecto a estos ejes. Al hacerlo así se dice que el tensor de inercia está "diagonalizado" y puede escribirse en la forma simplificada

$$\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

En este caso, $I_x = I_{xx}$, $I_y = I_{yy}$ e $I_z = I_{zz}$ son los denominados *momentos de inercia principales* del cuerpo, que se calculan con respecto a los *ejes de inercia principales*. De estos tres momentos de inercia principales, uno será máximo y otro un mínimo del momento de inercia del cuerpo.

Las dinámicas del transbordador espacial durante su órbita alrededor de la Tierra se pueden predecir tan sólo si sus momentos y productos de inercia se conocen con respecto a su centro de masa. (© Ablestock/Getty Images)

*Los signos negativos están aquí como una consecuencia del desarrollo de una cantidad de movimiento angular, ecuaciones 21-10.

La determinación matemática de las direcciones de los ejes de inercia principales no se estudiará aquí (vea el problema 21-22). Sin embargo, hay muchos casos donde los ejes principales se determinan por inspección. Del planteamiento anterior se desprende que si los ejes de coordenadas están orientados de modo que *dos* de los tres planos ortogonales que los contienen son planos de *simetría* del cuerpo, entonces todos los productos de inercia del cuerpo son cero con respecto a estos planos de coordenadas y, por consiguiente, estos ejes de coordenadas son ejes de inercia principales. Por ejemplo, los ejes x, y, z de la figura 21-2*b* representan los ejes de inercia principales del cilindro en el punto O.

Momento de inercia con respecto a un eje arbitrario. Considere el cuerpo que se muestra en la figura 21-4, donde los nueve elementos del tensor de inercia se determinaron con respecto a los ejes x, y, z con su origen en O. En este caso, deseamos determinar el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje Oa, cuya dirección está definida por el vector unitario $\mathbf{u}_a$. Por definición, $I_{Oa} = \int b^2\, dm$, donde b es la *distancia perpendicular* de dm a Oa. Si la posición de dm se localiza por medio de $\mathbf{r}$, entonces $b = r \operatorname{sen} \theta$, la cual representa la *magnitud* del producto vectorial $\mathbf{u}_a \times \mathbf{r}$. Por consiguiente, el momento de inercia se expresa como

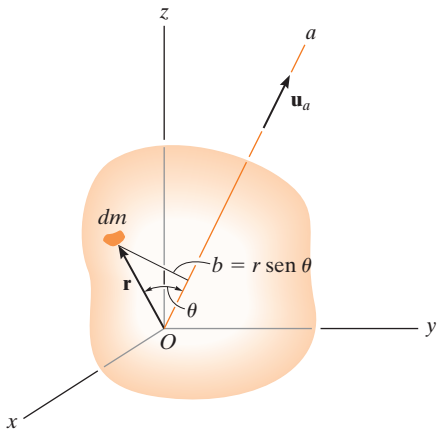


Fig. 21-4

$$I_{Oa} = \int_m |(\mathbf{u}_a \times \mathbf{r})|^2 dm = \int_m (\mathbf{u}_a \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{u}_a \times \mathbf{r}) dm$$

Siempre que $\mathbf{u}_a = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{u}_a \times \mathbf{r} = (u_y z - u_z y)\mathbf{i} + (u_z x - u_x z)\mathbf{j} + (u_x y - u_y x)\mathbf{k}$. Luego de sustituir y realizar el producto escalar, el momento de inercia es

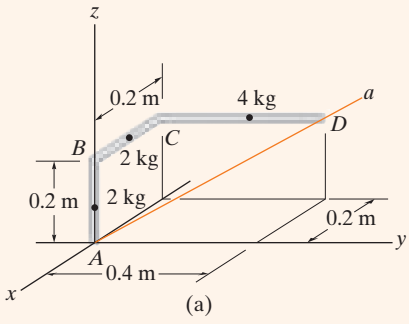
$$\begin{aligned} I_{Oa} &= \int_m [(u_y z - u_z y)^2 + (u_z x - u_x z)^2 + (u_x y - u_y x)^2] dm \\ &= u_x^2 \int_m (y^2 + z^2) dm + u_y^2 \int_m (z^2 + x^2) dm + u_z^2 \int_m (x^2 + y^2)\, dm \\ &\quad - 2u_x u_y \int_m xy\, dm - 2u_y u_z \int_m yz\, dm - 2u_z u_x \int_m zx\, dm \end{aligned}$$

Si reconocemos que las integrales son los momentos y productos de inercia del cuerpo, ecuaciones 21-1 y 21-2, tenemos

$$I_{Oa} = I_{xx}u_x^2 + I_{yy}u_y^2 + I_{zz}u_z^2 - 2I_{xy}u_x u_y - 2I_{yz}u_y u_z - 2I_{zx}u_z u_x \qquad (21\text{-}5)$$

Por lo tanto, si el tensor de inercia se especifica para los ejes x, y, z, puede determinarse el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje inclinado Oa. Para el cálculo, debe determinarse la dirección de los cosenos u_x, u_y, u_z de los ejes. Estos términos especifican los cosenos de los ángulos de dirección de las coordenadas α, β, γ formados entre el eje positivo Oa y los ejes positivos x, y, z, respectivamente (vea el apéndice B).

EJEMPLO 21.1



(a)

Determine el momento de inercia de la varilla acodada que se ilustra en la figura 21-5*a* con respecto al eje *Aa*. La masa de cada uno de los tres segmentos se incluye en la figura.

SOLUCIÓN

Antes de aplicar la ecuación 21-5 es necesario determinar primero los momentos y los productos de inercia de la varilla con respecto a los ejes *x*, *y*, *z*. Esto se hace mediante la fórmula del momento de inercia de una varilla delgada, $I = \frac{1}{12}ml^2$, y los teoremas de los ejes paralelos y del plano paralelo, ecuaciones 21-3 y 21-4. Al dividir la varilla en tres partes y ubicar el centro de masa de cada segmento (fig. 21-5*b*), tenemos

$$I_{xx} = \left[\tfrac{1}{12}(2)(0.2)^2 + 2(0.1)^2\right] + [0 + 2(0.2)^2] + \left[\tfrac{1}{12}(4)(0.4)^2 + 4((0.2)^2 + (0.2)^2)\right] = 0.480\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{yy} = \left[\tfrac{1}{12}(2)(0.2)^2 + 2(0.1)^2\right] + \left[\tfrac{1}{12}(2)(0.2)^2 + 2((-0.1)^2 + (0.2)^2)\right] + [0 + 4((-0.2)^2 + (0.2)^2)] = 0.453\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{zz} = \left[0 + 0\right] + \left[\tfrac{1}{12}(2)(0.2)^2 + 2(-0.1)^2\right] + \left[\tfrac{1}{12}(4)(0.4)^2 + 4((-0.2)^2 + (0.2)^2)\right] = 0.400\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{xy} = [0 + 0] + [0 + 0] + [0 + 4(-0.2)(0.2)] = -0.160\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{yz} = [0 + 0] + [0 + 0] + [0 + 4(0.2)(0.2)] = 0.160\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{zx} = [0 + 0] + [0 + 2(0.2)(-0.1)] + [0 + 4(0.2)(-0.2)] = -0.200\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

El eje *Aa* se define por medio del vector unitario

$$\mathbf{u}_{Aa} = \frac{\mathbf{r}_D}{r_D} = \frac{-0.2\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j} + 0.2\mathbf{k}}{\sqrt{(-0.2)^2 + (0.4)^2 + (0.2)^2}} = -0.408\mathbf{i} + 0.816\mathbf{j} + 0.408\mathbf{k}$$

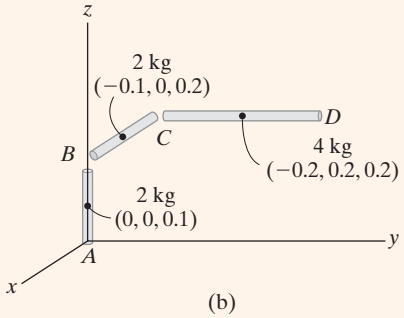
Por consiguiente,

$$u_x = -0.408 \quad u_y = 0.816 \quad u_z = 0.408$$

Si sustituimos estos resultados en la ecuación 21-5, obtenemos

$$\begin{aligned} I_{Aa} &= I_{xx}u_x^2 + I_{yy}u_y^2 + I_{zz}u_z^2 - 2I_{xy}u_xu_y - 2I_{yz}u_yu_z - 2I_{zx}u_zu_x \\ &= 0.480(-0.408)^2 + (0.453)(0.816)^2 + 0.400(0.408)^2 \\ &\quad - 2(-0.160)(-0.408)(0.816) - 2(0.160)(0.816)(0.408) \\ &\quad - 2(-0.200)(0.408)(-0.408) \\ &= 0.169\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

Resp.



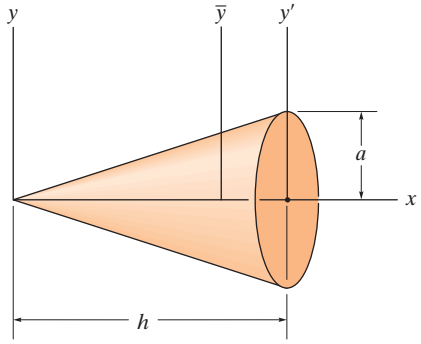
(b)

Fig. 21-5

PROBLEMAS

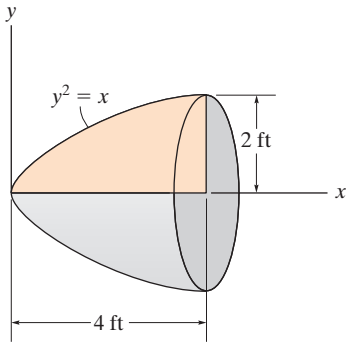
21-1. Demuestre que la suma de los momentos de inercia de un cuerpo, $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}$, es independiente de la orientación de los ejes x, y, z y que, por lo tanto, depende tan sólo de la ubicación del origen.

21-2. Determine el momento de inercia del cono con respecto a un eje vertical $\bar{y}$ que pasa por el centro de masa del cono. ¿Cuál es el momento de inercia con respecto a un eje paralelo y' que pasa a través del diámetro de la base del cono? La masa del cono es m.



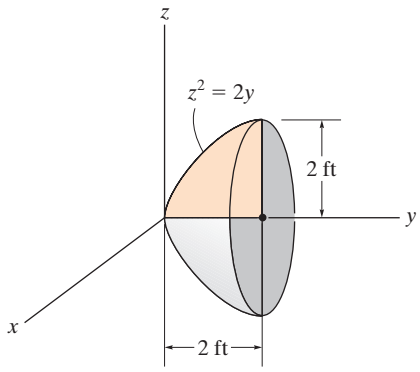
Prob. 21-2

21-3. Determine el momento de inercia I_y del sólido que se forma al girar el área sombreada alrededor del eje x. La densidad del material es $\rho = 12$ slug/ft^3.



Prob. 21-3

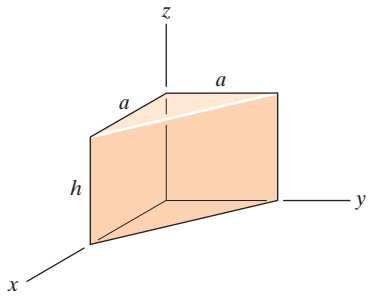
***21-4.** Determine los momentos de inercia I_x e I_y del paraboloide de revolución. La masa del paraboloide es 20 slugs.



Prob. 21-4

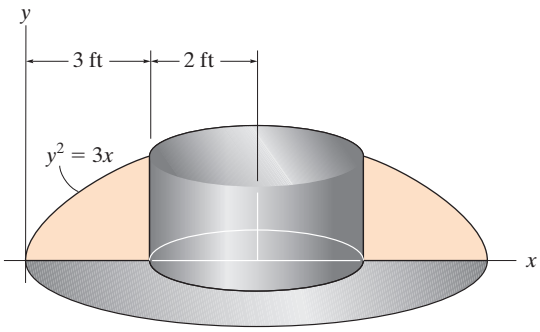
21-5. Por integración directa, determine el producto de inercia I_{yz} para el prisma homogéneo. La densidad del material es ρ. Exprese el resultado en términos de la masa total m del prisma.

21-6. Por integración directa, determine el producto de inercia I_{xy} para el prisma homogéneo. La densidad del material es ρ. Exprese el resultado en términos de la masa total m del prisma.



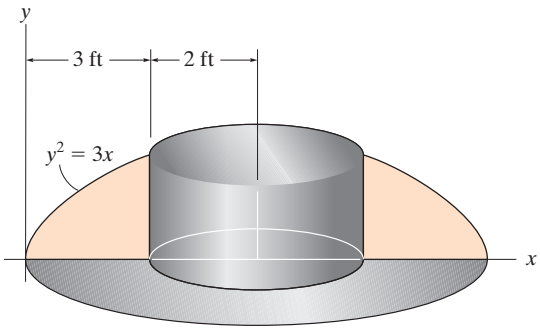
Probs. 21-5/6

21-7. Determine el producto de inercia I_{xy} del objeto que se forma al girar el área sombreada alrededor la línea $x = 5$ ft. Exprese el resultado en términos de la densidad del material, r.



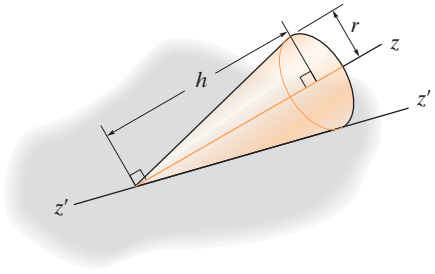
Prob. 21-7

***21-8.** Determine el momento de inercia I_y del objeto que se forma al girar el área sombreada alrededor de la línea $x = 5$ ft. Exprese el resultado en términos de la densidad del material, ρ.



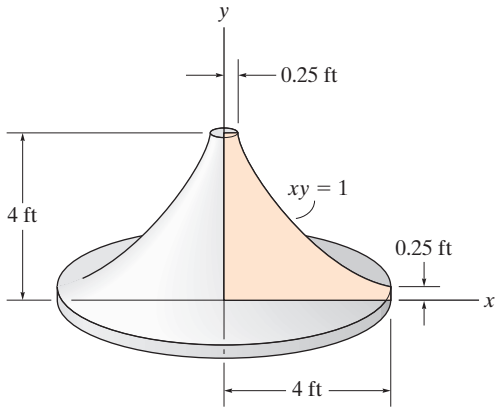
Prob. 21-8

21-9. Determine el momento de inercia del cono con respecto al eje z'. El peso del cono es de 15 lb, la *altura* es $h = 1.5$ ft y el radio es $r = 0.5$ ft.



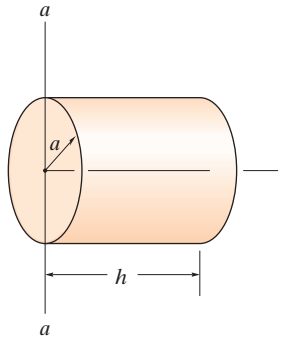
Prob. 21-9

21-10. Determine los radios de giro k_x y k_y para el sólido que se forma al girar el área sombreada alrededor del eje y. La densidad del material es ρ.



Prob. 21-10

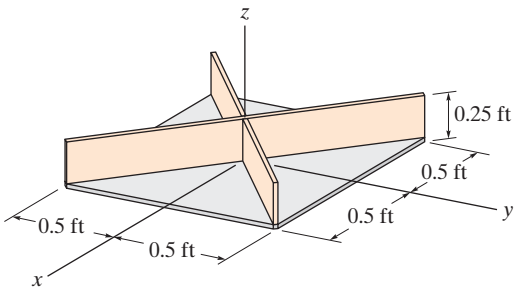
21-11. Determine el momento de inercia del cilindro con respecto al eje *a-a* del cilindro. El cilindro tiene una masa m.



Prob. 21-11

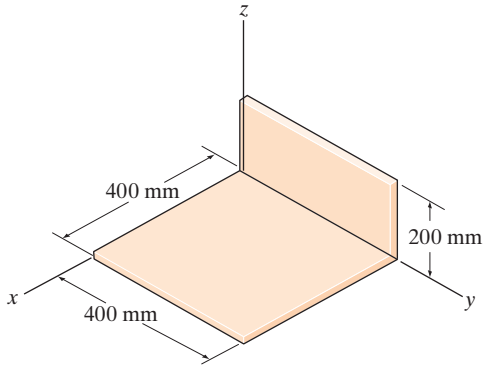
***21-12.** Determine el momento de inercia I_{xx} del ensamble compuesto por placas. Las placas tienen un peso específico de 6 lb/ft^2.

21-13. Determine el producto de inercia I_{yz} del ensamble compuesto por placas. Las placas tienen un peso de 6 lb/ft^2.



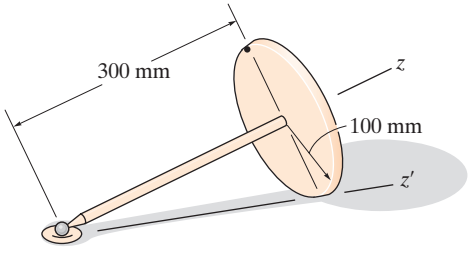
Probs. 21-12/13

21-14. Determine los productos de inercia I_{xy}, I_{yz} e I_{xz} de la placa delgada. El material tiene una densidad por unidad de área de 50 kg/m^2.



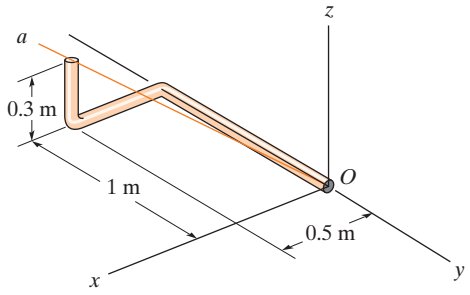
Prob. 21-14

21-15. Determine el momento de inercia, tanto de la varilla de 1.5 kg como del disco de 4 kg, con respecto al eje z'.



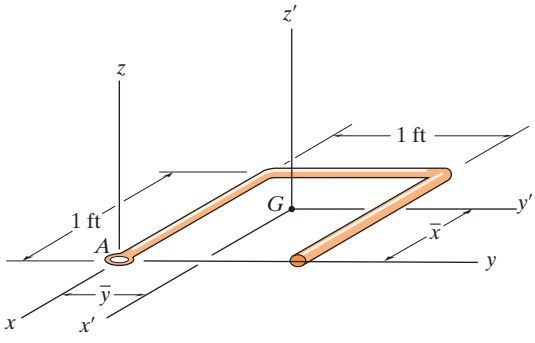
Prob. 21-15

***21-16.** La varilla doblada tiene una masa de 3 kg/m. Determine el momento de inercia de la varilla con respecto al eje O-a.



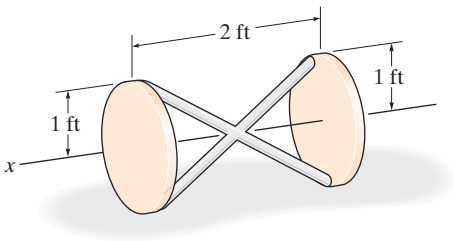
Prob. 21-16

21-17. La varilla doblada tiene un peso de 1.5 lb/ft. Localice el centro de gravedad $G(\bar{x}, \bar{y})$ y determine los momentos de inercia principales $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{z'}$ de la varilla con respecto a los ejes x', y', z'.



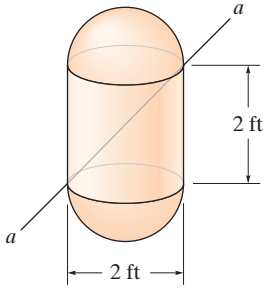
Prob. 21-17

21-18. Determine el momento de inercia del ensamble de varillas y discos con respecto al eje *x*. Cada uno de los discos tiene un peso de 12 lb. Cada una de las varillas tiene un peso de 4 lb, y sus extremos se extienden hasta los bordes de los discos.



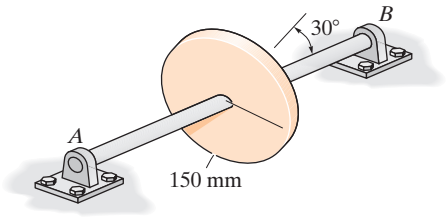
Prob. 21-18

21-19. Determine el momento de inercia del cuerpo compuesto con respecto al eje *a*-*a*. El cilindro pesa 20 lb y cada hemisferio pesa 10 lb.



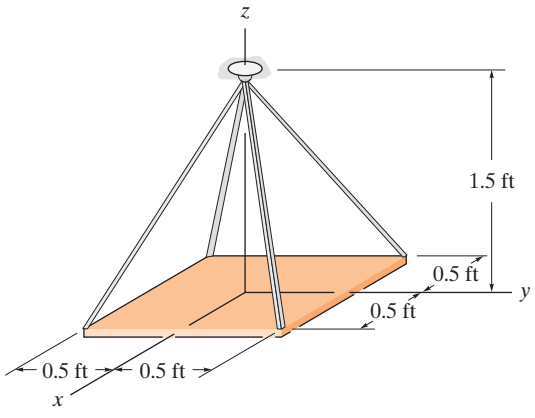
Prob. 21-19

***21-20.** Determine el momento de inercia del disco con respecto al eje de la flecha *AB*. El disco tiene una masa de 15 kg.



Prob. 21-20

21-21. La placa delgada tiene un peso de 5 lb y cada una de las cuatro varillas pesa 3 lb. Determine el momento de inercia del ensamble con respecto al eje *z*.



Prob. 21-21

21

21.2 Cantidad de movimiento angular

En esta sección desarrollaremos las ecuaciones necesarias que se usaron para determinar la cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido con respecto a un punto arbitrario. Estas ecuaciones permitirán desarrollar tanto el principio de impulso y cantidad de movimiento como las ecuaciones de movimiento de rotación para un cuerpo rígido.

Considere el cuerpo rígido que se muestra en la figura 21-6, el cual tiene una masa m y centro de gravedad en G. El sistema de coordenadas X, Y, Z representa un marco de referencia inercial y, por lo tanto, sus ejes están fijos o se trasladan a una velocidad constante. La cantidad de movimiento angular medida a partir de esta referencia se determinará con respecto al punto arbitrario A. Los vectores de posición $\mathbf{r}_A$ y $\boldsymbol{\rho}_A$ se trazan del origen de las coordenadas al punto A y de éste a la partícula $i$ésima del cuerpo. Si la masa de la partícula es m_i, la cantidad de movimiento angular con respecto al punto A es

$$(\mathbf{H}_A)_i = \boldsymbol{\rho}_A \times m_i \mathbf{v}_i$$

donde $\mathbf{v}_i$ representa la velocidad de la partícula medida a partir del sistema de coordenadas X, Y, Z. Si la velocidad angular del cuerpo es $\boldsymbol{\omega}$ en el instante considerado, $\mathbf{v}_i$ puede relacionarse con la velocidad de A aplicando la ecuación 20-7, es decir,

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(\mathbf{H}_A)_i &= \boldsymbol{\rho}_A \times m_i(\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) \\ &= (\boldsymbol{\rho}_A m_i) \times \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\rho}_A \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) m_i\end{aligned}$$

La suma de los momentos de todas las partículas del cuerpo requiere una integración. Puesto que $m_i \to dm$, tenemos

$$\mathbf{H}_A = \left(\int_m \boldsymbol{\rho}_A dm \right) \times \mathbf{v}_A + \int_m \boldsymbol{\rho}_A \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) dm \qquad (21\text{-}6)$$

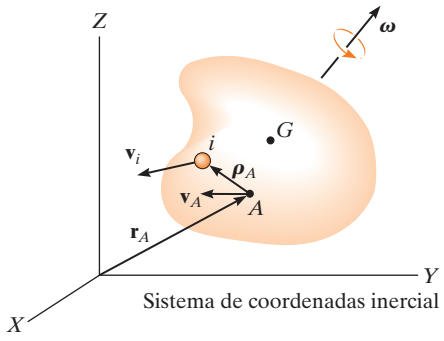


Fig. 21-6

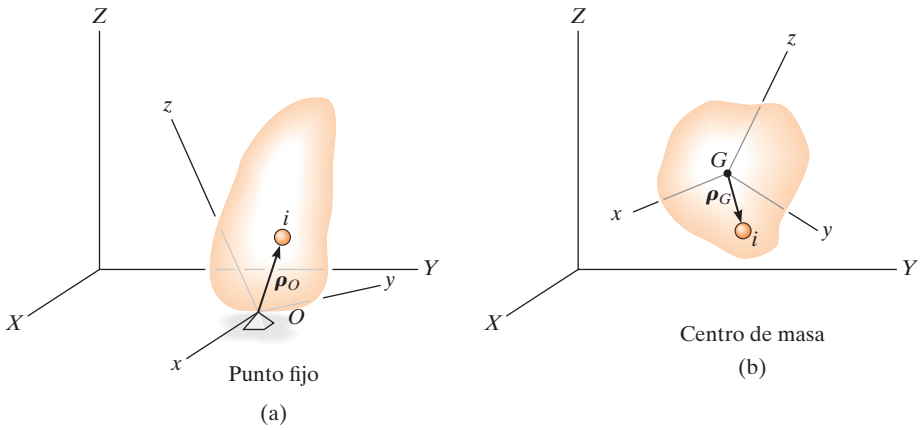


Fig. 21-7

Punto fijo *O*. Si A llega a ser un *punto fijo* O en el cuerpo (fig. 21-7*a*), entonces $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ y la ecuación 21-6 se reduce a

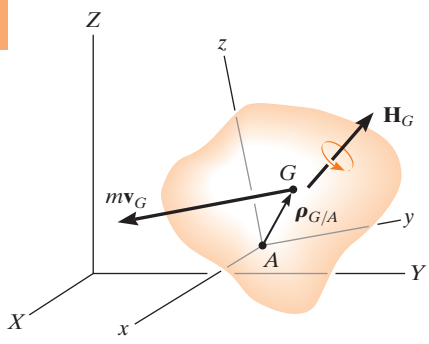
$$\mathbf{H}_O = \int_m \boldsymbol{\rho}_O \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_O)\, dm \tag{21-7}$$

Centro de masa *G*. Si A está en el *centro de masa* G del cuerpo (fig. 21-7*b*), entonces $\int_m \boldsymbol{\rho}_A\, dm = \mathbf{0}$ y

$$\mathbf{H}_G = \int_m \boldsymbol{\rho}_G \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_G)\, dm \tag{21-8}$$

Punto arbitrario *A*. En general, A puede ser un punto diferente de O o G (fig. 21-7*c*) en cuyo caso, la ecuación 21-6 puede, sin embargo, simplificarse a la siguiente forma (vea el problema 21-23).

$$\mathbf{H}_A = \boldsymbol{\rho}_{G/A} \times m\mathbf{v}_G + \mathbf{H}_G \tag{21-9}$$



Aquí la cantidad de movimiento angular se compone de dos partes: el momento de la cantidad de movimiento lineal $m\mathbf{v}_G$ del cuerpo con respecto al punto A sumado (vectorialmente) a la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$. También puede utilizarse la ecuación 21-9 para determinar la cantidad de movimiento angular del cuerpo con respecto a un punto fijo O. Los resultados, desde luego, serán los mismos que se determinaron con la ecuación 21-7 más conveniente.

Componentes rectangulares de *H*. Para un uso práctico de las ecuaciones 21-7 a 21-9, la cantidad de movimiento angular debe expresarse en función de sus componentes escalares. Para este propósito, resulta

conveniente seleccionar un segundo sistema de ejes x, y, z con una orientación arbitraria con respecto a los ejes X, Y, Z (fig. 21-7) y, para una formulación general, observe que las ecuaciones 21-7 y 21-8 son de la forma

$$\mathbf{H} = \int_m \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm$$

Al expresar $\mathbf{H}$, $\boldsymbol{\rho}$ y $\boldsymbol{\omega}$ en función de las componentes x, y, z, tenemos

$$H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} + H_z\mathbf{k} = \int_m (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times [(\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}) \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})] dm$$

Si expandimos los productos vectoriales y combinamos los términos, entonces

$$\begin{aligned} H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} + H_z\mathbf{k} = &\left[\omega_x \int_m (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int_m xy\, dm - \omega_z \int_m xz\, dm\right]\mathbf{i} \\ &+ \left[-\omega_x \int_m xy\, dm + \omega_y \int_m (x^2 + z^2) dm - \omega_z \int_m yz\, dm\right]\mathbf{j} \\ &+ \left[-\omega_x \int_m zx\, dm - \omega_y \int_m yz\, dm + \omega_z \int_m (x^2 + y^2) dm\right]\mathbf{k} \end{aligned}$$

Al igualar las componentes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ respectivas y reconocer que las integrales representan los momentos y productos de inercia,

$$\begin{aligned} H_x &= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y &= -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \qquad (21\text{-}10)$$

Estas ecuaciones pueden simplificarse aún más si los ejes de coordenadas x, y, z están orientados de modo que lleguen a ser los *ejes de inercia principales* del cuerpo en el punto. Cuando se utilizan estos ejes, los productos de inercia $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$, y si los momentos de inercia principales con respecto a los ejes x, y, z se representan como $I_x = I_{xx}, I_y = I_{yy}$ e $I_Z = I_{zz}$, las tres componentes de cantidad de movimiento angular son

$$H_x = I_x\omega_x \quad H_y = I_y\omega_y \quad H_z = I_z\omega_z \qquad (21\text{-}11)$$

El movimiento del astronauta se controla utilizando pequeños cohetes propulsores direccionales montados en su traje espacial. Los impulsos que los cohetes proporcionan deben especificarse con cuidado para evitar el movimiento descontrolado y la pérdida de orientación. (© NASA)

Principio de impulso y cantidad de movimiento angular. Ahora que ya se desarrolló la formulación de la cantidad de movimiento angular de un cuerpo, el *principio de impulso y cantidad de movimiento*, estudiado en la sección 19.2, puede usarse para resolver problemas cinéticos que implican *fuerza*, *velocidad* y *tiempo*. En este caso, están disponibles las siguientes dos ecuaciones vectoriales:

$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m(\mathbf{v}_G)_2 \tag{21-12}$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2 \tag{21-13}$$

En tres dimensiones, cada término vectorial puede representarse mediante tres componentes escalares y, por consiguiente, escribirse un total de *seis ecuaciones escalares*. Tres ecuaciones relacionan el impulso y cantidad de movimiento lineales en las direcciones x, y, z; y las otras tres relacionan el impulso y la cantidad de movimiento angulares del cuerpo con respecto a los ejes x, y, z. Antes de aplicar las ecuaciones 21-12 y 21-13 a la solución de problemas, deberá repasarse el material de las secciones 19-2 y 19-3.

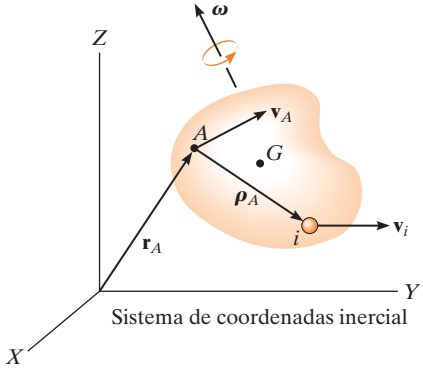


Fig. 21.8

21.3 Energía cinética

Para aplicar el principio de trabajo y energía en la solución de problemas que implican el movimiento general de un cuerpo rígido, primero es necesario formular expresiones para la energía cinética del cuerpo. Por lo tanto, considere el cuerpo rígido que se muestra en la figura 21-8, el cual tiene una masa m y un centro de masa en G. La energía cinética de la partícula $i$ésima del cuerpo tiene una masa m_i y una velocidad $\mathbf{v}_i$, medidas con respecto al marco de referencia inercial X, Y, Z, es

$$T_i = \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i)$$

Siempre que se conozca la velocidad de un punto arbitrario A en el cuerpo, $\mathbf{v}_i$ puede relacionarse con $\mathbf{v}_A$ con la ecuación $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A$, donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo, medido con respecto al sistema de coordenadas X, Y, Z, y $\boldsymbol{\rho}_A$ es un vector de posición que se extiende de A a i. Con esta expresión, la energía cinética de la partícula se escribe como

$$\begin{aligned} T_i &= \tfrac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) \cdot (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) \\ &= \tfrac{1}{2} (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A) m_i + \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) m_i + \tfrac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) m_i \end{aligned}$$

La energía cinética de todo el cuerpo se obtiene sumando las energías cinéticas de todas las partículas del cuerpo. Esto requiere una integración. Como $m_i \to dm$, obtenemos

$$T = \tfrac{1}{2} m (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_A \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_m \boldsymbol{\rho}_A dm \right) + \tfrac{1}{2} \int_m (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) dm$$

El último término del lado derecho puede reescribirse mediante la identidad vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, donde $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}, \mathbf{b} = \boldsymbol{\rho}_A$ y $\mathbf{c} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A$. El resultado final es

$$T = \tfrac{1}{2}m(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_A \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_m \boldsymbol{\rho}_A dm\right) + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \int_m \boldsymbol{\rho}_A \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) dm \tag{21-14}$$

Esta ecuación rara vez se utiliza porque los cálculos implican integrales. Se simplifica, no obstante, si el punto de referencia A es ya sea un punto fijo o el centro de masa.

Punto fijo *O*. Si A es un *punto fijo* O en el cuerpo (fig. 21-7*a*), entonces $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ y, con la ecuación 21-7, expresamos la ecuación 21-14 como

$$T = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_O$$

Si los ejes x, y, z representan los ejes principales de inercia del cuerpo, entonces $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_y\mathbf{k}$ y $\mathbf{H}_O = I_x\omega_x\mathbf{i} + I_y\omega_y\mathbf{j} + I_z\omega_z\mathbf{k}$. Al sustituir en la ecuación anterior y realizar las operaciones de producto vectorial se obtiene

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2} \tag{21-15}$$

Centro de masa *G*. Si A se ubica en el *centro de masa* G del cuerpo (fig. 21-7*b*), entonces $\int \boldsymbol{\rho}_A \, dm = \mathbf{0}$ y, con la ecuación 21-8, escribimos la ecuación 21-14 como

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_G$$

Del mismo modo que con un punto fijo, el último término del lado derecho puede representarse en forma escalar, en cuyo caso

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2} \tag{21-16}$$

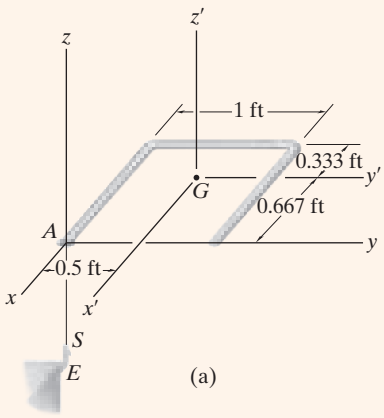
Se observa que la energía cinética consta de dos partes, a saber, la energía cinética de traslación del centro de masa, $\frac{1}{2}mv_G^2$, y la energía cinética de rotación del cuerpo.

Principio de trabajo y energía. Una vez formulada la energía cinética de un cuerpo, puede aplicarse el *principio de trabajo y energía* para resolver problemas cinéticos que implican *fuerza*, *velocidad* y *desplazamiento*. En este caso, sólo puede escribirse una ecuación escalar para cada cuerpo, es decir,

$$\boxed{T_1 + \Sigma U_{192} = T_2} \tag{21-17}$$

Antes de aplicar esta ecuación, es recomendable repasar el material del capítulo 18.

EJEMPLO 21.2



(a)

La varilla de la figura 21-9*a* tiene un peso por unidad de longitud de 1.5 lb/ft. Determine su velocidad angular justo después de que el extremo A cae sobre el gancho en E. Éste funciona como una conexión permanente para la varilla debido a su mecanismo de cerrojo de resorte S. Justo antes de chocar contra el gancho, la varilla cae con una velocidad de $(v_G)_1 = 10$ ft/s.

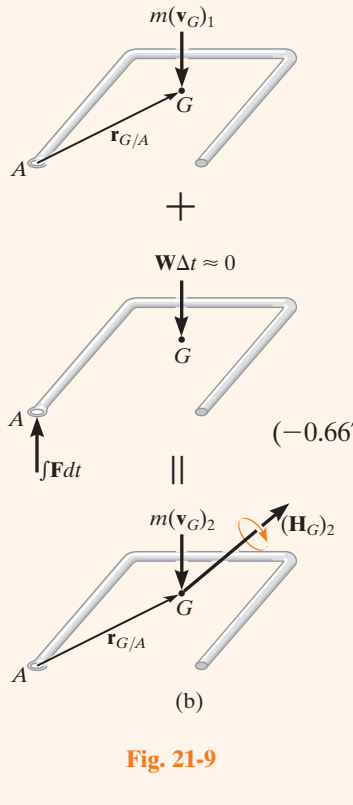
SOLUCIÓN

Se utilizará el principio de impulso y cantidad de movimiento, ya que se trata de un impacto.

Diagramas de impulso y cantidad de movimiento. Figura 21-9*b*. Durante el corto tiempo Δt, la fuerza impulsora $\mathbf{F}$ que actúa en A cambia la cantidad de movimiento de la varilla. (El impulso creado por el peso de la varilla $\mathbf{W}$ durante este tiempo es mínimo comparado con $\int \mathbf{F}\,dt$, de modo que puede omitirse, es decir, el peso es una fuerza no impulsora.) Por consiguiente, la cantidad de movimiento de la varilla se *conserva* con respecto al punto A, ya que el momento de $\int \mathbf{F}\,dt$, con respecto a A es cero.

Conservación de la cantidad de movimiento angular. La ecuación 21-9 debe utilizarse para determinar la cantidad de movimiento angular de la varilla, pues A no llega a ser un *punto fijo* sino hasta *después* de la interacción impulsora con el gancho. Por lo tanto, con referencia a la figura 21-9*b*, $(\mathbf{H}_A)_1 = (\mathbf{H}_A)_2$ o bien

$$\mathbf{r}_{G/A} \times m(\mathbf{v}_G)_1 = \mathbf{r}_{G/A} \times m(\mathbf{v}_G)_2 + (\mathbf{H}_G)_2 \qquad (1)$$



(b)

Fig. 21-9

Según la figura 21-9*a*, $\mathbf{r}_{G/A} = \{-0.667\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j}\}$ ft. Además, los ejes primos son ejes principales de inercia para la varilla porque $I_{x'y'} = I_{x'z'} = I_{z'y'} = 0$. Por consiguiente, de acuerdo con las ecuaciones 21-11, $(\mathbf{H}_G)_2 = I_{x'}\omega_x\mathbf{i} + I_{y'}\omega_y\mathbf{j} + I_{z'}\omega_z\mathbf{k}$. Los momentos de inercia principales son $I_{x'} = 0.0272$ slug · ft^2, $I_{y'} = 0.0155$ slug · ft^2, $I_{z'} = 0.0427$ slug · ft^2 (vea el problema 21-17). Si sustituimos en la ecuación 1, tenemos

$$(-0.667\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j}) \times \left[\left(\frac{4.5}{32.2}\right)(-10\mathbf{k})\right] = (-0.667\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j}) \times \left[\left(\frac{4.5}{32.2}\right)(-v_G)_2\mathbf{k}\right] + 0.0272\omega_x\mathbf{i} + 0.0155\omega_y\mathbf{j} + 0.0427\omega_z\mathbf{k}$$

Al expandir e igualar las componentes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ respectivas obtenemos

$$-0.699 = -0.0699(v_G)_2 + 0.0272\omega_x \qquad (2)$$

$$-0.932 = -0.0932(v_G)_2 + 0.0155\omega_y \qquad (3)$$

$$0 = 0.0427\omega_z \qquad (4)$$

Cinemática. Hay cuatro incógnitas en las ecuaciones anteriores; sin embargo, puede obtenerse otra ecuación al relacionar $\boldsymbol{\omega}$ con $(\mathbf{v}_G)_2$ por *cinemática*. Como $\omega_z = 0$ (ecuación 4) y como después del impacto la varilla gira alrededor del punto fijo A, puede aplicarse la ecuación 20-3, en cuyo caso $(\mathbf{v}_G)_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{G/A}$, o

$$-(v_G)_2\mathbf{k} = (\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j}) \times (-0.667\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j})$$

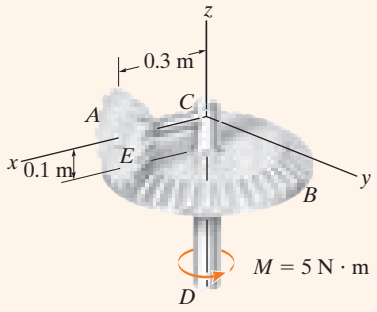
$$-(v_G)_2 = 0.5\omega_x + 0.667\omega_y \qquad (5)$$

Si resolvemos las ecuaciones 2, 3 y 5 simultáneamente, obtenemos

$$(\mathbf{v}_G)_2 = \{-8.41\mathbf{k}\}\ \text{ft/s} \quad \boldsymbol{\omega} = \{-4.09\mathbf{i} - 9.55\mathbf{j}\}\ \text{rad/s} \quad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 21.3

Se aplica un par de torsión de 5 N · m a la flecha vertical *CD* que se muestra en la figura 21-10*a*, la cual permite que el engrane *A* de 10 kg gire libremente alrededor de *CE*. Suponiendo que el engrane *A* comienza a girar a partir del reposo, determine la velocidad angular de *CD* después de que ha realizado dos revoluciones. Desprecie la masa de la flecha *CD* y el eje *CE*, y suponga que el engrane *A* puede representarse de forma aproximada con un disco delgado. El engrane *B* está fijo.



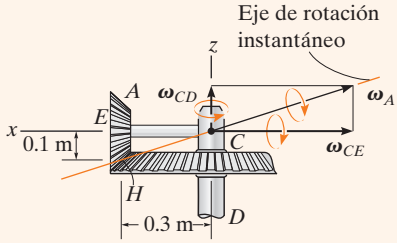
(a)

SOLUCIÓN

Para la solución puede utilizarse el principio de trabajo y energía. ¿Por qué?

Trabajo. Si la flecha *CD*, el eje *CE* y el engrane *A* se consideran un sistema de cuerpos conectados, sólo el par de torsión aplicado **M** realiza trabajo. Con dos revoluciones de *CD*, este trabajo es $\Sigma U_{1-2} = (5\ \text{N} \cdot \text{m})(4\ \pi\ \text{rad}) = 62.83\ \text{J}$.

Energía cinética. Como inicialmente el engrane está en reposo, su energía cinética inicial es cero. En la figura 21-10*b* se muestra un diagrama cinemático del engrane. Si la velocidad angular de *CD* se considera como $\boldsymbol{\omega}_{CD}$, entonces la velocidad angular del engrane *A* es $\boldsymbol{\omega}_A = \boldsymbol{\omega}_{CD} + \boldsymbol{\omega}_{CE}$. El engrane puede considerarse como una parte de un cuerpo extendido sin masa, el cual gira con respecto al *punto fijo C*. El eje instantáneo de rotación de este cuerpo está a lo largo del línea *CH*, porque los puntos *C* y *H* en el cuerpo (engrane) tienen una velocidad cero y, por consiguiente, deben quedar en este eje. Esto requiere que las componentes $\boldsymbol{\omega}_{CD}$ y $\boldsymbol{\omega}_{CE}$ se relacionen por medio de la ecuación $\omega_{CD}/0.1\ \text{m} = \omega_{CE}/0.3\ \text{m}$ o bien $\omega_{CE} = 3\omega_{CD}$. Por lo tanto,



(b)

Fig. 21-10

$$\boldsymbol{\omega}_A = -\omega_{CE}\mathbf{i} + \omega_{CD}\mathbf{k} = -3\omega_{CD}\mathbf{i} + \omega_{CD}\mathbf{k} \qquad (1)$$

Los ejes *x*, *y*, *z* en la figura 21.10*a* representan *ejes de inercia principales* en *C* para el engrane. Como el punto *C* es un punto de rotación fijo, puede aplicarse la ecuación 21-15 para determinar la energía cinética, es decir,

$$T = \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2 \qquad (2)$$

Al utilizar el teorema de los ejes paralelos, los momentos de inercia del engrane con respecto al punto *C* son como sigue:

$$I_x = \tfrac{1}{2}(10\ \text{kg})(0.1\ \text{m})^2 = 0.05\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = I_z = \tfrac{1}{4}(10\ \text{kg})(0.1\ \text{m})^2 + 10\ \text{kg}(0.3\ \text{m})^2 = 0.925\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Como $\omega_x = -3\omega_{CD}$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = \omega_{CD}$, la ecuación 2 se vuelve

$$T_A = \tfrac{1}{2}(0.05)(-3\omega_{CD})^2 + 0 + \tfrac{1}{2}(0.925)(\omega_{CD})^2 = 0.6875\omega_{CD}^2$$

Principio de trabajo y energía. Aplicamos el principio de trabajo y energía, y obtenemos

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$0 + 62.83 = 0.6875\omega_{CD}^2$$

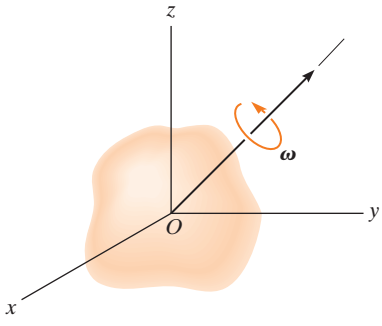
$$\omega_{CD} = 9.56\ \text{rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

21-22. Si el cuerpo *no contiene planos de simetría*, los momentos de inercia principales pueden determinarse matemáticamente. Para demostrar cómo se hace esto, considere el cuerpo rígido que gira con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, dirigida a lo largo de uno de sus ejes de inercia principales. Si el momento de inercia principal con respecto a este eje es I, la cantidad de movimiento angular puede expresarse como $\mathbf{H} = I\boldsymbol{\omega} = I\omega_x\mathbf{i} + I\omega_y\mathbf{j} + I\omega_z\mathbf{k}$. Las componentes de $\mathbf{H}$ también pueden expresarse mediante las ecuaciones 21-10, donde se supone que se conoce el tensor de inercia. Ponga en la ecuación las componentes $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ de ambas expresiones para $\mathbf{H}$ y considere que ω_x, ω_y, ω_z son incógnitas. La solución de estas tres ecuaciones se obtiene siempre que el determinante de los coeficientes sea cero. Demuestre que este determinante, cuando se expande, resulta en la ecuación cúbica

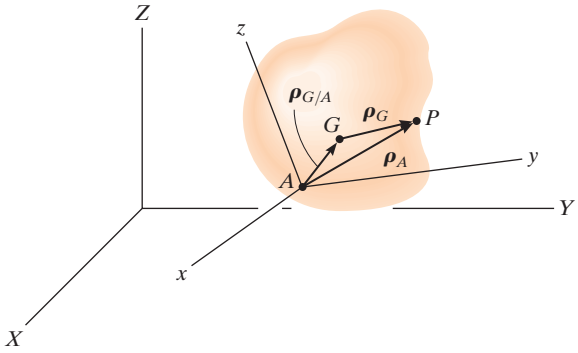
$$\begin{aligned} &I^3 - (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})I^2 \\ &\quad + (I_{xx}I_{yy} + I_{yy}I_{zz} + I_{zz}I_{xx} - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)I \\ &\quad - (I_{xx}I_{yy}I_{zz} - 2I_{xy}I_{yz}I_{zx} - I_{xx}I_{yz}^2 - I_{yy}I_{zx}^2 - I_{zz}I_{xy}^2) = 0 \end{aligned}$$

Las tres raíces positivas de I_x obtenidas con la solución de esta ecuación representan los momentos de inercia principales I_x, I_y e I_z.



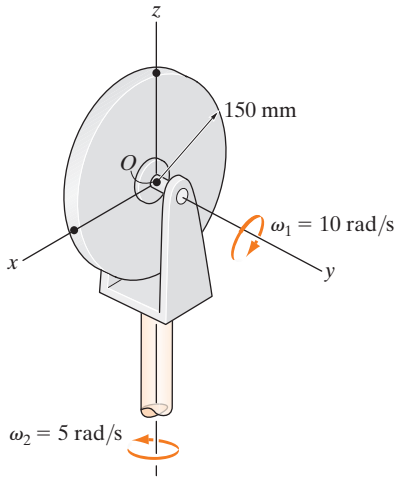
Prob. 21-22

21-23. Demuestre que si la cantidad de movimiento angular de un cuerpo se determina con respecto a un punto arbitrario A, entonces $\mathbf{H}_A$ puede expresarse por medio de la ecuación 21-9. Esto requiere sustituir $\boldsymbol{\rho}_A = \boldsymbol{\rho}_G + \boldsymbol{\rho}_{G/A}$ en la ecuación 21-6 y expandir, habida cuenta de que $\int \boldsymbol{\rho}_G\, dm = \mathbf{0}$ por definición del centro de masa y $\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_{G/A}$.



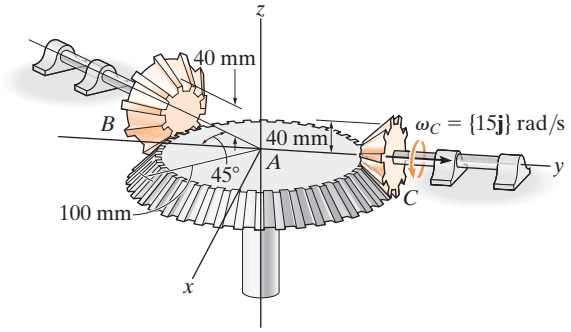
Prob. 21-23

***21-24.** El disco circular de 15 kg gira alrededor de su eje con una velocidad angular constante de $\omega_1 = 10$ rad/s. Al mismo tiempo, el yugo gira con una velocidad angular constante de $\omega_2 = 5$ rad/s. Determine la cantidad de movimiento angular del disco con respecto a su centro de masa O, y su energía cinética.



Prob. 21-24

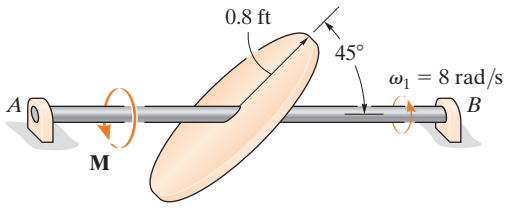
21-25. El engrane grande tiene una masa de 5 kg y un radio de giro de $k_z = 75$ mm. Los engranes B y C tienen cada uno una masa de 200 g y un radio de giro alrededor del eje de su flecha de conexión de 15 mm. Si los engranes están acoplados y C tiene una velocidad angular de $\boldsymbol{\omega}_c = \{15\mathbf{j}\}$ rad/s, determine la cantidad de movimiento angular total del sistema de tres marchas con respecto al punto A.



Prob. 21-25

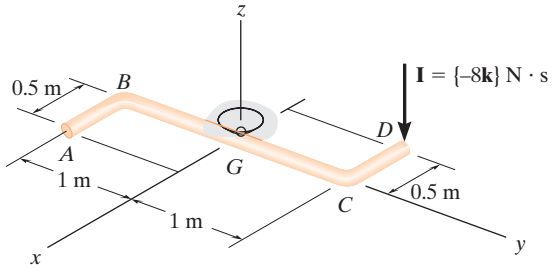
21-26. El disco circular tiene un peso de 15 lb y está montado sobre la flecha AB a un ángulo de 45° con la horizontal. Determine la velocidad angular de la flecha cuando $t = 3$ s, si se aplica un par de torsión constante $M = 2$ lb · ft a la flecha, la cual gira en un inicio a $\omega_1 = 8$ rad/s cuando se aplica el par de torsión.

21-27. El disco circular tiene un peso de 15 lb y está montado sobre la flecha AB a un ángulo de 45° con la horizontal. Determine la velocidad angular de la flecha cuando $t = 2$ s si se aplica un par de torsión $M = (4e^{0.1t})$ lb · ft, donde t se da en segundos, a la flecha, la cual gira en un inicio a $\omega_1 = 8$ rad/s al aplicar el par de torsión.



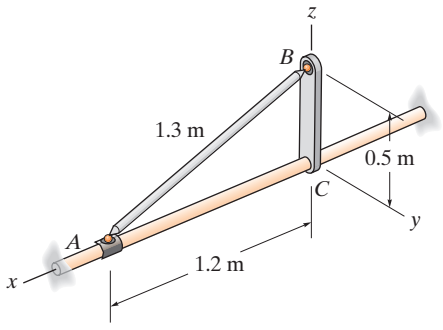
Probs. 21-26/27

***21-28.** El ensamble de varillas se sostiene en G mediante una junta de rótula. Cada segmento tiene una masa de 0.5 kg/m. Si el ensamble está originalmente en reposo y se aplica un impulso de $\mathbf{I} = \{-8\mathbf{k}\}$ N · s en D, determine la velocidad angular del ensamble justo después del impacto.



Prob. 21-28

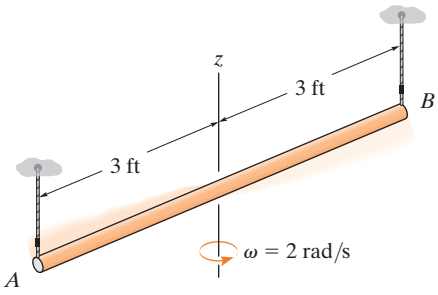
21-29. La varilla AB de 4 lb está unida al collarín de 1 lb en A y a un eslabón BC de 2 lb mediante juntas de rótula. Si la varilla se libera desde el reposo en la posición indicada, determine la velocidad angular del eslabón después de que ha girado 180°.



Prob. 21-29

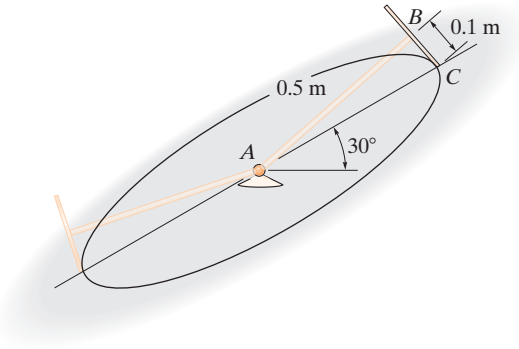
21

21-30. La varilla pesa 3 lb/ft y está suspendida de cuerdas paralelas en A y B. Si la varilla tiene una velocidad angular de 2 rad/s alrededor del eje z en el instante mostrado, determine a qué altura se eleva el centro de la varilla en el instante en que la varilla deja de oscilar momentáneamente.



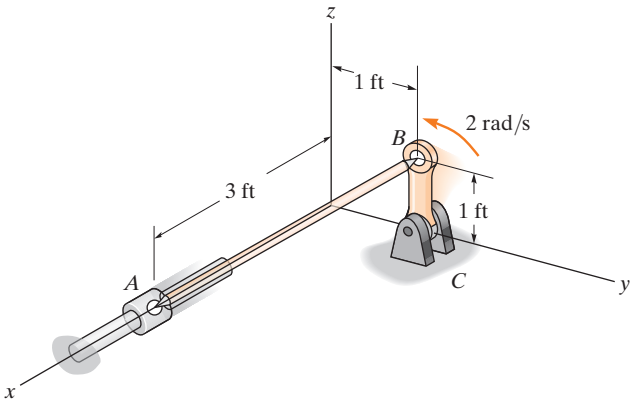
Prob. 21-30

***21-32.** El disco delgado de 2 kg está conectado a la varilla delgada que se encuentra fija a la junta de rótula en A. Si se libera desde el reposo en la posición mostrada, determine el giro del disco con respecto a la varilla cuando el disco alcanza su posición más baja. Desprecie la masa de la varilla. El disco rueda sin deslizarse.



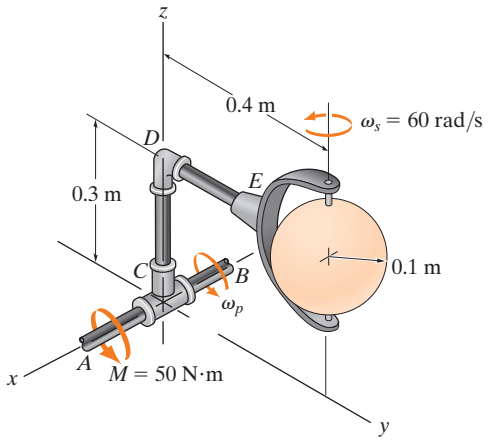
Prob. 21-32

21-31. La varilla AB de 4 lb está unida a la varilla BC y al collarín A mediante juntas de rótula. Si BC tiene una velocidad angular constante de 2 rad/s, determine la energía cinética de AB cuando está en la posición mostrada. Suponga que la velocidad angular de AB está dirigida en forma perpendicular al eje de AB.



Prob. 21-31

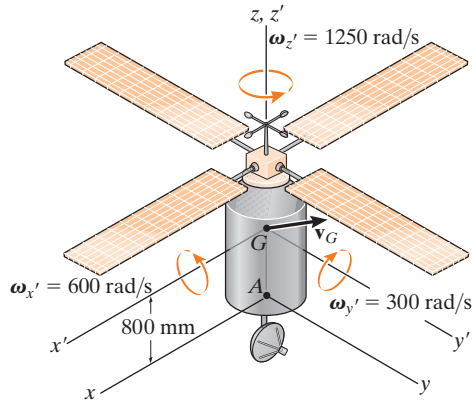
21-33. La esfera de 20 kg gira alrededor del eje con una velocidad angular constante de $\omega_s = 60$ rad/s. Si la flecha AB se somete a un par de torsión de $M = 50\ \text{N} \cdot \text{m}$, el cual ocasiona que ésta gire, determine el valor de ω_p después de que el eje ha girado 90° desde la posición indicada. En un inicio, $\omega_p = 0$. Desprecie la masa del brazo CDE.



Prob. 21-33

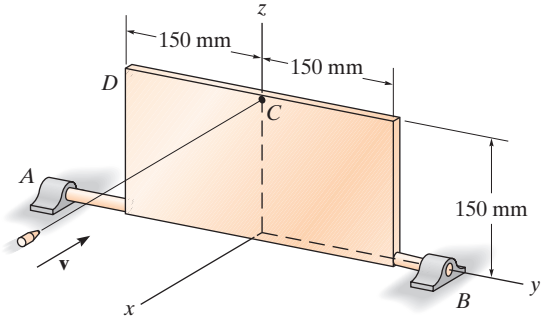
21-34. El satélite de 200 kg tiene su centro de masa en el punto G. Los radios de giro con respecto a los ejes z', x', y' son $k_{z'} = 300$ mm, $k_{x'} = k_{y'} = 500$ mm, respectivamente. En el instante mostrado, el satélite gira con respecto a los ejes x', y' y z' con la velocidad angular mostrada, y su centro de masa G tiene una velocidad de $\mathbf{v}_G = \{-250\mathbf{i} + 200\mathbf{j} + 120\mathbf{k}\}$ m/s. Determine la cantidad de movimiento angular del satélite con respecto a A en este instante.

21-35. El satélite de 200 kg tiene su centro de masa en el punto G. Los radios de giro con respecto a los ejes z', x', y' son $k_{z'} = 300$ mm, $k_{x'} = k_{y'} = 500$ mm, respectivamente. En el instante mostrado, el satélite gira con respecto a los ejes x', y' y z' con la velocidad angular mostrada, y su centro de masa G tiene una velocidad de $\mathbf{v}_G = \{-250\mathbf{i} + 200\mathbf{j} + 120\mathbf{k}\}$ m/s. Determine la energía cinética del satélite en este instante..



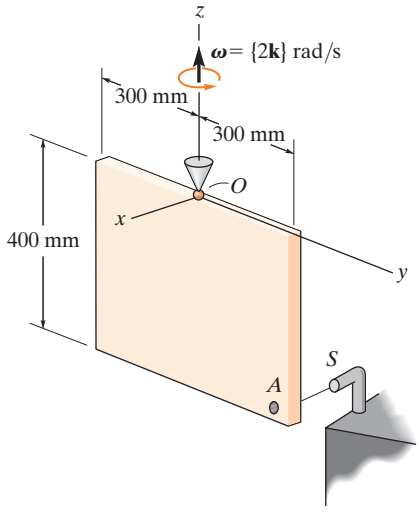
Probs. 21-34/35

***21-36.** La placa rectangular de 15 kg puede girar libremente alrededor del eje y debido a los soportes de cojinete en A y B. Cuando la placa está equilibrada en el plano vertical, se dispara sobre ella una bala de 3 g, en forma perpendicular a su superficie, con una velocidad $\mathbf{v} = \{-2000\mathbf{i}\}$ m/s. Calcule la velocidad angular de la placa en el instante en que ha girado 180°. Si la bala golpea la esquina D con la misma velocidad $\mathbf{v}$, en vez de en C, ¿permanece igual la velocidad angular? ¿Por qué?



Prob. 21-36

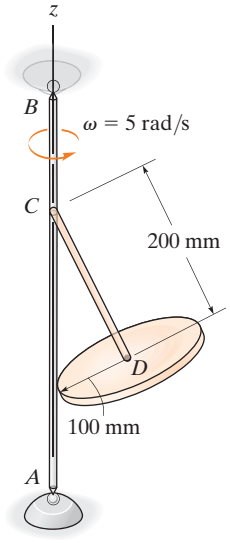
21-37. La placa delgada de 5 kg se suspende en O mediante una junta de rótula. Si está girando con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega} = \{2\mathbf{k}\}$ rad/s cuando la esquina A golpea el gancho en S, que proporciona una conexión permanente, determine la velocidad angular de la placa inmediatamente después del impacto.



Prob. 21-37

21-38. Determine la energía cinética del disco de 7 kg y la varilla de 1.5 kg cuando el ensamble está girando alrededor del eje z a $\omega = 5$ rad/s.

21-39. Determine el momento angular $\mathbf{H}_z$ del disco de 7 kg y la varilla de 1.5 kg cuando el ensamble gira alrededor del eje z a $\omega = 5$ rad/s.



Probs. 21-38/39

*21.4 Ecuaciones de movimiento

Una vez familiarizados con las técnicas utilizadas para describir tanto las propiedades inerciales como la cantidad de movimiento de un cuerpo, ahora podemos escribir las ecuaciones que describen el movimiento del cuerpo en sus formas más útiles.

Ecuaciones de movimiento de traslación. El *movimiento de traslación* de un cuerpo se define en función de la aceleración de su centro de masa, la cual se mide con respecto a una referencia X, Y, Z inercial. La ecuación de movimiento de traslación del cuerpo se escribe en forma vectorial como

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \tag{21-18}$$

o mediante las tres ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= m(a_G)_x \\ \Sigma F_y &= m(a_G)_y \\ \Sigma F_z &= m(a_G)_z \end{aligned} \tag{21-19}$$

Aquí, $\Sigma \mathbf{F} = \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k}$ representa la suma de todas las fuerzas externas que actúan en el cuerpo.

Ecuaciones de movimiento de rotación. En la sección 15.6, desarrollamos la ecuación 15-17, es decir,

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{21-20}$$

la cual establece que la suma de los momentos de todas las fuerzas externas que actúan en un sistema de partículas (contenidas en un cuerpo rígido), con respecto a un punto fijo O, es igual al cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular total del cuerpo con respecto al punto O. Cuando los momentos de las fuerzas externas que actúan en las partículas se suman con respecto al *centro de masa* G del sistema, de nuevo obtenemos la misma forma simple de la ecuación 21-20, que relaciona la suma de momentos $\Sigma \mathbf{M}_G$ con la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$. Para demostrarlo, considere el sistema de partículas que aparecen en la figura 21-11, donde X, Y, Z representan un marco de referencia inercial y los ejes x, y, z, con su origen en G, *se trasladan* con respecto a este marco. Por lo general, G está en *aceleración*, por lo que por definición el marco trasladante *no* es una referencia inercial. Sin embargo, la cantidad de movimiento angular de la partícula $i$ésima con respecto a este marco es,

$$(\mathbf{H}_i)_G = \mathbf{r}_{i/G} \times m_i \mathbf{v}_{i/G}$$

donde $\mathbf{r}_{i/G}$ y $\mathbf{v}_{i/G}$ representan la posición y velocidad de la partícula $i$ésima con respecto a G. Al calcular la derivada con respecto al tiempo tenemos

$$(\dot{\mathbf{H}}_i)_G = \dot{\mathbf{r}}_{i/G} \times m_i \mathbf{v}_{i/G} + \mathbf{r}_{i/G} \times m_i \dot{\mathbf{v}}_{i/G}$$

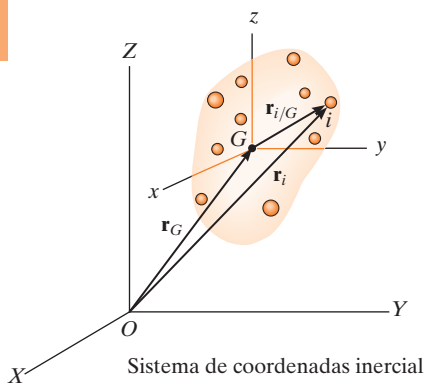


Fig. 21-11

Por definición, $\mathbf{v}_{i/G} = \dot{\mathbf{r}}_{i/G}$. Por lo tanto, el primer término del lado derecho es cero, ya que el producto vectorial de los mismos vectores es cero. Asimismo, $\mathbf{a}_{i/G} = \dot{\mathbf{v}}_{i/G}$, de modo que

$$(\dot{\mathbf{H}}_i)_G = (\mathbf{r}_{i/G} \times m_i \mathbf{a}_{i/G})$$

Pueden escribirse expresiones similares para las demás partículas del cuerpo. Cuando sumamos los resultados, obtenemos

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \Sigma(\mathbf{r}_{i/G} \times m_i \mathbf{a}_{i/G})$$

Aquí $\dot{\mathbf{H}}_G$ es el cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular del cuerpo calculada con respecto al punto G.

La aceleración relativa de la partícula *i*ésima se define por medio de la ecuación $\mathbf{a}_{i/G} = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_G$, donde $\mathbf{a}_i$ y $\mathbf{a}_G$, representan, respectivamente, las aceleraciones de la partícula *i*ésima y del punto G medidas con respecto al *marco de referencia inercial*. Si sustituimos y expandimos, mediante la propiedad distributiva del producto vectorial, obtenemos

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \Sigma(\mathbf{r}_{i/G} \times m_i \mathbf{a}_i) - (\Sigma m_i \mathbf{r}_{i/G}) \times \mathbf{a}_G$$

Por definición del centro de masa, la suma $(\Sigma m_i \mathbf{r}_{i/G}) = (\Sigma m_i)\bar{\mathbf{r}}$ es igual a cero, ya que el vector de posición $\bar{\mathbf{r}}$ con respecto a G es cero. Por lo tanto, el último término de la ecuación anterior es cero. Con la ecuación de movimiento, el producto $m_i \mathbf{a}_i$ puede reemplazarse con la *fuerza externa* resultante $\mathbf{F}_i$ que actúa en la partícula *i*ésima. Al denotar $\Sigma \mathbf{M}_G = \Sigma(\mathbf{r}_{i/G} \times \mathbf{F}_i)$, el resultado final se escribe como

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{21-21}$$

Ahora se desarrollará la ecuación de movimiento de rotación del cuerpo con la ecuación 21-20 o bien la 21-21. A este respecto, las componentes escalares de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ o $\mathbf{H}_G$ están definidas por las ecuaciones 21-10 o, si se utilizan los ejes de inercia principales en el punto O o en el punto G, por las ecuaciones 21-11. Si estas componentes se calculan con respecto a los ejes x, y, z que *giran* a una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ que es *diferente* de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo, entonces la derivada con respecto al tiempo $\dot{\mathbf{H}} = d\mathbf{H}/dt$, tal como se utiliza en las ecuaciones 21-20 y 21-21 debe tener en cuenta la rotación de los ejes x, y, z medida con respecto a los ejes X, Y, Z inerciales. Esto requiere la aplicación de la ecuación 20-6, en cuyo caso las ecuaciones 21-20 y 21-21 se vuelven

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{M}_O &= (\dot{\mathbf{H}}_O)_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_O \\ \Sigma \mathbf{M}_G &= (\dot{\mathbf{H}}_G)_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \end{aligned} \tag{21-22}$$

Aquí $(\dot{\mathbf{H}})_{xyz}$ es el cambio con respecto al tiempo de $\mathbf{H}$ medido con respecto a la referencia x, y, z.

Hay tres maneras de definir el movimiento de los ejes x, y, z. Evidentemente, el movimiento de esta referencia deberá elegirse de modo que origine el sistema de ecuaciones de momento más simple para la solución de un problema específico.

Ejes *x*, *y*, *z* que tienen un movimiento $\boldsymbol{\Omega} = 0$. Si el cuerpo tiene movimiento general, los ejes x, y, z se seleccionan con su origen en G, de modo que los ejes *se trasladen* sólo con respecto al marco de referencia X, Y, Z inercial. De este modo, se simplifica la ecuación 21-22 puesto que $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$. Sin embargo, el cuerpo puede tener una rotación $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de estos ejes y, por consiguiente, los momentos y productos de inercia del cuerpo tendrían que expresarse como *funciones de tiempo*. En la mayoría de los casos, esto dificultaría la tarea, así que tal selección de ejes ha limitado la aplicación.

Ejes *x*, *y*, *z* que tienen movimiento $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$. Los ejes x, y, z pueden seleccionarse de modo que estén *fijos en el cuerpo y se muevan junto con éste*. Los momentos y productos de inercia del cuerpo con respecto a estos ejes serán entonces *constantes* durante el movimiento. Como $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, las ecuaciones se vuelven

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{M}_O &= (\dot{\mathbf{H}}_O)_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O \\ \Sigma \mathbf{M}_G &= (\dot{\mathbf{H}}_G)_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_G \end{aligned} \tag{21-23}$$

Podemos expresar cada una de estas ecuaciones vectoriales como tres cantidades escalares por medio de las ecuaciones 21-10. Si ignoramos los subíndices O y G tenemos

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z - I_{xy}(\dot{\omega}_y - \omega_z\omega_x) \\ &\quad - I_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2) - I_{zx}(\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y) \\ \Sigma M_y &= I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x - I_{yz}(\dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y) \\ &\quad - I_{zx}(\omega_z^2 - \omega_x^2) - I_{xy}(\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z) \\ \Sigma M_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y - I_{zx}(\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z) \\ &\quad - I_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) - I_{yz}(\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x) \end{aligned} \tag{21-24}$$

Si los ejes x, y, z se seleccionan como *ejes de inercia principales*, los productos de inercia son cero, $I_{xx} = I_x$, etcétera, y las ecuaciones anteriores se vuelven

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z \\ \Sigma M_y &= I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x \\ \Sigma M_z &= I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y \end{aligned} \tag{21-25}$$

Este sistema de ecuaciones se conoce históricamente como *ecuaciones de movimiento de Euler*, nombradas así en honor del matemático suizo Leonhard Euler, quien fuera el primero en desarrollarlas. Son válidas sólo para momentos sumados con respecto al punto O o al punto G.

Cuando se apliquen estas ecuaciones habrá que darse cuenta de que $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_z$ representan las derivadas con respecto al tiempo de las magnitudes de las componentes x, y, z de $\boldsymbol{\omega}$ observados desde x, y, z. Para determinar estas componentes, primero es necesario determinar $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ cuando los ejes están orientados en una *posición general* y, *luego*, calcular la derivada con respecto al tiempo de la magnitud de estas componentes, es decir, $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$. Sin embargo, como los ejes x, y, z giran a $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, entonces, de acuerdo con la ecuación 20-6, debe notarse que $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}$. Como $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, entonces $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$. Este resultado importante indica que la derivada con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$ con respecto a los ejes X, Y, Z fijos, es decir, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, también puede utilizarse para obtener $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$. Por lo general, ésta es la forma más fácil de determinar el resultado. Vea el ejemplo 21.5.

Ejes *x, y, z* que tienen movimiento $\boldsymbol{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$. Para simplificar los cálculos de la derivada con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$, con frecuencia es conveniente seleccionar los ejes x, y, z con una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ diferente de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo. Esto es particularmente adecuado para el análisis de giróscopos y giroscopios, los cuales son *simétricos* con respecto a sus ejes de giro*. Cuando éste sea el caso, los momentos y productos de inercia permanecen constantes con respecto al eje de giro.

Los ecuaciones 21-22 son aplicables en ese sistema de ejes. Cada una de estas dos ecuaciones vectoriales pueden reducirse a un sistema de tres ecuaciones escalares que se derivan del mismo modo que las ecuaciones 21-25†, es decir,

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= I_x\dot{\omega}_x - I_y\Omega_z\omega_y + I_z\Omega_y\omega_z \\ \Sigma M_y &= I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x \\ \Sigma M_z &= I_z\dot{\omega}_z - I_x\Omega_y\omega_x + I_y\Omega_x\omega_y \end{aligned} \tag{21-26}$$

Aquí $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ representan las componentes x, y, z de $\boldsymbol{\Omega}$, medidas con respecto al marco de referencia inercial, y $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$ deben determinarse con respecto a los ejes x, y, z que tienen la rotación $\boldsymbol{\Omega}$. Vea el ejemplo 21.6.

Cualquiera de estos sistemas de ecuaciones, las ecuaciones 21-24, 21-25 o la 21-26, representa una serie de tres ecuaciones diferenciales no lineales de primer grado. Estas ecuaciones se "acoplan" pues las componentes de velocidad angular están presentes en todos los términos. El éxito al determinar la solución de un problema específico depende, por consiguiente, de lo desconocido en estas ecuaciones. Ciertamente surgen dificultades cuando intentamos resolver las componentes desconocidas de $\boldsymbol{\omega}$ si los momentos externos son funciones del tiempo. Pueden surgir más complicaciones cuando las ecuaciones de momentos se acoplan a las tres ecuaciones escalares del movimiento de traslación, ecuaciones 21-19. Esto puede suceder debido a la existencia de restricciones cinemáticas que relacionan la rotación del cuerpo con la traslación de su centro de masa, como en el caso de un aro que rueda sin deslizarse. Los problemas

*En la sección 21.5 se analizan en detalle tales dispositivos.
†Vea el problema 21-42.

que requieren la solución simultánea de ecuaciones diferenciales, en general, se resuelven usando métodos numéricos con la ayuda de una computadora. En muchos problemas de ingeniería, sin embargo, se nos da información sobre el movimiento del cuerpo y se nos pide que determinemos los momentos aplicados que actúan en el cuerpo. La mayoría de estos problemas tiene soluciones directas, de modo que no es necesario recurrir a técnicas de computadora.

Procedimiento para el análisis

Los problemas que implican el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido se resuelven con el siguiente procedimiento.

Diagrama de cuerpo libre

- Trace un *diagrama de cuerpo libre* del cuerpo en el instante considerado y especifique el sistema de coordenadas x, y, z. El origen de esta referencia debe localizarse en el centro de masa G del cuerpo o en el punto O, considerado fijo en un marco de referencia inercial localizado en el cuerpo o en una extensión sin masa de éste.
- Las componentes de fuerza de reacción desconocidas pueden mostrarse con un sentido de dirección positivo.
- Según la naturaleza del problema, decida qué tipo de movimiento de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ deberá tener el sistema de coordenadas x, y, z, es decir, $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$ o $\boldsymbol{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$. Al seleccionarlo, no olvide que las ecuaciones de momentos se simplifican cuando los ejes se mueven de tal modo que representen los ejes de inercia principales del cuerpo en todo momento.
- Calcule los momentos y productos de inercia necesarios para el cuerpo con respecto a los ejes x, y, z.

Cinemática

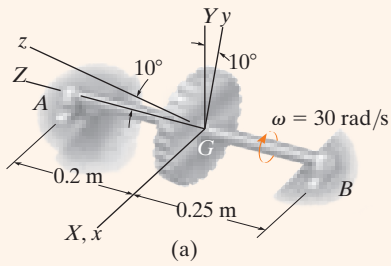
- Determine las componentes x, y, z de las velocidades angulares del cuerpo y encuentre sus derivadas con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$.
- Observe que si $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, entonces $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$. Por consiguiente, podemos determinar la derivada con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$ con respecto a los ejes $X, Y, Z, \dot{\boldsymbol{\omega}}$ y luego determinar sus componentes, $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$, o bien, podemos determinar las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ a lo largo de los ejes x, y, z, cuando los ejes están orientados en una posición general y, luego, determinar la derivada con respecto al tiempo de las magnitudes de estas componentes, $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$.

Ecuaciones de movimiento

- Aplique cualquiera de las dos ecuaciones vectoriales, 21-18 y 21-22, o las seis ecuaciones de componentes escalares apropiadas para los ejes de coordenadas x, y, z seleccionados para el problema.

EJEMPLO 21.4

El engrane que se ilustra en la figura 21-12*a* tiene una masa de 10 kg y está montado a un ángulo de 10° con la flecha rotatoria de masa insignificante. Si $I_z = 0.1\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$, $I_x = I_y = 0.05\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$ y la flecha está girando a una velocidad angular constante de $\omega = 30\ \text{rad/s}$, determine las componentes de reacción que el cojinete de empuje A y la chumacera B ejercen en la flecha en el instante que se muestra.



(a)

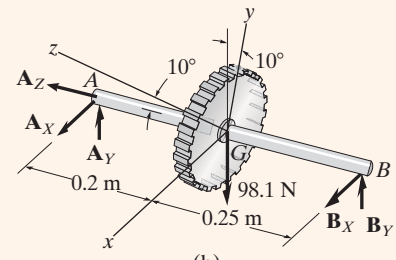
SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Figura 21-12*b*. El origen del sistema de coordenadas x, y, z se encuentra en el centro de masa G del engrane, el cual también es un punto fijo. Los ejes están fijos en el engrane y giran con éste, de modo que estos ejes siempre representarán los ejes de inercia principales del engrane. Por consiguiente, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$.

Cinemática. Como se muestra en la figura 21-12*c*, la magnitud de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del engrane es constante y siempre está dirigida a lo largo del eje de la flecha AB. Como este vector se mide con respecto al marco de referencia inercial X, Y, Z, para cualquier posición de los ejes x, y, z,

$$\omega_x = 0 \quad \omega_y = -30 \operatorname{sen} 10° \quad \omega_z = 30 \cos 10°$$

Estas componentes permanecen constantes con cualquier orientación general de los ejes x, y, z y por lo tanto $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$. También observe que como $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, entonces $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$. Por consiguiente, podemos determinar estas derivadas con respecto al tiempo de acuerdo con los ejes X, Y, Z. Entonces, la magnitud y dirección de $\boldsymbol{\omega}$ son constantes $(+Z)$ ya que $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$ y por ende $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$. Asimismo, como G es un punto fijo, $(a_G)_x = (a_G)_y = (a_G)_z = 0$.



(b)

Ecuaciones de movimiento. Al aplicar las ecuaciones 21-25 $(\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega})$ obtenemos

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z$$

$$-(A_Y)(0.2) + (B_Y)(0.25) = 0 - (0.05 - 0.1)(-30 \operatorname{sen} 10°)(30 \cos 10°)$$

$$-0.2A_Y + 0.25B_Y = -7.70 \qquad (1)$$

$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x$$

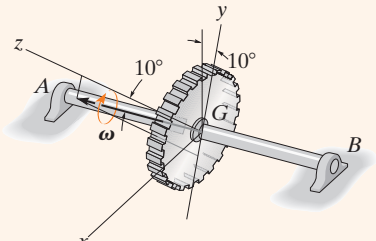
$$A_X(0.2) \cos 10° - B_X(0.25) \cos 10° = 0 - 0$$

$$A_X = 1.25B_X \qquad (2)$$

$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$

$$A_X(0.2) \operatorname{sen} 10° - B_X(0.25) \operatorname{sen} 10° = 0 - 0$$

$$A_X = 1.25B_X \text{ (comprobación)}$$



(c)

Fig. 21-12

Al aplicar las ecuaciones 21-19, se tiene

$$\Sigma F_X = m(a_G)_X; \qquad A_X + B_X = 0 \qquad (3)$$

$$\Sigma F_Y = m(a_G)_Y; \qquad A_Y + B_Y - 98.1 = 0 \qquad (4)$$

$$\Sigma F_Z = m(a_G)_Z; \qquad A_Z = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

Al resolver las ecuaciones 1 a 4 simultáneamente obtenemos

$$A_X = B_X = 0 \quad A_Y = 71.6\ \text{N} \quad B_Y = 26.5\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 21.5

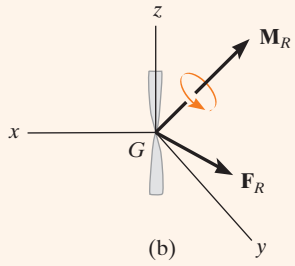
El avión de la figura 21-13*a* está en el proceso de realizar un viraje *horizontal* constante a la razón de ω_p. Durante este movimiento, la hélice gira a una razón de ω_s. Si la hélice tiene dos aspas, determine los momentos que la flecha de la hélice ejerce en la hélice cuando las aspas están en la posición vertical. Por sencillez, suponga que las aspas son una barra delgada uniforme con momento de inercia I con respecto a un eje perpendicular a las aspas que pasa por el centro de la barra y con momento de inercia cero con respecto a un eje longitudinal.

(© R. C. Hibbeler)

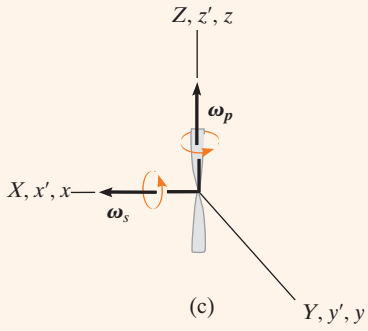
(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Figura 21-13*b*. Las reacciones de la flecha de conexión en la hélice se indican por medio de las resultantes $\mathbf{F}_R$ y $\mathbf{M}_R$. (Se supone que el peso de la hélice es insignificante.) Los ejes x, y, z se considerarán fijos en la hélice, ya que estos ejes siempre representan los ejes de inercia principales de la hélice. Por lo tanto, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$. Los momentos de inercia I_x e I_y son iguales ($I_x = I_y = I$) e $I_z = 0$.



(b)



(c)

Fig. 21-13

Cinemática. La velocidad angular de la hélice observada desde los ejes X, Y, Z, coincidentes con los ejes x, y, z (fig. 21-13*c*), es $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p = \omega_s\mathbf{i} + \omega_p\mathbf{k}$, de modo que las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ son

$$\omega_x = \omega_s \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = \omega_p$$

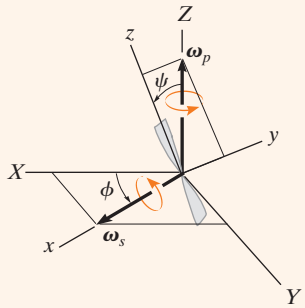
Como $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, entonces $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$. Para determinar $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, la cual es la derivada con respecto al tiempo con respecto a los ejes fijos X, Y, Z, utilizamos la ecuación 20-6 puesto que $\boldsymbol{\omega}$ cambia de dirección en relación con X, Y, Z. El cambio con respecto al tiempo de cada una de estas componentes $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_s + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p$ con respecto a los ejes X, Y, Z se obtienen al introducir un tercer sistema de coordenadas x', y', z', cuya velocidad angular es $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\omega}_p$ y que coincide con los ejes X, Y, Z en el instante que se muestra. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{x'\,y'\,z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega} \\ &= (\dot{\boldsymbol{\omega}}_s)_{x'\,y'\,z'} + (\dot{\boldsymbol{\omega}}_p)_{x'\,y'\,z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_p \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \omega_p \mathbf{k} \times \omega_s \mathbf{i} + \mathbf{0} = \omega_p \omega_s \mathbf{j}\end{aligned}$$

Como los ejes X, Y, Z coinciden con los ejes x, y, z en el instante que se muestra, las componentes de $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ a lo largo de x, y, z son, entonces,

$$\dot{\omega}_x = 0 \qquad \dot{\omega}_y = \omega_p \omega_s \qquad \dot{\omega}_z = 0$$

Estos mismos resultados también pueden determinarse mediante un cálculo directo de $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$; sin embargo, esto implicará un poco más trabajo. Para ello, será necesario visualizar la hélice (o los ejes x, y, z) en alguna *posición general*, como en la figura 21-13*d*. Aquí el avión ha girado un ángulo ϕ (fi) y la hélice un ángulo ψ (psi) con respecto al plano. Observe que $\boldsymbol{\omega}_P$ siempre está dirigida a lo largo del eje Z y que $\boldsymbol{\omega}_s$ sigue el eje x. Por lo tanto, las componentes generales de $\boldsymbol{\omega}$ son



(d)

Fig. 21-13

$$\omega_x = \omega_s \qquad \omega_y = \omega_p \operatorname{sen} \psi \qquad \omega_z = \omega_p \cos \psi$$

Como ω_s y ω_P son constantes, las derivadas con respecto al tiempo de estas componentes se vuelven

$$\dot{\omega}_x = 0 \qquad \dot{\omega}_y = \omega_p \cos \psi\, \dot{\psi} \qquad \omega_z = -\omega_p \operatorname{sen} \psi\, \dot{\psi}$$

Pero $\phi = \psi = 0°$ y $\dot{\psi} = \omega_s$ en el instante considerado. Por lo tanto,

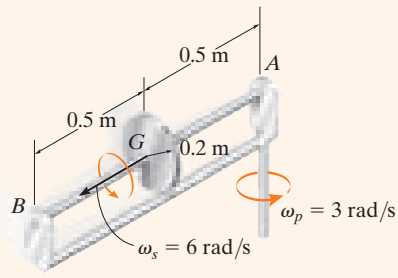
$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_s \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = \omega_p \\ \dot{\omega}_x &= 0 \qquad \dot{\omega}_y = \omega_p \omega_s \qquad \dot{\omega}_z = 0\end{aligned}$$

los cuales son los mismos resultados que los previamente obtenidos.

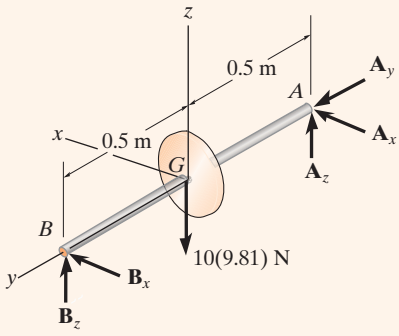
Ecuaciones de movimiento. Con las ecuaciones 21-25, tenemos

$$\Sigma M_x = I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y \omega_z = I(0) - (I - 0)(0)\omega_p$$
$$M_x = 0 \qquad \textit{Resp.}$$
$$\Sigma M_y = I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z \omega_x = I(\omega_p \omega_s) - (0 - I)\omega_p \omega_s$$
$$M_y = 2I\omega_p \omega_s \qquad \textit{Resp.}$$
$$\Sigma M_z = I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x \omega_y = 0(0) - (I - I)\omega_s(0)$$
$$M_z = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 21.6



(a)



(b)

Fig. 21-14

El volante (o disco delgado) de 10 kg que se ilustra en la figura 21-14*a* gira alrededor de la flecha a una velocidad angular constante de $\omega_s = 6$ rad/s. Al mismo tiempo, la flecha gira (experimenta precesión) alrededor del cojinete A con una velocidad angular de $\omega_p = 3$ rad/s. Si A es un cojinete de empuje y B es una chumacera, determine las componentes de la reacción en cada uno de estos soportes debido al movimiento.

SOLUCIÓN I

Diagrama de cuerpo libre. Figura 21-14*b*. El origen del sistema de coordenadas x, y, z se encuentra en el centro de masa G del volante. Aquí consideraremos que estas coordenadas tienen una velocidad angular de $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p = \{3\mathbf{k}\}$ rad/s. Aunque la rueda gira con respecto a estos ejes, los momentos de inercia *permanecen constantes*[*], es decir,

$$I_x = I_z = \tfrac{1}{4}(10\text{ kg})(0.2\text{ m})^2 = 0.1\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_y = \tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(0.2\text{ m})^2 = 0.2\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Cinemática. Con respecto al marco de referencia X, Y, Z inercial coincidente (fig. 21-14*c*), el volante tiene una velocidad angular de $\boldsymbol{\omega} = \{6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}$ rad/s, de modo que

$$\omega_x = 0 \quad \omega_y = 6\text{ rad/s} \quad \omega_z = 3\text{ rad/s}$$

La derivada con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$ debe determinarse con respecto a los ejes x, y, z. En este caso, tanto $\boldsymbol{\omega}_p$ como $\boldsymbol{\omega}_s$ no cambian de magnitud ni de dirección y, por lo tanto,

$$\dot{\omega}_x = 0 \quad \dot{\omega}_y = 0 \quad \dot{\omega}_z = 0$$

Ecuaciones de movimiento. Al aplicar la ecuación 21-26 ($\boldsymbol{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$) obtenemos

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - I_y\Omega_z\omega_y + I_z\Omega_y\omega_z$$
$$-A_z(0.5) + B_z(0.5) = 0 - (0.2)(3)(6) + 0 = -3.6$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x$$
$$0 = 0 - 0 + 0$$
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - I_x\Omega_y\omega_x + I_y\Omega_x\omega_y$$
$$A_x(0.5) - B_x(0.5) = 0 - 0 + 0$$

[*]Esto no sería válido para la hélice del ejemplo 21.5.

Al aplicar las ecuaciones 21-19, tenemos

$$\Sigma F_X = m(a_G)_X; \qquad A_x + B_x = 0$$

$$\Sigma F_Y = m(a_G)_Y; \qquad A_y = -10(0.5)(3)^2$$

$$\Sigma F_Z = m(a_G)_Z; \qquad A_z + B_z - 10(9.81) = 0$$

Al resolver estas ecuaciones, obtenemos

$$A_x = 0 \quad A_y = -45.0\ \text{N} \quad A_z = 52.6\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$
$$B_x = 0 \quad\quad\quad\quad B_z = 45.4\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Si no hubiera ocurrido la precesión $\boldsymbol{\omega}_p$, la componente z de la fuerza en A y B sería igual a 49.05 N. En este caso, sin embargo, la diferencia de estas componentes se debe al "momento giroscópico" creado siempre que un cuerpo que gira experimenta precesión con respecto a otro eje. En la siguiente sección estudiaremos en detalle este efecto.

SOLUCIÓN II

Este ejemplo también puede resolverse con las ecuaciones de movimiento de Euler, ecuaciones 21-25. En este caso, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} = \{6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}$ rad/s y la derivada con respecto al tiempo $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$ puede obtenerse convenientemente con referencia a los ejes fijos X, Y, Z puesto que $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$. Este cálculo puede realizarse si consideramos que los ejes x', y', z' tienen una velocidad angular de $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\omega}_p$ (fig. 21-14*c*), de modo que

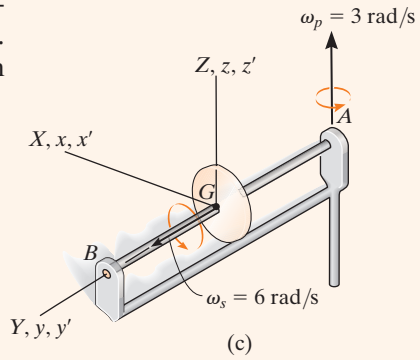


Fig. 21-14

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} + 3\mathbf{k} \times (6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = \{-18\mathbf{i}\}\ \text{rad/s}^2$$

$$\dot{\omega}_x = -18\ \text{rad/s} \quad \dot{\omega}_y = 0 \quad \dot{\omega}_z = 0$$

Las ecuaciones de momentos se escriben entonces como

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z$$

$$-A_z(0.5) + B_z(0.5) = 0.1(-18) - (0.2 - 0.1)(6)(3) = -3.6$$

$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x$$

$$0 = 0 - 0$$

$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$

$$A_x(0.5) - B_x(0.5) = 0 - 0$$

La solución prosigue entonces como antes.

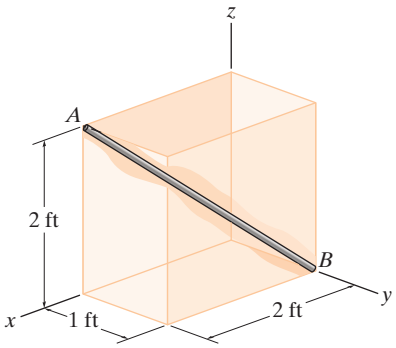
PROBLEMAS

***21-40.** Deduzca la forma escalar de la ecuación de movimiento de rotación con respecto al eje x, si $\boldsymbol{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$ y los momentos y productos de inercia del cuerpo *no son constantes* con respecto al tiempo.

21-41. Derive la forma escalar de la ecuación de movimiento de rotación con respecto al eje x, si $\boldsymbol{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$ y los momentos y productos de inercia del cuerpo son *constantes* con respecto al tiempo.

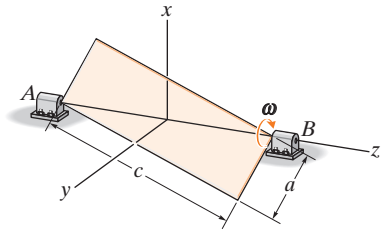
21-42. Derive las ecuaciones de movimiento de Euler con $\boldsymbol{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$, es decir, las ecuaciones 21-26.

21-43. La barra de 4 lb descansa a lo largo de las esquinas lisas de una caja abierta. En el instante mostrado, la caja tiene una velocidad $\mathbf{v} = \{3\mathbf{j}\}$ ft/s y una aceleración $\mathbf{a} = \{-6\mathbf{j}\}$ ft/s^2. Determine las componentes x, y, z de las fuerzas que ejercen las esquinas sobre la barra.



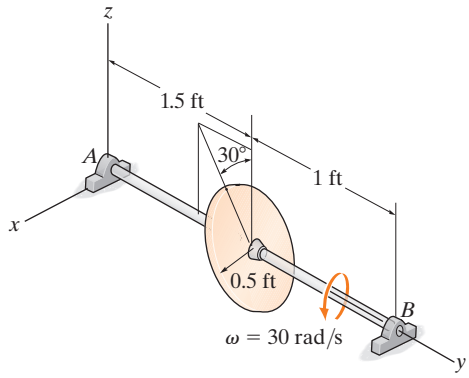
Prob. 21-43

***21-44.** La placa uniforme tiene una masa de $m = 2$ kg y se le da una rotación de $\omega = 4$rad/s con respecto a sus cojinetes en A y B. Si $a = 0.2$ m y $c = 0.3$ m, determine las reacciones verticales en el instante que se indica. Utilice los ejes x, y, z mostrados y tome en cuenta que $I_{zx} = -\left(\frac{mac}{12}\right)\left(\frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2}\right)$.



Prob. 21-44

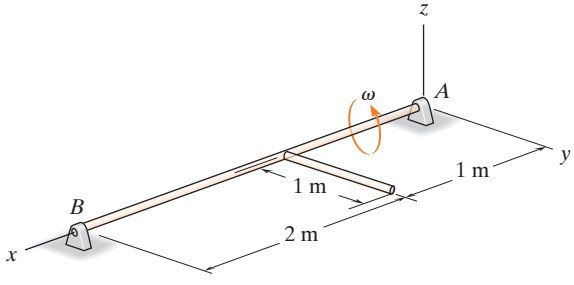
21-45. Si la flecha AB gira con una velocidad angular constante de $\omega = 30$ rad/s, determine las componentes X, Y, Z de las reacciones en el cojinete de empuje A y el cojinete B en el instante indicado. El disco tiene un peso de 15 lb. Desprecie el peso de la flecha AB.



Prob. 21-45

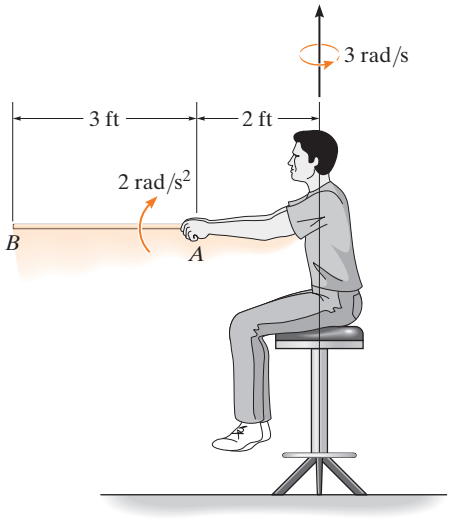
21-46. El ensamble se apoya en chumaceras en A y B, que desarrollan sólo reacciones de fuerza y y z sobre la flecha. Si la flecha gira en la dirección indicada a $\boldsymbol{\omega} = \{2\mathbf{i}\}$ rad/s, determine las reacciones en las chumaceras cuando el ensamble está en la posición mostrada. Además, ¿cuál es la aceleración angular de la flecha? La masa por unidad de longitud de cada varilla es de 5 kg/m.

21-47. El ensamble se apoya en chumaceras en A y B, que desarrollan sólo reacciones de fuerza y y z sobre la flecha. Si la flecha A se somete a un momento de par $\mathbf{M} = \{40\mathbf{i}\}$ N · m, y en el instante mostrado tiene una velocidad angular de $\boldsymbol{\omega} = \{2\mathbf{i}\}$ rad/s, determine las reacciones en las chumaceras del ensamble en este instante. Además, ¿cuál es la aceleración angular de la flecha? La masa por unidad de longitud de cada varilla es de 5 kg/m.



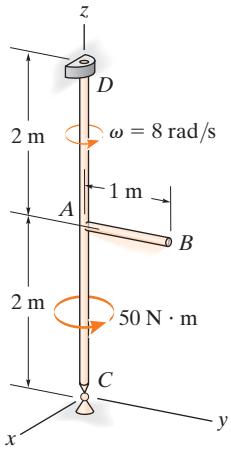
Probs. 21-46/47

***21-48.** El hombre se sienta en una silla giratoria que gira con una velocidad angular constante de 3 rad/s. Él sostiene en forma horizontal la varilla uniforme AB de 5 lb. Súbitamente le da a la varilla una aceleración angular de 2 rad/s^2, medida en relación con el hombre, de la manera indicada. Determine las componentes de la fuerza requerida y del momento en los puños, A, necesarias para hacer esto. Establezca ejes en el centro masa G de la varilla, con $+z$ hacia arriba y $+y$ dirigida a lo largo del eje de la varilla hacia A.



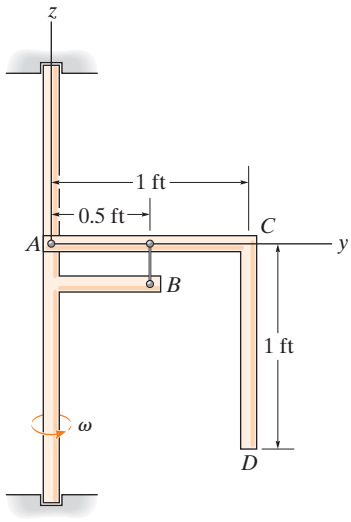
Prob. 21-48

21-49. El ensamble de varillas se sostiene mediante una junta de rótula en C y una chumacera en D, que sólo desarrolla reacciones de fuerza x y y. Las varillas tienen una masa de 0.75 kg/m. Determine la aceleración angular de las varillas y las componentes de reacción en los soportes en el instante $\omega = 8$ rad/s, que se muestra en la figura.



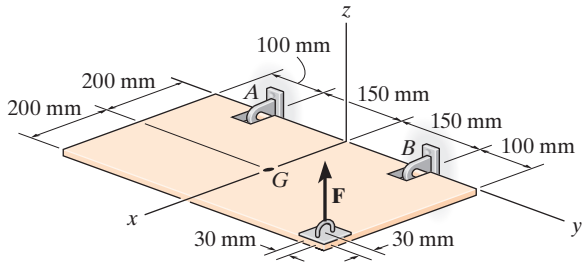
Prob. 21-49

21-50. La varilla doblada uniforme ACD tiene un peso de 5 lb/ft y está apoyada en A mediante un pasador y en B mediante una cuerda. Si la flecha vertical gira con una velocidad angular constante $\omega = 20$ rad/s, determine las componentes de fuerza x, y, z y el momento desarrollado en A, así como la tensión en la cuerda.



Prob. 21-50

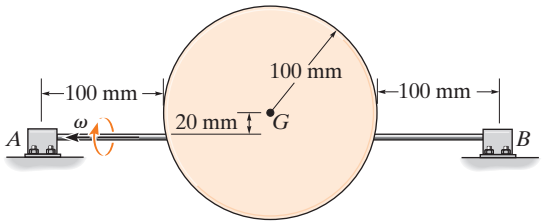
21-51. La puerta de escotilla uniforme, que tiene una masa de 15 kg y un centro de masa en G, se apoya en el plano horizontal mediante cojinetes en A y B. Si se aplica una fuerza vertical $F = 300$ N a la puerta, como se ilustra en la figura, determine las componentes de reacción en los cojinetes y la aceleración angular de la puerta. El cojinete en A resistirá una componente de fuerza en la dirección y, mientras que el cojinete en B no lo hará. Para realizar el cálculo, suponga que la puerta es una placa delgada y desprecie el tamaño de cada cojinete. La puerta está inicialmente en reposo.



Prob. 21-51

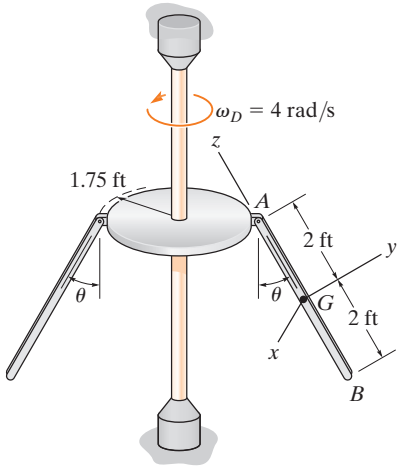
21

***21-52.** El disco circular de 5 kg está montado en forma descentrada sobre una flecha que se sostiene mediante cojinetes en A y B. Si la flecha gira a razón constante de $\omega = 10$ rad/s, determine las reacciones verticales en los cojinetes, cuando el disco está en la posición mostrada.



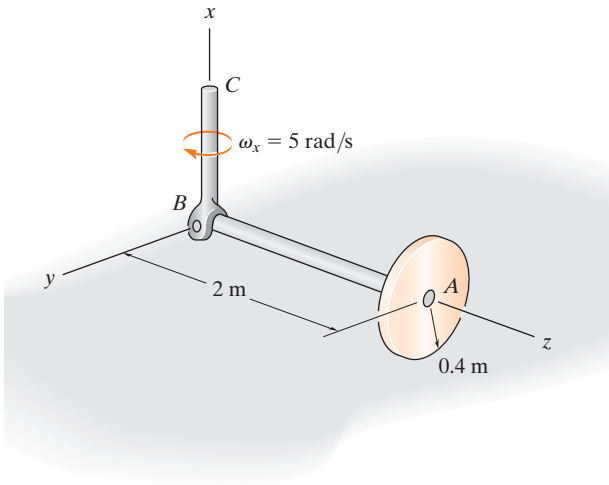
Prob. 21-52

21-53. Dos varillas uniformes, cada una con un peso de 10 lb, están conectadas mediante pasadores al borde de un disco giratorio. Si el disco tiene una velocidad angular constante $\omega_D = 4$ rad/s, determine el ángulo θ descrito por cada varilla durante el movimiento, así como las componentes de la fuerza y del momento desarrolladas en el pasador A. *Sugerencia:* Utilice los ejes x, y, z orientados de la manera que se muestra.



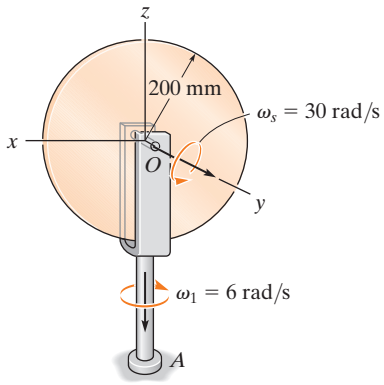
Prob. 21-53

21-54. El disco de 10 kg gira alrededor de la flecha AB, mientras que ésta gira con respecto a BC a razón constante de $\omega_x = 5$ rad/s. Si el disco no se desliza, determine las fuerzas normal y de fricción que ejerce sobre el suelo. Desprecie la masa de la flecha AB.



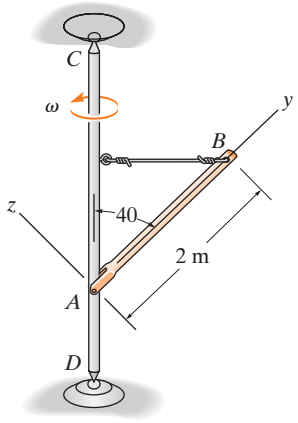
Prob. 21-54

21-55. El disco de 20 kg gira sobre su eje $\omega_s = 30$ rad/s, mientras que la varilla en forma de horquilla gira a $\omega_1 = 6$ rad/s. Determine las componentes x y z del momento que ejerce el eje sobre el disco durante el movimiento.



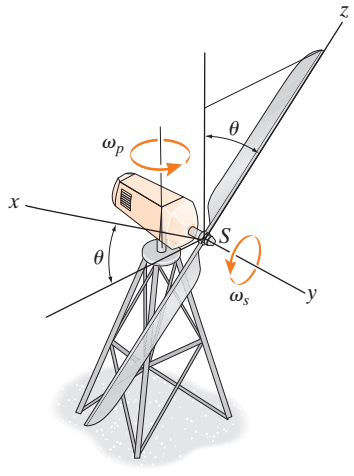
Prob. 21-55

***21-56.** La varilla delgada AB de 4 kg está fija en A y se mantiene en B mediante una cuerda. El eje CD se sostiene en sus extremos por medio de juntas de rótula y gira con una velocidad angular constante de 2 rad/s. Determine la tensión desarrollada en la cuerda y la magnitud de la fuerza desarrollada en el pasador A.



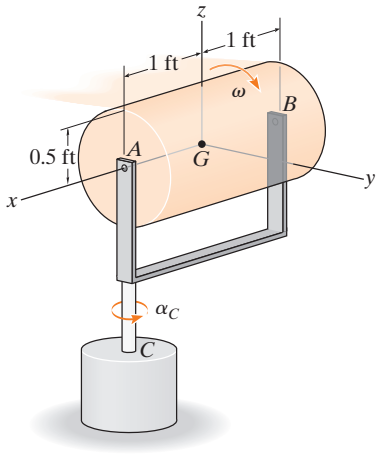
Prob. 21-56

21-57. Las aspas de una turbina de viento giran alrededor de una flecha S a una velocidad angular constante de ω_s, mientras que el armazón experimenta precesión alrededor el eje vertical con una velocidad angular constante de ω_p. Determine las componentes x, y, z del momento que la flecha ejerce en las aspas en función de θ. Considere cada aspa como una varilla delgada de masa m y longitud l.



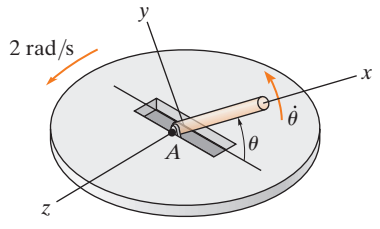
Prob. 21-57

21-58. El cilindro de 15 lb gira alrededor de la flecha AB con una rapidez angular constante $\omega = 4$ rad/s. Si la flecha de soporte en C, inicialmente en reposo, recibe una aceleración angular $\alpha_C = 12$ rad/s^2, determine las componentes de la reacción en los cojinetes A y B. El cojinete en A no puede soportar una componente de fuerza a lo largo del eje x, mientras que el cojinete en B sí puede hacerlo.



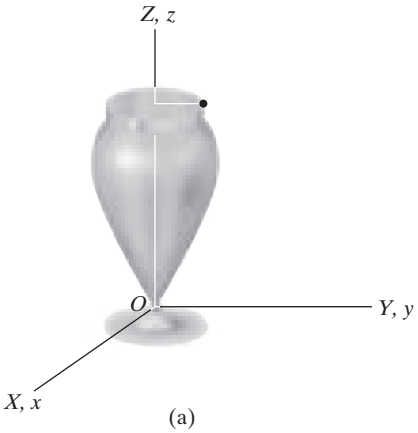
Prob. 21-58

21-59. La *varilla delgada* tiene una masa de 0.8 kg y una longitud total de 150 mm. Gira alrededor de su punto medio a razón constante de $\dot{\theta} = 6$ rad/s, en tanto que la mesa a la que está fijo su eje A gira a 2 rad/s. Determine las componentes x, y, z del momento que ejerce el eje sobre la varilla cuando ésta se encuentra en cualquier posición θ.

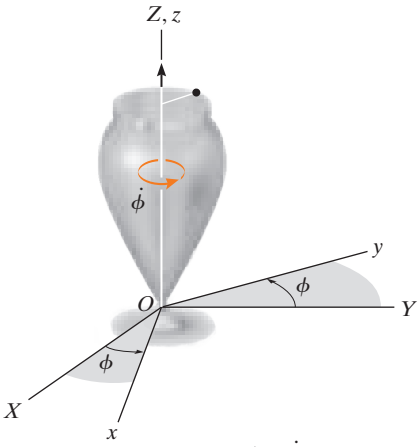


Prob. 21-59

21



(a)



Precesión $\dot{\phi}$

(b)

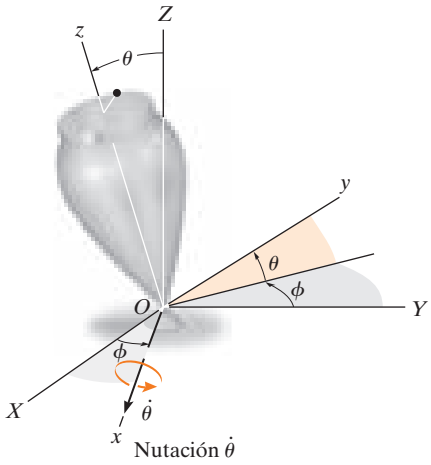
*21.5 Movimiento giroscópico

En esta sección desarrollaremos las ecuaciones que definen el movimiento de un cuerpo (trompo o giróscopo) simétrico con respecto a un eje y que gira alrededor de un punto fijo. Estas ecuaciones también se aplican al movimiento de un dispositivo especialmente interesante, el giroscopio.

El movimiento del cuerpo se analizará mediante los *ángulos de Euler* ϕ, θ, ψ (fi, teta, psi). Para ilustrar cómo definen la posición de un cuerpo, considere el trompo que se ilustra en la figura 21-15*a*. Para definir su posición final (fig. 21-15*d*), se fija un segundo sistema de ejes x, y, z en el trompo. Se comienza con la coincidencia de los ejes X, Y, Z y x, y, z (fig. 21-15*a*), y la posición final del trompo se determina con los siguientes tres pasos.

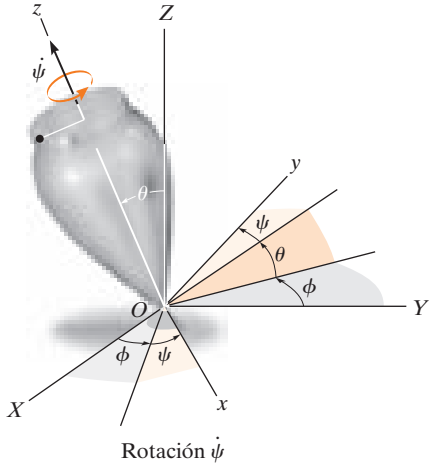
1. Haga girar el trompo en torno al eje Z (o z) un ángulo ϕ $(0 \leq \phi < 2\pi)$ (fig. 21-15*b*).
2. Haga girar el trompo en torno al eje x un ángulo θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ (fig. 21-15*c*).
3. Haga girar el trompo en torno al eje z un ángulo ψ $(0 \leq \psi < 2\pi)$ para obtener la posición final (fig. 21-15*d*).

La secuencia de estos tres ángulos ϕ, θ y luego ψ, debe mantenerse, ya que las rotaciones finitas *no son vectores* (vea la figura 20-1). Aunque éste sea el caso, las rotaciones diferenciales $d\boldsymbol{\phi}$, $d\boldsymbol{\theta}$ y $d\boldsymbol{\psi}$ son vectores y, por lo tanto, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del trompo puede expresarse en función de las derivadas con respecto al tiempo de los ángulos de Euler. Las componentes de la velocidad angular $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, y $\dot{\psi}$ se conocen como *precesión*, *nutación* y *rotación*, respectivamente.



Nutación $\dot{\theta}$

(c)



Rotación $\dot{\psi}$

(d)

Fig. 21-15

Sus direcciones positivas se muestran en la figura 21-16. Se observa que no todos estos vectores son perpendiculares entre sí; sin embargo, $\boldsymbol{\omega}$ del trompo aún puede expresarse en función de estas tres componentes.

Como el cuerpo (trompo) es simétrico con respecto al eje z o de rotación, no es necesario anexar los ejes x, y, z al trompo, ya que las propiedades inerciales de éste permanecen constantes con respecto al marco de referencia durante el movimiento. Por consiguiente, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_P + \boldsymbol{\omega}_n$ (fig. 21-16). Entonces, la velocidad angular del cuerpo es

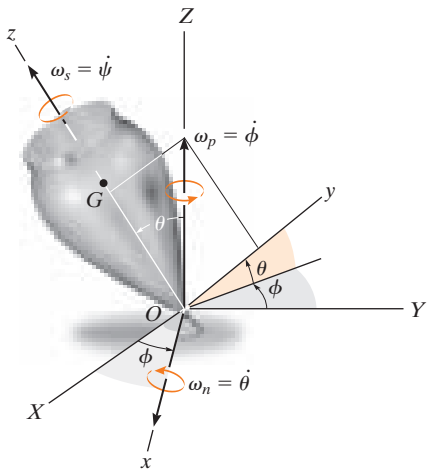


Fig. 21-16

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k} \\ &= \dot{\theta}\mathbf{i} + (\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\mathbf{k}\end{aligned} \tag{21-27}$$

Y la velocidad angular de los ejes es

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \Omega_x\mathbf{i} + \Omega_y\mathbf{j} + \Omega_z\mathbf{k} \\ &= \dot{\theta}\mathbf{i} + (\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (\dot{\phi}\cos\theta)\mathbf{k}\end{aligned} \tag{21-28}$$

Haga que los ejes x, y, z representen los ejes de inercia principales del trompo y, por lo tanto, los momentos de inercia serán $I_{xx} = I_{yy} = I$ e $I_{zz} = I_z$. Como $\boldsymbol{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$, se utilizan las ecuaciones 21-16 para establecer las ecuaciones de movimiento de rotación. Al sustituir en estas ecuaciones las respectivas componentes de velocidad angular definidas por las ecuaciones 21-27 y 21-28, sus derivadas con respecto al tiempo correspondientes y las componentes de momento de inercia, obtenemos

$$\begin{aligned}\Sigma M_x &= I(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta) + I_z\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) \\ \Sigma M_y &= I(\ddot{\phi}\,\text{sen}\,\theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta) - I_z\dot{\theta}(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) \\ \Sigma M_z &= I_z(\ddot{\psi} + \ddot{\phi}\cos\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta)\end{aligned} \tag{21-29}$$

Cada suma de momentos se aplica sólo en el punto fijo O o en el centro de masa G del cuerpo. Como las ecuaciones representan un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo grado, en general, puede obtenerse una solución de forma cerrada. En cambio, los ángulos de Euler ϕ, θ y ψ pueden obtenerse gráficamente como funciones de tiempo usando análisis numérico y técnicas por computadora.

Hay un caso especial, sin embargo, donde es posible simplificar las ecuaciones 21-29. Comúnmente conocida como *precesión constante*, ésta ocurre cuando el ángulo de nutación θ, el ángulo de precesión $\dot{\phi}$, y el ángulo de rotación $\dot{\psi}$ permanecen *constantes*. Las ecuaciones 21-29 se reducen entonces a la forma

$$\Sigma M_x = -I\dot{\phi}^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + I_z\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) \tag{21-30}$$

$$\Sigma M_y = 0$$

$$\Sigma M_z = 0$$

Las ecuaciones 21-30 se simplifican aún más observando que, de acuerdo con la ecuación 21-27, $\omega_z = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}$, de modo que

$$\Sigma M_x = -I\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_z\dot{\phi}\,(\operatorname{sen}\theta)\omega_z$$

o bien,

$$\boxed{\Sigma M_x = \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta(I_z\omega_z - I\dot{\phi}\cos\theta)} \qquad (21\text{-}31)$$

Es interesante destacar que los efectos que la rotación $\dot{\psi}$ tiene en un momento con respecto al eje x. Para demostrar esto, considere el rotor que gira en la figura 21-17. Aquí $\theta = 90°$, en cuyo caso la ecuación 21-30 se reduce a la forma

$$\Sigma M_x = I_z\dot{\phi}\dot{\psi}$$

o bien

$$\boxed{\Sigma M_x = I_z\Omega_y\omega_z} \qquad (21\text{-}32)$$

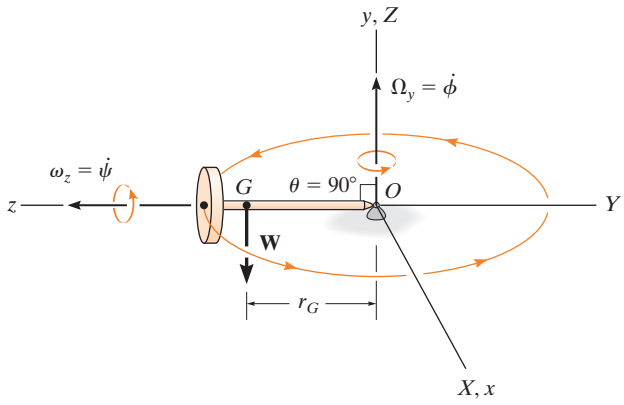


Fig. 21-17

En la figura se observa que $\boldsymbol{\Omega}_y$ y $\boldsymbol{\omega}_z$ actúan a lo largo de sus respectivos *ejes positivos* y, por consiguiente, son mutuamente perpendiculares. Instintivamente, ¡esperaríamos que el rotor cayera por la fuerza de gravedad! Sin embargo, éste no es el caso en absoluto, siempre que el producto $I_z\Omega_y\omega_z$ se seleccione de forma correcta, para contrarrestar el momento $\Sigma M_x = Wr_G$ del peso del rotor con respecto a O. A este fenómeno inusitado del movimiento de un cuerpo rígido se le conoce como *efecto giroscópico*.

Quizás una demostración más intrigante del efecto giroscópico se desprende del estudio de la acción de un *giroscopio*, frecuentemente designado como *giro*. Un giro es un rotor que gira a una muy alta velocidad con respecto a su eje de simetría. Esta velocidad de rotación es considerablemente mayor que su velocidad de rotación precesional en torno al eje vertical. Por consiguiente, en la práctica, la dirección de la cantidad de movimiento angular del giro es a lo largo de su eje de rotación. Por lo tanto, para el rotor del giro que se muestra en la figura 21-18, $\omega_z \gg \Omega_y$, y la magnitud de la cantidad de movimiento angular con respecto al punto O, determinada con las ecuaciones 21-11, se reduce a la forma $H_O = I_z\omega_z$. Como tanto la magnitud como la dirección de $\mathbf{H}_O$ son constantes observadas desde x, y, z, el resultado de la aplicación directa de la ecuación 21-22 es

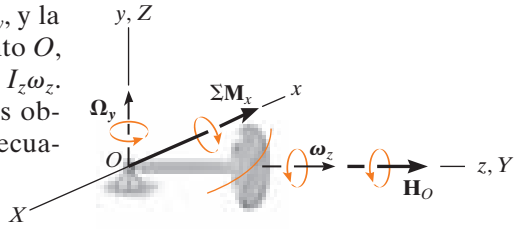


Fig. 21-18

$$\Sigma\mathbf{M}_x = \boldsymbol{\Omega}_y \times \mathbf{H}_O \qquad (21\text{-}33)$$

Con la regla de la mano derecha aplicada al producto vectorial, se observa que $\boldsymbol{\Omega}_y$ siempre oscila $\mathbf{H}_O$ (u $\boldsymbol{\omega}_z$) hacia el sentido de $\Sigma\mathbf{M}_x$. En realidad, el *cambio de dirección* de la cantidad de movimiento angular del giro, $d\mathbf{H}_O$, equivale al impulso angular provocado por el peso del giro con respecto a O, es decir, $d\mathbf{H}_O = \Sigma\mathbf{M}_x\, dt$, ecuación 21-20. Asimismo, como $H_O = I_z\omega_z$ y $\Sigma\mathbf{M}_x$, $\boldsymbol{\Omega}_y$ y $\mathbf{H}_O$ son mutuamente perpendiculares, la ecuación 21-33 se reduce a la ecuación 21-32.

Cuando un giro se monta en anillos cardánicos (fig. 21-19), se *libera* de los momentos externos aplicados a su base. Por lo tanto, en teoría, su cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}$ nunca experimentará precesión, sino que, en cambio, mantiene su misma orientación fija a lo largo del eje de rotación cuando la base gira. Este tipo de giroscopio se llama *giro libre* y es útil como brújula giroscópica cuando el eje de rotación del giro está dirigido hacia el norte. En realidad, el mecanismo cardánico nunca está completamente libre de fricción, por lo que tal dispositivo es útil únicamente para la navegación local de buques y aviones. El efecto giroscópico también sirve para estabilizar tanto el movimiento de rodamiento de buques en el mar como las trayectorias de misiles y proyectiles. Además, este efecto es de importancia significativa en el diseño de flechas y cojinetes de rotores sometidos a precesiones forzadas.

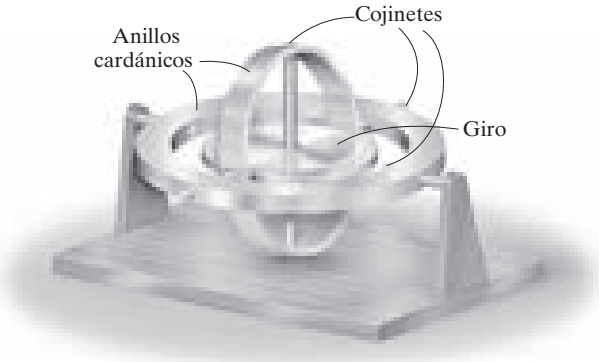
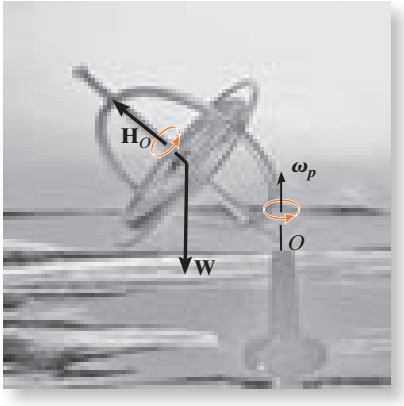
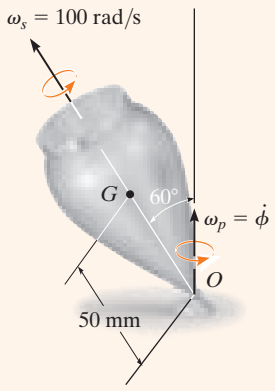


Fig. 21-19



La rotación del giro dentro del armazón de este giroscopio de juguete produce cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$, que cambia de dirección cuando el armazón experimente la precesión $\boldsymbol{\omega}_P$ con respecto al eje vertical. El giroscopio no caerá pues el momento de su peso $\mathbf{W}$ con respecto al apoyo está equilibrado por el cambio de dirección de $\mathbf{H}_O$. (© R. C. Hibbeler)

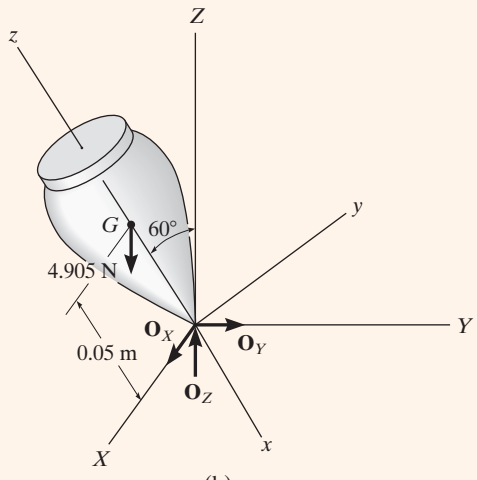
EJEMPLO 21.7



(a)

Fig. 21-20

El trompo de la figura 21-20*a* tiene una masa de 0.5 kg y experimenta precesión con respecto al eje vertical a un ángulo constante de $\theta = 60°$. Si gira con una velocidad angular de $\omega_s = 100$ rad/s, determine la precesión $\boldsymbol{\omega}_P$. Suponga que los momentos de inercia axial y transversal del trompo son $0.45(10^{-3})$ kg · m^2 y $1.20(10^{-3})$ kg · m^2, respectivamente, medidos con respecto al punto fijo *O*.



(b)

SOLUCIÓN

Se utilizará la ecuación 21-30 para la solución, ya que el movimiento de *precesión es constante*. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre (fig. 21-20*b*), los ejes de coordenadas se establecen de la forma usual, es decir, con el eje z positivo en la dirección de la rotación, el eje Z positivo en la dirección de la precesión, y el eje x positivo en la dirección del momento ΣM_x (remítase a la figura 21-16). Por consiguiente,

$$\Sigma M_x = -I\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + I_z\dot{\phi} \operatorname{sen}\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})$$

$$4.905\ \text{N}(0.05\ \text{m}) \operatorname{sen} 60° = -[1.20(10^{-3})\,\text{kg}\cdot\text{m}^2\,\dot{\phi}^2] \operatorname{sen} 60° \cos 60°$$
$$+ [0.45(10^{-3})\,\text{kg}\cdot\text{m}^2]\dot{\phi} \operatorname{sen} 60°(\dot{\phi}\cos 60° + 100\ \text{rad/s})$$

o bien

$$\dot{\phi}^2 - 120.0\dot{\phi} + 654.0 = 0 \qquad (1)$$

Al resolver esta ecuación cuadrática para la precesión obtenemos

$$\dot{\phi} = 114\ \text{rad/s} \quad \text{(alta precesión)} \qquad \textit{Resp.}$$

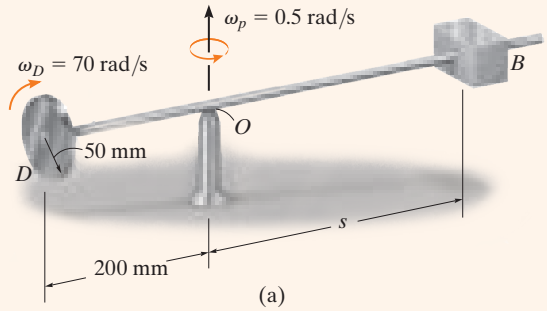
y

$$\dot{\phi} = 5.72\ \text{rad/s} \quad \text{(baja precesión)} \qquad \textit{Resp.}$$

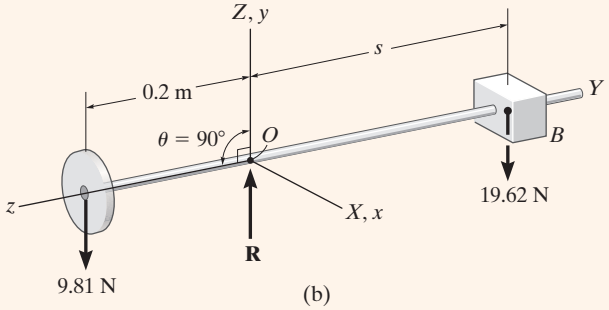
NOTA: En realidad, por lo general se observaría baja precesión del trompo, ya que la alta precesión requeriría una mayor energía cinética.

EJEMPLO 21.8

El disco de 1 kg que se muestra en la figura 21-21*a* gira alrededor de su eje a una velocidad angular constante de $\omega_D = 70$ rad/s. El bloque B tiene una masa de 2 kg y, si ajustamos su posición s, podemos cambiar la precesión del disco alrededor de su pivote de soporte O mientras que la flecha permanece horizontal. Determine la posición s que permitirá que el disco tenga una precesión constante $\omega_p = 0.5$ rad/s alrededor del pivote. Ignore el peso de la flecha.



(a)



(b)

Fig. 21-21

SOLUCIÓN

El diagrama de cuerpo libre del ensamble se muestra en la figura 21-21*b*. El origen de los sistemas de coordenadas tanto x, y, z como X, Y, Z se encuentra en el punto fijo O. En el sentido convencional, el eje Z se elige a lo largo del eje de precesión y el eje z a lo largo del eje de rotación, de modo que $\theta = 90°$. Como la precesión es *constante*, puede utilizarse la ecuación 21-32 para la solución

$$\Sigma M_x = I_z \Omega_y \omega_z$$

Al sustituir los datos requeridos se obtiene

$$(9.81\ \text{N})(0.2\ \text{m}) - (19.62\ \text{N})s = \left[\tfrac{1}{2}(1\ \text{kg})(0.05\ \text{m})^2\right] 0.5\ \text{rad/s}(-70\ \text{rad/s})$$

$$s = 0.102\ \text{m} = 102\ \text{mm} \qquad \textit{Resp.}$$

21.6 Movimiento sin par de torsión

Cuando la única fuerza externa que actúa en un cuerpo es provocada por la gravedad, el movimiento general de un cuerpo se conoce como *movimiento sin par de torsión*. Este tipo de movimiento es característico de planetas, satélites artificiales y proyectiles, siempre que se ignore la fricción del aire.

Para describir las características de este movimiento, se supondrá que la distribución de la masa del cuerpo es *axialmente simétrica*. El satélite de la figura 21-22 es un ejemplo de un cuerpo como ése, donde el eje z representa un eje de simetría. El origen de las coordenadas x, y, z se encuentra en el centro de masa G, de modo que $I_{zz} = I_z$ e $I_{xx} = I_{yy} = I$. Como la gravedad es la única fuerza externa presente, la suma de momentos con respecto al centro de masa es cero. Según la ecuación 21-21, esto requiere que la cantidad de momento angular del cuerpo sea constante, es decir,

$$\mathbf{H}_G = \text{constante}$$

En el instante considerado, se supondrá que el marco de referencia inercial está orientado de modo que el eje Z positivo esté dirigido a lo largo de $\mathbf{H}_G$ y que el eje y quede en el plano formado por los ejes z y Z (fig. 21-22). El ángulo de Euler formado entre Z y z es θ y, por consiguiente, con esta selección de ejes la cantidad de movimiento angular se expresa como

$$\mathbf{H}_G = H_G \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + H_G \cos\theta\,\mathbf{k}$$

Además, si usamos la ecuación 21-11, entonces

$$\mathbf{H}_G = I\omega_x\mathbf{i} + I\omega_y\mathbf{j} + I_z\omega_z\mathbf{k}$$

Al igualar las componentes **i**, **j**, **k** respectivas de las dos ecuaciones anteriores obtenemos

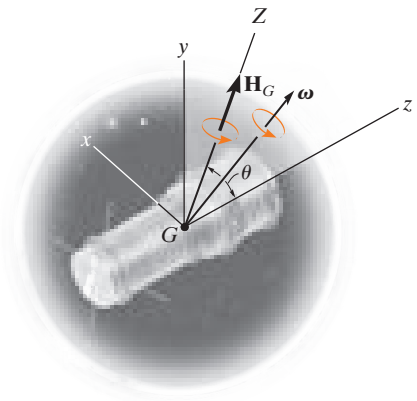


Fig. 21-22

$$\omega_x = 0 \quad \omega_y = \frac{H_G \operatorname{sen} \theta}{I} \quad \omega_z = \frac{H_G \cos \theta}{I_z} \tag{21-34}$$

o bien,

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{H_G \operatorname{sen} \theta}{I}\mathbf{j} + \frac{H_G \cos \theta}{I_z}\mathbf{k} \tag{21-35}$$

Del mismo modo, si igualamos las componentes **i**, **j**, **k** respectivas de la ecuación 21-27 con los de la ecuación 21-34, obtenemos

$$\dot{\theta} = 0$$

$$\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta = \frac{H_G \operatorname{sen} \theta}{I}$$

$$\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = \frac{H_G \cos \theta}{I_z}$$

Al resolver, obtenemos

$$\theta = \text{constante}$$
$$\dot{\phi} = \frac{H_G}{I} \tag{21-36}$$
$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I I_z} H_G \cos \theta$$

Por lo tanto, para el movimiento sin par de torsión de un cuerpo axialmente simétrico, permanece constante el ángulo θ formado entre el vector de cantidad de movimiento angular y la rotación del cuerpo. Asimismo, la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$, la precesión $\dot{\phi}$, y la rotación $\dot{\psi}$ del cuerpo permanecen constantes en todo momento durante el movimiento.

Al eliminar H_G de la segunda y tercera de las ecuaciones 21-36, obtenemos la siguiente relación entre la rotación y la precesión:

$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I_z} \dot{\phi} \cos \theta \tag{21-37}$$

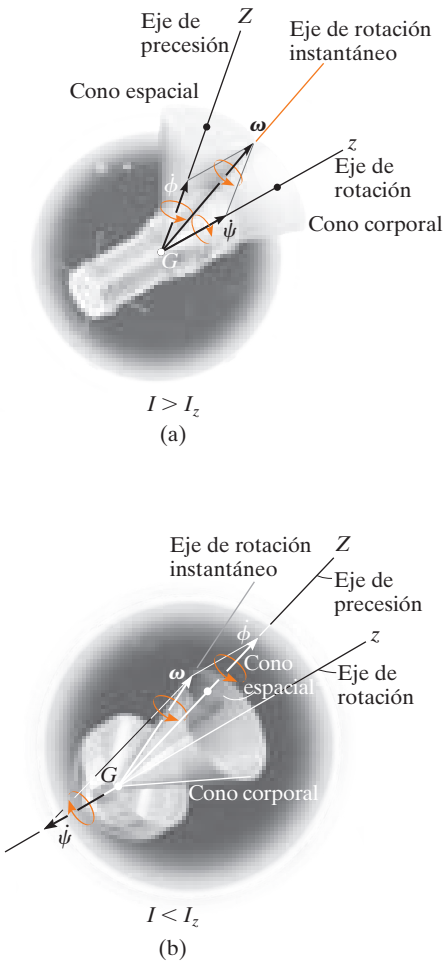
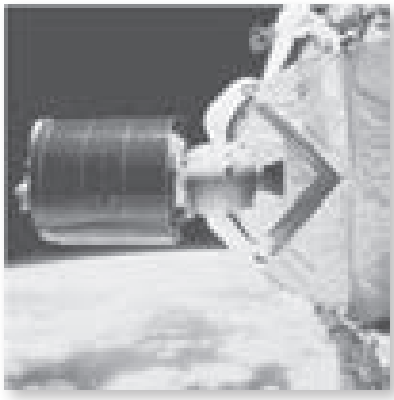


Fig. 21-23

Estas dos componentes de movimiento angular pueden estudiarse con los modelos de cono corporal y cono espacial presentados en la sección 20.1. El *cono espacial* que define la precesión no gira, ya que la precesión tiene una dirección fija; mientras que la superficie externa del *cono corporal* rueda sobre la superficie externa del cono espacial. Trate de imaginar este movimiento en la figura 21-23*a*. El ángulo interior de cada cono se elige de modo que la velocidad angular resultante del cuerpo esté dirigida a lo largo de la línea de contacto de ambos conos. Esta línea de contacto representa el eje de rotación instantáneo del cono corporal y, por ende, la velocidad angular tanto del cono corporal como del cuerpo debe dirigirse a lo largo de esta línea. Como la rotación es una función de los momentos de inercia I e I_z del cuerpo, ecuación 21-36, el modelo de cono que aparece en la figura 21-23*a* es satisfactorio para describir el movimiento, siempre que $I > I_z$. El movimiento sin torsión que satisface estos requerimientos se llama *precesión regular*. Si $I < I_z$, la rotación es negativa y la precesión positiva. El movimiento del satélite que se muestra en la figura 21-23*b* representa este movimiento ($I < I_z$). Nuevamente puede utilizarse el modelo del cono para representar el movimiento; sin embargo, para preservar la suma vectorial correcta de la rotación y precesión para obtener la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, la superficie interna del cono corporal debe rodar sobre la superficie externa del cono espacial (fijo). Este movimiento se conoce como *precesión retrógrada*.

A los satélites se les suele imprimir rotación antes de lanzarlos. Si su cantidad de movimiento angular no es colineal con el eje de rotación, exhibirán precesión. En la foto de la izquierda ocurrirá precesión regular, ya que $I > I_z$, y en la foto de la derecha ocurrirá precesión retrógrada pues $I < I_z$.



(© R. C. Hibbeler)

(© R. C. Hibbeler)

21

EJEMPLO 21.9

El movimiento de un balón de fútbol americano se observa con un proyector de cámara lenta. En la película, se ve que la rotación del balón está dirigida a 30° de la horizontal, como se muestra en la figura 21-24*a*. Además, el balón experimenta precesión con respecto al eje vertical a una velocidad de $\dot{\phi} = 3$ rad/s. Si la relación de los momentos de inercia axial y transversal del balón es de $\frac{1}{3}$, medida con respecto al centro de masa, determine la magnitud de la rotación del balón y de su velocidad angular. Ignore el efecto de la resistencia del aire.

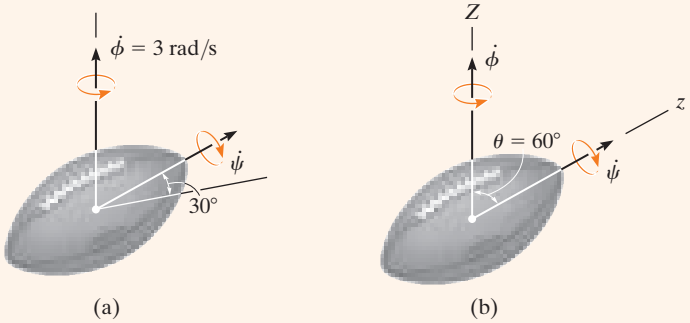


Fig. 21-24

SOLUCIÓN

Como el peso del balón es la única fuerza que actúa, el movimiento es sin par de torsión. En el sentido convencional, si el eje z se establece a lo largo del eje de rotación y el eje Z a lo largo del eje de precesión, como se indica en la figura 21-24*b*, entonces el ángulo $\theta = 60°$. Al aplicar la ecuación 21-37, la rotación es

$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I_z}\dot{\phi}\cos\theta = \frac{I - \frac{1}{3}I}{\frac{1}{3}I}(3)\cos 60°$$
$$= 3 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Si utilizamos la ecuación 21-34, donde $H_G = \dot{\phi}I$ (ecuación 21-36), tenemos

$$\omega_x = 0$$
$$\omega_y = \frac{H_G \operatorname{sen}\theta}{I} = \frac{3I \operatorname{sen} 60°}{I} = 2.60 \text{ rad/s}$$
$$\omega_z = \frac{H_G \cos\theta}{I_z} = \frac{3I\cos 60°}{\frac{1}{3}I} = 4.50 \text{ rad/s}$$

Por lo tanto,

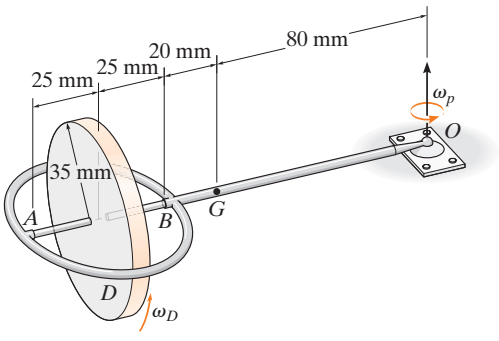
$$\omega = \sqrt{(\omega_x)^2 + (\omega_y)^2 + (\omega_z)^2}$$
$$= \sqrt{(0)^2 + (2.60)^2 + (4.50)^2}$$
$$= 5.20 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

***21-60.** Demuestre que la velocidad angular de un cuerpo, en función de los ángulos de Euler ϕ, θ y ψ, puede expresarse como $\omega = (\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\mathbf{i} + (\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen}\,\psi)\mathbf{j} + (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\mathbf{k}$, donde la dirección de **i**, **j**, **k** es a lo largo de los ejes x, y, z como se muestra en la figura 21-15*d*.

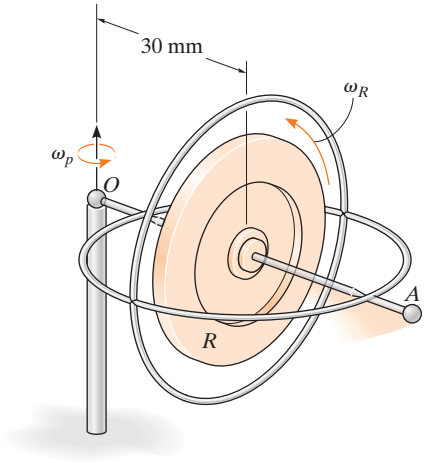
21-61. En principio, una varilla delgada coincide con el eje Z cuando se le imparten tres rotaciones definidas por los ángulos de Euler $\phi = 30°$, $\theta = 45°$ y $\psi = 60°$. Si estas rotaciones se imprimen en el orden establecido, determine los ángulos de dirección de las coordenadas α, β, γ del eje de la varilla con respecto a los ejes X, Y, Z. ¿Son estas direcciones las mismas con cualquier orden de las rotaciones? ¿Por qué?

21-62. El giroscopio se compone de un disco uniforme D de 450 g que está unido al eje AB de masa despreciable. El bastidor de soporte tiene una masa de 180 g y un centro de masa en G. Si el disco gira alrededor del eje a $\omega_D = 90$ rad/s, determine la velocidad angular constante ω_p a la que el bastidor experimenta precesión con respecto al punto pivote O. El bastidor se mueve en el plano horizontal.



Prob. 21-62

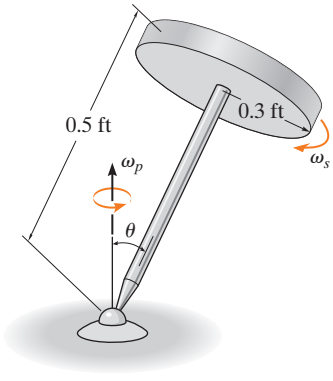
21-63. El giroscopio de juguete consta de un rotor R que está unido al bastidor de masa despreciable. Si se observa que el bastidor experimenta precesión con respecto al punto pivote O a $\omega_p = 2$ rad/s, determine la velocidad angular ω_R del rotor. El vástago OA se mueve en el plano horizontal. El rotor tiene una masa de 200 g y un radio de giro $k_{OA} = 20$ mm con respecto a OA.



Prob. 21-63

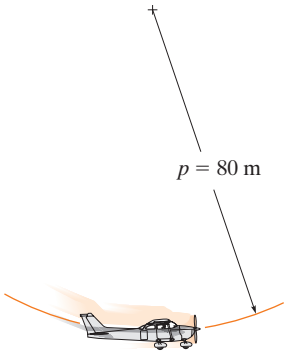
***21-64.** El trompo consiste en un disco delgado que tiene un peso de 8 lb y un radio de giro de 0.3 ft. La varilla tiene una masa despreciable y una longitud de 0.5 ft. Si el trompo gira con una velocidad angular $\omega_s = 300$ rad/s, determine la velocidad angular de precesión ω_p en estado estacionario de la varilla, cuando $\theta = 40°$.

21-65. Resuelva el problema 21-64, si $\theta = 90°$.



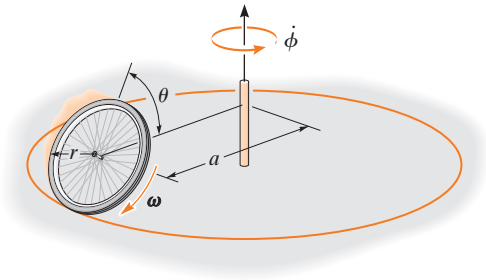
Probs. 21-64/65

21-66. La hélice de un avión de un solo motor tiene una masa de 15 kg y un radio de giro centroidal de 0.3 m calculado con respecto al eje de giro. Cuando se observa desde la parte delantera del avión, la hélice gira en sentido horario a 350 rad/s con respecto al eje de giro. Si el avión entra en una curva vertical que tiene un radio de 80 m y se desplaza a 200 km/h, determine el momento de flexión giroscópico que la hélice ejerce sobre los cojinetes del motor cuando el avión está en su posición más baja.



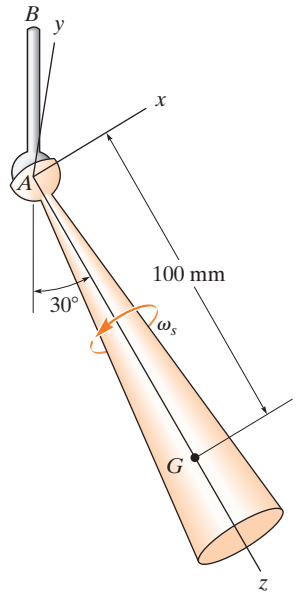
Prob. 21-66

21-67. Una rueda de masa m y radio r rueda con giro constante $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de una trayectoria circular con un radio a. Si el ángulo de inclinación es θ, determine la tasa de precesión. Trate a la rueda como un anillo delgado. No ocurre deslizamiento.



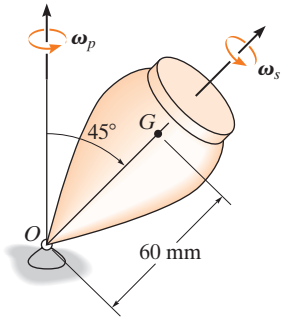
Prob. 21-67

***21-68.** El trompo cónico tiene una masa de 0.8 kg, y los momentos de inercia son $I_x = I_y = 3.5(10^{-3})$ kg · m^2 e $I_z = 0.8(10^{-3})$ kg · m^2. Si gira libremente en la junta de rótula en A con una velocidad angular $\omega_s = 750$ rad/s, calcule la precesión del trompo alrededor del eje de la flecha AB.



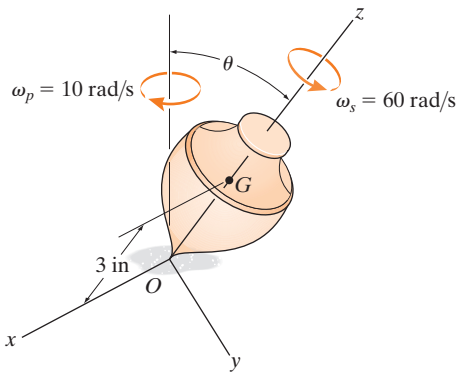
Prob. 21-68

21-69. El trompo tiene una masa de 90 g, un centro de masa en G y un radio de giro $k = 18$ mm alrededor de su eje de simetría. El radio de giro es $k_t = 35$ mm con respecto a cualquiera de los ejes transversales que actúan a través del punto O. Si el trompo está conectado a una junta de rótula en O y la precesión es de $\omega_p = 0.5$ rad/s, determine el giro $\boldsymbol{\omega}_s$.



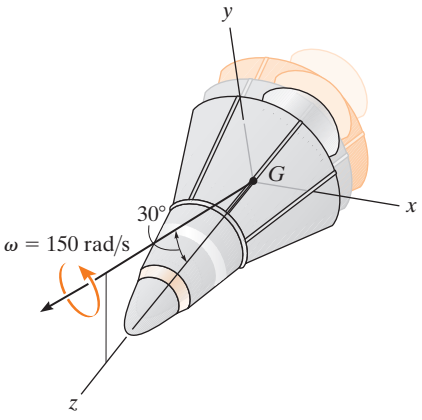
Prob. 21-69

21-70. El trompo de 1 lb tiene su centro de gravedad en el punto G. Si se hace girar alrededor de su eje de simetría y experimenta precesión con respecto al eje vertical a velocidades constantes de $\omega_s = 60$ rad/s y $\omega_p = 10$ rad/s, respectivamente, determine el ángulo θ de estado estacionario. El radio de giro del trompo con respecto al eje z es $k_z = 1$ in, y con respecto a los ejes x y y es $k_x = k_y = 4$ in.



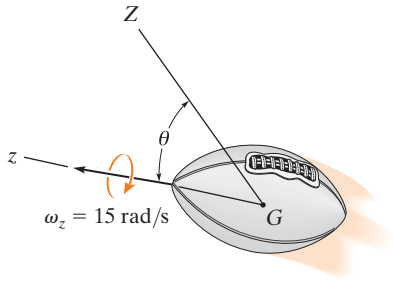
Prob. 21-70

21-71. La cápsula espacial tiene una masa de 2 Mg, centro de masa en G y radios de giro con respecto a su eje de simetría (eje z) y a sus ejes transversales (x o y) de $k_z = 2.75$ m y $k_x = k_y = 5.5$ m, respectivamente. Si la velocidad angular de la cápsula es la que se muestra, determine su precesión $\dot{\phi}$ y giro $\dot{\psi}$. Indique, si la precesión es regular o retrógrada. Asimismo, trace el cono espacial y el cono corporal del movimiento.



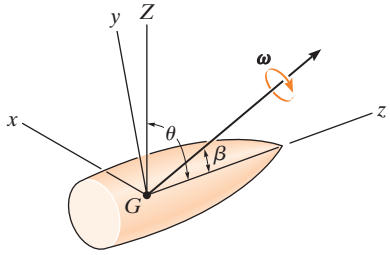
Prob. 21-71

***21-72.** El balón de fútbol americano de 0.25 kg gira a $\omega_z = 15$ rad/s como se indica en la figura. Si $\theta = 40°$, determine la precesión con respecto al eje z. El radio de giro con respecto al eje de giro es $k_z = 0.042$ m, y alrededor de un eje transversal es $k_y = 0.13$ m.



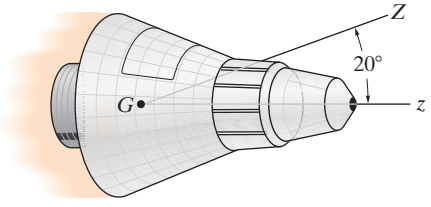
Prob. 21-72

21-73. El proyectil mostrado se somete a un movimiento libre de par. Los momentos de inercia transversales y axiales son I e I_z, respectivamente. Si θ representa el ángulo entre el eje de precesión Z y el eje de simetría z, y β es el ángulo entre la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y el eje z, muestre que β y θ se relacionan mediante la ecuación $\tan\theta = (I/I_z)\tan\beta$.



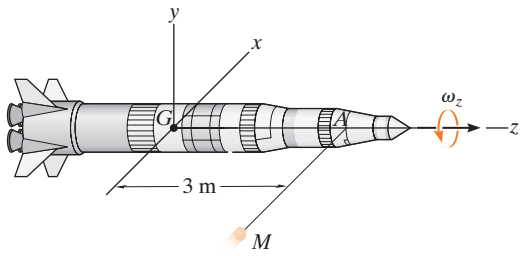
Prob. 21-73

21-74. El radio de giro alrededor de un eje que pasa por el eje de simetría de la cápsula espacial de 1.6 Mg es $k_z = 1.2$ m y con respecto a cualquier eje transversal que atraviese el centro de masa G, $k_t = 1.8$ m. Si la cápsula tiene una precesión en estado estacionario conocida de dos revoluciones por hora con respecto al eje Z, determine la razón de giro con respecto al eje z.



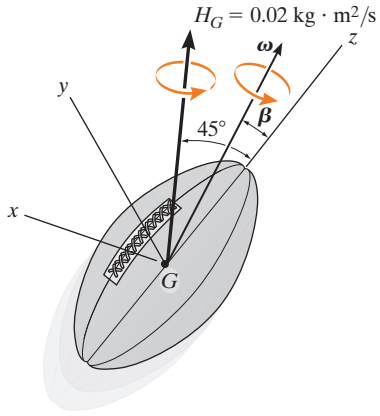
Prob. 21-74

21-75. El cohete tiene una masa de 4 Mg y radios de giro de $k_z = 0.85$ m y $k_x = k_y = 2.3$ m. Inicialmente gira alrededor del eje z a $\omega_z = 0.05$ rad/s cuando un meteorito M lo golpea en A y crea un impulso $\mathbf{I} = \{300\mathbf{i}\}$ N · s. Determine el eje de precesión después del impacto.



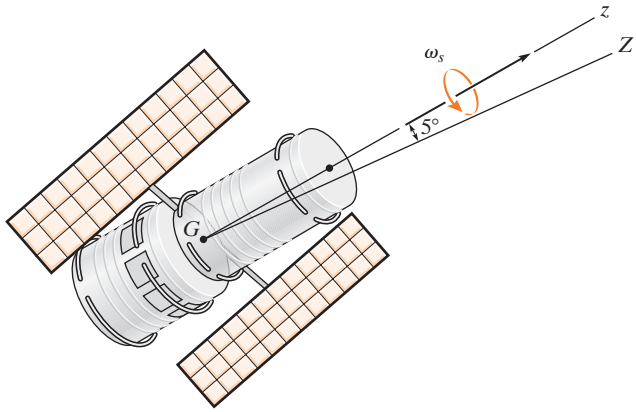
Prob. 21-75

***21-76.** El balón de fútbol americano tiene una masa de 450 g y radios de giro con respecto a su eje de simetría (eje z) y a sus ejes transversales (ejes x o y) de $k_z = 30$ mm y $k_x = k_y = 50$ mm, respectivamente. Si el balón tiene una cantidad de movimiento angular de $H_G = 0.02$ kg · m^2/s, determine su precesión $\dot{\phi}$ y rotación $\dot{\psi}$. Además, determine el ángulo β que el vector de velocidad angular forma con el eje z.



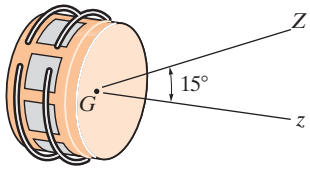
Prob. 21-76

21-77. El satélite tiene una masa de 1.8 Mg y sus radios de giro transversales son $k_z = 0.8$ m y $k_t = 1.2$ m, respectivamente, alrededor de ejes que pasan por el centro de masa axial G. Si gira a $\omega_s = 6$ rad/s al lanzarlo, determine su cantidad de movimiento angular. Se presenta precesión alrededor del eje Z.



Prob. 21-77

21-78. El radio de giro con respecto a un eje que pasa por el eje de simetría del satélite de 1.2 Mg es $k_z = 1.4$ m, y alrededor de cualquier eje transversal que atraviese el centro de masa G, $k_t = 2.20$ m. Si el satélite tiene un giro conocido de 2700 rev/h con respecto al eje z, determine la precesión de estado estacionario con respecto al eje z.



Prob. 21-78

REPASO DEL CAPÍTULO

Momentos y productos de inercia

Un cuerpo tiene seis componentes de inercia con cualesquiera ejes x, y, z especificados. Tres de éstos son momentos de inercia con respecto a cada uno de los ejes I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} y tres son productos de inercia, cada uno definido con respecto a dos planos ortogonales, I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}. Si cualquiera de ellos o ambos planos son planos de simetría, entonces el producto de inercia con respecto a ellos será cero.

Los momentos y productos de inercia se determinan mediante integración directa o mediante valores tabulados. Si estas cantidades tienen que determinarse con respecto a ejes o planos que no pasan por el centro de masa, entonces, se deben usar los teoremas de los ejes paralelos y del plano paralelo.

Siempre que se conozcan las seis componentes de inercia, entonces el momento de inercia con respecto a cualquier eje puede determinarse con la ecuación de transformación de inercia.

$$I_{xx} = \int_m r_x^2\, dm = \int_m (y^2 + z^2)\, dm \qquad I_{xy} = I_{yx} = \int_m xy\, dm$$

$$I_{yy} = \int_m r_y^2\, dm = \int_m (x^2 + z^2)\, dm \qquad I_{yz} = I_{zy} = \int_m yz\, dm$$

$$I_{zz} = \int_m r_z^2\, dm = \int_m (x^2 + y^2)\, dm \qquad I_{xz} = I_{zx} = \int_m xz\, dm$$

$$I_{Oa} = I_{xx}u_x^2 + I_{yy}u_y^2 + I_{zz}u_z^2 - 2I_{xy}u_xu_y - 2I_{yz}u_yu_z - 2I_{zx}u_zu_x$$

Momentos de inercia principales

En cualquier punto en el cuerpo o fuera de éste, los ejes x, y, z pueden orientarse de modo que los productos de inercia sean cero. Los momentos de inercia resultantes son los llamados momentos de inercia principales. Por lo general, uno de ellos será un máximo y el otro un mínimo.

$$\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

Principio de impulso y cantidad de movimiento

La cantidad de movimiento de un cuerpo se determina con respecto a cualquier punto arbitrario A.

Una vez que se formula la cantidad de movimiento lineal y angular, entonces puede utilizarse el principio de impulso y cantidad de movimiento para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo.

$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m(\mathbf{v}_G)_2 \qquad (\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

$$\mathbf{H}_O = \int_m \rho_O \times (\omega \times \rho_O)\, dm$$

Punto fijo O

donde

$$H_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z$$
$$H_y = -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z$$
$$H_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

$$\mathbf{H}_G = \int_m \rho_G \times (\omega \times \rho_G)\, dm$$

Centro de masa

$$\mathbf{H}_A = \rho_{G/A} \times m\mathbf{v}_G + \mathbf{H}_G$$

Punto arbitrario

Principio de trabajo y energía

La energía cinética de un cuerpo en general se determina con respecto a un punto fijo o centro de masa del cuerpo.

$$T = \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2$$

Punto fijo

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2$$

Centro de masa

Estas formulaciones pueden utilizarse junto con el principio de trabajo y energía para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y desplazamiento.

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

Ecuaciones de movimiento

Existen tres ecuaciones escalares de movimiento de translación de un cuerpo rígido que se desplaza en tres dimensiones.

Las tres ecuaciones escalares de movimiento de rotación dependen del movimiento de la referencia x, y, z. Con mucha frecuencia, estos ejes están orientados de modo que son ejes de inercia principales. Si los ejes están fijos en el cuerpo y se mueven junto con éste, de modo que $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, entonces las ecuaciones se conocen como ecuaciones de movimiento de Euler.

Un diagrama de cuerpo libre siempre deberá acompañar la aplicación de las ecuaciones de movimiento.

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma F_z = m(a_G)_z$$

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x$$
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$$

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - I_y\Omega_z\omega_y + I_z\Omega_y\omega_z$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x$$
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - I_x\Omega_y\omega_x + I_y\Omega_x\omega_y$$

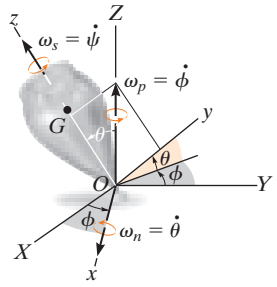
$$\boldsymbol{\Omega} \neq \Omega$$

Movimiento giroscópico

El movimiento angular de un giroscopio se describe mejor por medio de los tres ángulos de Euler ϕ, θ y ψ. Las componentes de la velocidad angular se llaman precesión $\dot{\phi}$, nutación $\dot{\theta}$, y rotación $\dot{\psi}$.

Si $\dot{\theta} = 0$ y $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ son constantes, entonces el movimiento se conoce como precesión constante.

La rotación de un rotor de giro es la responsable de evitar que el rotor caiga y, en cambio, hace que experimente precesión con respecto a un eje vertical. Este fenómeno se llama efecto giroscópico.



$$\Sigma M_x = -I\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_z\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})$$

$$\Sigma M_y = 0, \Sigma M_z = 0$$

Movimiento sin par de torsión

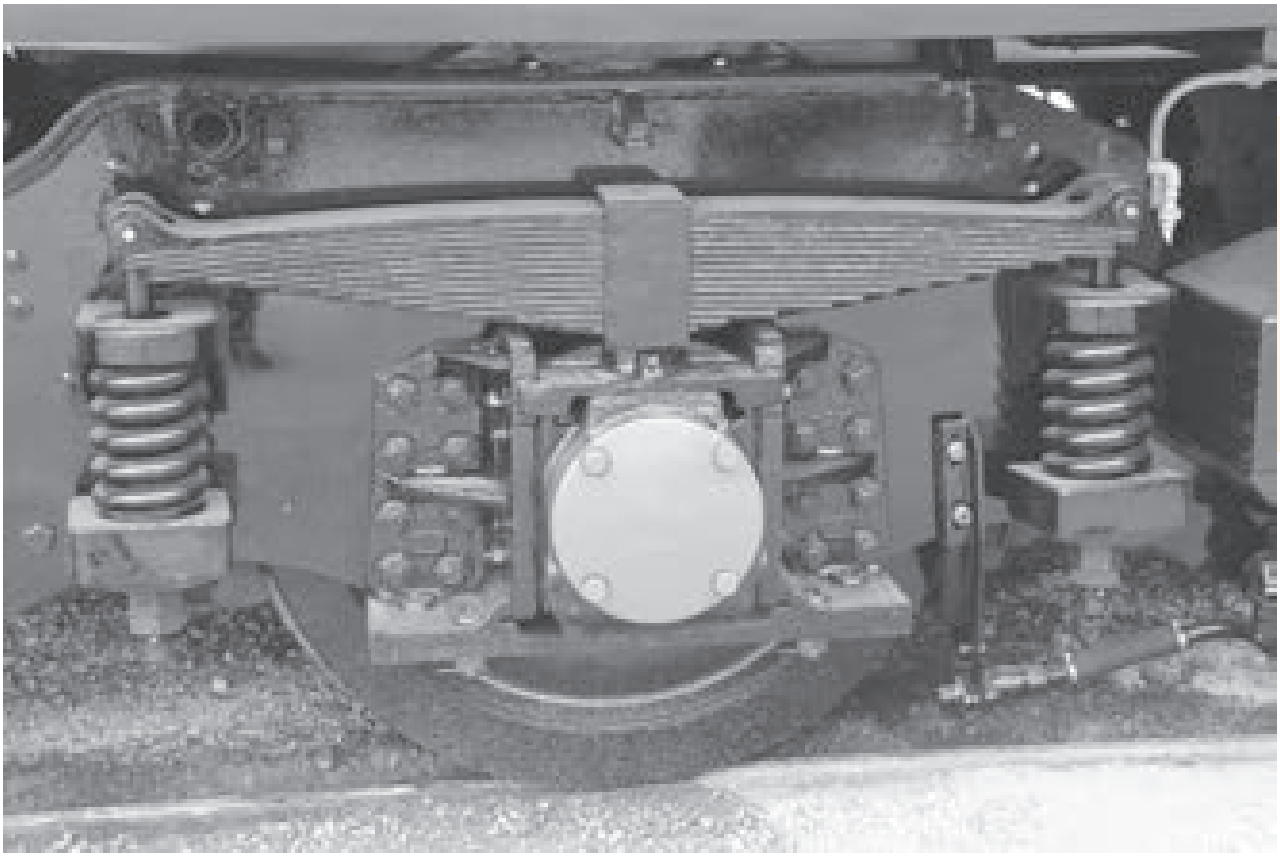
Un cuerpo sometido a sólo una fuerza de gravitación no tendrá momentos actuando en él con respecto a su centro de masa y, por consiguiente, el movimiento se describe como movimiento sin par de torsión. La cantidad de movimiento angular del cuerpo con respecto a su centro de masa permanecerá constante. Esto hace que el cuerpo tenga tanto rotación como precesión. El movimiento depende de la magnitud del momento de inercia de un cuerpo simétrico con respecto al eje de rotación I_z, *versus* aquél con respecto a un eje perpendicular I.

$$\theta = \text{constante}$$

$$\dot{\phi} = \frac{H_G}{I}$$

$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I\,I_z}H_G\cos\theta$$

Capítulo 22



(© Daseaford/Fotolia)

El análisis de vibraciones juega un papel muy importante en el estudio del comportamiento de las estructuras que soportan terremotos.

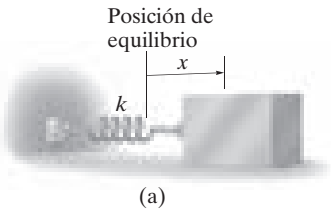
Vibraciones

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

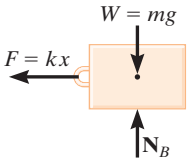
- Analizar la vibración con un grado de libertad no amortiguada de un cuerpo rígido con la ecuación de movimiento y los métodos de energía.
- Estudiar la vibración forzada no amortiguada y la vibración forzada amortiguada viscosa.

*22.1 Vibración libre no amortiguada

Una *vibración* es el movimiento oscilatorio de un cuerpo o sistema de cuerpos conectados, desplazados desde una posición de equilibrio. En general, existen dos tipos de vibración: libre y forzada. La *vibración libre* ocurre cuando el movimiento se mantiene mediante fuerzas de restauración gravitacionales o elásticas, como el movimiento oscilatorio de un péndulo o la vibración de una varilla elástica. La *vibración forzada* es provocada por una fuerza externa periódica o intermitente aplicada al sistema. Ambos tipos de vibración pueden ser amortiguadas o no amortiguadas. El análisis de las vibraciones *no amortiguadas* excluye los efectos de la fricción. Como en realidad están presentes tanto las fuerzas internas como las externas, el movimiento de todos los cuerpos vibratorios es de hecho *amortiguado*.



(a)



(b)

Fig. 22-1

El tipo más sencillo de movimiento vibratorio es la vibración libre no amortiguada, representada por el modelo de bloque y resorte que se ilustra en la figura 22-1*a*. El movimiento de vibración ocurre cuando el bloque se suelta desde una posición desplazada x, de modo que el resorte tira del bloque. Éste alcanzará una velocidad de modo que dejará su posición de equilibrio cuando $x = 0$, y siempre que la superficie de soporte esté lisa, el bloque oscilará de un lado a otro.

La trayectoria del movimiento dependiente del tiempo del bloque puede determinarse con la ecuación de movimiento al bloque, cuando está en la posición desplazada x. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 22-1*b*. La fuerza de restauración elástica $F = kx$ siempre está dirigida hacia la posición de equilibrio, mientras que se supone que la aceleración **a** actúa en la dirección del *desplazamiento positivo*. Como $a = d^2x/dt^2 = \ddot{x}$, tenemos

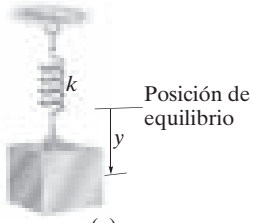
$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad -kx = m\ddot{x}$$

Observe que la aceleración es proporcional al desplazamiento del bloque. El movimiento descrito de esta manera se llama *movimiento armónico simple*. Al reordenar los términos en una "forma estándar" obtenemos

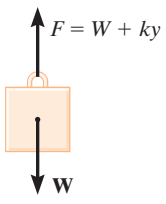
$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{22-1}$$

La constante ω_n, que generalmente se da en rad/s, se llama *frecuencia natural* y, en este caso,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{22-2}$$



(a)



(b)

Fig. 22-2

La ecuación 22-1 también puede obtenerse si consideramos que el bloque está colgado, de modo que el desplazamiento y se mide a partir de la *posición de equilibrio* del bloque (fig. 22-2*a*). Cuando el bloque está en equilibrio, el resorte ejerce una fuerza dirigida hacia arriba de $F = W = mg$ en el bloque. Por consiguiente, cuando el bloque se desplaza una distancia y hacia abajo de esta posición, la magnitud de la fuerza del resorte es $F = W + ky$ (fig. 22-2*b*). Al aplicar la ecuación de movimiento obtenemos

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad -W - ky + W = m\ddot{y}$$

o bien

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = 0$$

la cual es de la misma forma que la ecuación 22-1, y ω_n definida por la ecuación 22-2.

La ecuación 22-1 es una ecuación diferencial lineal de segundo grado homogénea con coeficientes constantes. Utilizando los métodos de ecuaciones diferenciales, se puede demostrar que la solución general es

$$x = A \operatorname{sen} \omega_n t + B \cos \omega_n t \tag{22-3}$$

Aquí A y B representan dos constantes de integración. La velocidad y aceleración del bloque se determinan calculando las derivadas sucesivas con respecto al tiempo, de lo cual resulta

$$v = \dot{x} = A\omega_n \cos \omega_n t - B\omega_n \operatorname{sen} \omega_n t \tag{22-4}$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega_n^2 \operatorname{sen} \omega_n t - B\omega_n^2 \cos \omega_n t \tag{22-5}$$

Cuando las ecuaciones 22-3 y 22-5 se sustituyen en la ecuación 22-1, la ecuación diferencial se satisface, lo cual demuestra que la ecuación 22-3 sí es la solución de la ecuación 22-1.

Las constantes de integración en la ecuación 22-3 en general se determinan a partir de las condiciones iniciales del problema. Por ejemplo, suponga que el bloque de la figura 22-1*a* se ha desplazado una distancia x_1 a la derecha de su posición de equilibrio y que eso le imprime una velocidad inicial (positiva) $\mathbf{v}_1$ dirigida a la derecha. Al sustituir $x = x_1$ cuando $t = 0$ en la ecuación 22-3 se obtiene $B = x_1$. Y como $v = v_1$ cuando $t = 0$, utilizando la ecuación 22-4, entonces, $A = v_1/\omega_n$. Si estos valores se sustituyen en la ecuación 22-3, la ecuación que describe el movimiento se hace

$$x = \frac{v_1}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t + x_1 \cos \omega_n t \tag{22-6}$$

La ecuación 22-3 también puede expresarse en función de un movimiento senoidal simple. Para demostrarlo, sea

$$A = C \cos \phi \tag{22-7}$$

y

$$B = C \operatorname{sen} \phi \tag{22-8}$$

donde C y ϕ son constantes nuevas que se determinarán en lugar de A y B. Al sustituir en la ecuación 22-3, obtenemos

$$x = C \cos \phi \operatorname{sen} \omega_n t + C \operatorname{sen} \phi \cos \omega_n t$$

Y como $\operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen} \theta \cos \phi + \cos \theta \operatorname{sen} \phi$, entonces

$$x = C \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \tag{22-9}$$

Si esta ecuación se traza sobre un eje x *versus* $\omega_n t$, se obtiene la gráfica que da la figura 22-3. El desplazamiento máximo del bloque a partir de su

posición de equilibrio se define como la *amplitud* de vibración. De acuerdo con la figura o la ecuación 22-9, la amplitud es C. El ángulo ϕ se denomina *ángulo de fase*, ya que representa la cantidad en la que la curva está desplazada del origen cuando $t = 0$. Podemos relacionar estas dos constantes con A y B por medio de las ecuaciones 22-7 y 22-8. Al elevar al cuadrado y sumar las dos ecuaciones, la amplitud es

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{22-10}$$

Si la ecuación 22-8 se divide entre la ecuación 22-7, el ángulo de fase es, por lo tanto,

$$\phi = \tan^{-1}\frac{B}{A} \tag{22-11}$$

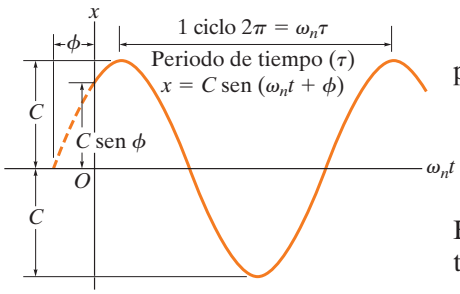


Fig. 22-3

Observe que la curva seno, ecuación 22-9, completa un *ciclo* en el tiempo $t = \tau$ (tau) cuando $\omega_n t = 2\pi$, o bien,

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} \tag{22-12}$$

Este intervalo se llama *periodo* (fig. 22-3). Con la ecuación 22-2, el periodo también puede representarse como

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{22-13}$$

Por último, la *frecuencia* f se define como el número de ciclos completados por unidad de tiempo, lo cual es el recíproco del periodo; es decir,

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_n}{2\pi} \tag{22-14}$$

o bien,

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{22-15}$$

La frecuencia se expresa en ciclos/s. Esta relación de unidades se llama *hertz* (Hz), donde 1 Hz = 1 ciclo/s = 2π rad/s.

Cuando un cuerpo o sistema de cuerpos conectados experimenta un desplazamiento inicial a partir de su posición de equilibrio y se libera, vibrará con una *frecuencia natural*, ω_n. Siempre que el sistema tenga un grado de libertad, es decir, que se requiera sólo una coordenada para especificar por completo la posición del sistema en cualquier momento, entonces el movimiento vibratorio tendrá las mismas características que el movimiento armónico simple del bloque y el resorte que se acaban de presentar. En consecuencia, una ecuación diferencial de la misma "forma estándar" que la ecuación 22-1 describe el movimiento, es decir,

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{22-16}$$

Por consiguiente, si se conoce la frecuencia natural ω_n, el periodo de vibración τ, la frecuencia natural f y otras características de vibración pueden establecerse con las ecuaciones 22-3 a 22-15.

Puntos importantes

- La vibración libre ocurre cuando el movimiento se mantiene por fuerzas gravitacionales o de restauración elástica.
- La amplitud es el desplazamiento máximo del cuerpo.
- El periodo es el tiempo requerido para completar un ciclo.
- La frecuencia es el número de ciclos por unidad de tiempo, donde 1 Hz = 1 ciclo/s.
- Sólo se requiere una coordenada de posición para describir la ubicación de un sistema con un grado de libertad.

Procedimiento para el análisis

Como en el caso del bloque y el resorte, la frecuencia natural ω_n de un cuerpo o sistema de cuerpos conectados que tiene un grado único de libertad se determina usando el siguiente procedimiento:

Diagrama de cuerpo libre

- Trace el diagrama de cuerpo libre del cuerpo cuando éste se desplace una *pequeña cantidad* desde su posición de equilibrio.
- Localice el cuerpo con respecto a su posición de equilibrio usando una *coordenada inercial* q apropiada. La aceleración del centro de masa del cuerpo $\mathbf{a}_G$ o la aceleración angular del cuerpo $\boldsymbol{\alpha}$ deberán tener un sentido de dirección supuesto, el cual está en la *dirección positiva* de la coordenada de posición.
- Si se tiene que utilizar la ecuación de movimiento de rotación $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$, entonces puede ser útil dibujar también el diagrama cinético, ya que gráficamente incluye las componentes $m(\mathbf{a}_G)_x$, $m(\mathbf{a}_G)_y$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$, lo cual hace que sea conveniente para visualizar los términos requeridos en la suma de momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.

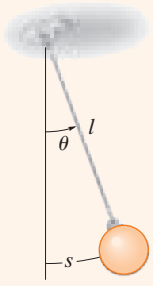
Ecuación de movimiento

- Aplique la ecuación de movimiento para relacionar las fuerzas de *restauración* elásticas o gravitacionales y los momentos de par que actúan en el cuerpo con el movimiento acelerado de éste.

Cinemática

- Exprese con cinemática el movimiento acelerado del cuerpo en función de la segunda derivada con respecto al tiempo de la coordenada de posición, $\ddot{q}$.
- Sustituya el resultado en la ecuación de movimiento y determine ω_n reordenando los términos, de modo que la ecuación resultante tenga la "forma estándar" $\ddot{q} + \omega_n^2 q = 0$.

EJEMPLO 22.1



(a)

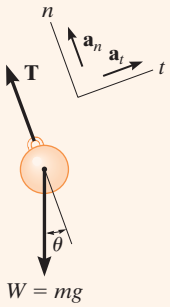
Determine el periodo de oscilación del péndulo simple que se muestra en la figura 22-4*a*. La bola tiene una masa m y está atada a una cuerda de longitud l. Ignore el tamaño de la bola.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. El movimiento del sistema se relacionará con la coordenada de posición $(q =)\theta$ (fig. 22-4*b*). Cuando la bola se desplaza un pequeño ángulo θ, la *fuerza de restauración* que actúa en ella es creada por la componente tangencial de su peso, mg sen θ. Asimismo, $\mathbf{a}_t$ actúa en la dirección de s *creciente* (o θ).

Ecuación de movimiento. Al aplicar la ecuación de movimiento en la *dirección tangencial*, ya que implica la fuerza de restauración, obtenemos

$$+\nearrow \Sigma F_t = ma_t; \qquad -mg \operatorname{sen}\theta = ma_t \tag{1}$$



(b)

Fig. 22-4

Cinemática. $a_t = d^2s/dt^2 = \ddot{s}$. Además, s puede relacionarse con θ mediante la ecuación $s = l\theta$, de modo que $a_t = l\ddot{\theta}$. Por consiguiente, la ecuación 1 se reduce a

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{2}$$

La solución de esta ecuación implica el uso de una integral elíptica. Para *desplazamientos pequeños*, sin embargo, sen $\theta \approx \theta$, en cuyo caso

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{3}$$

Al comparar esta ecuación con la ecuación 22-16 $(\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0)$, se observa que $\omega_n = \sqrt{g/l}$. Según la ecuación 22-12, el periodo requerido para que la bola realice una oscilación completa es, por consiguiente,

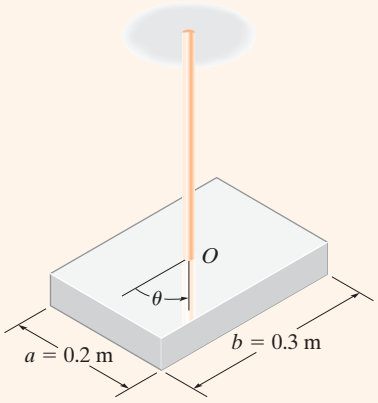
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \textit{Resp.}$$

Este interesante resultado, descubierto originalmente por Galileo Galilei mediante experimentos, indica que el periodo depende únicamente de la longitud de la cuerda y no de la masa de la bola del péndulo ni del ángulo θ.

NOTA: La solución de la ecuación 3 la da la ecuación 22-3, donde $\omega_n = \sqrt{g/l}$ y θ se sustituye por x. Al igual que el bloque y el resorte, las constantes A y B en este problema pueden determinarse si, por ejemplo, conocemos el desplazamiento y la velocidad de la bola en un instante dado.

EJEMPLO 22.2

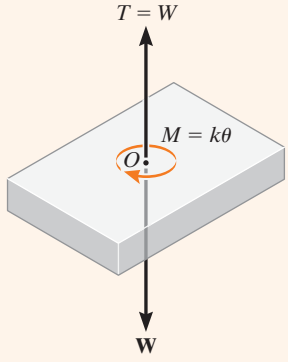
La placa rectangular de 10 kg que se muestra en la figura 22-5*a* está suspendida por su centro mediante una varilla cuya rigidez torsional es $k = 1.5\ \text{N} \cdot \text{m/rad}$. Determine el periodo natural de vibración de la placa cuando experimenta un pequeño desplazamiento angular θ en su plano.



(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Figura 22-5*b*. Como la placa se desplaza en su propio plano, el momento de *restauración* torsional creado por la varilla es $M = k\theta$. Este momento actúa en dirección opuesta al desplazamiento angular θ. La aceleración angular $\ddot{\theta}$ actúa en la dirección de θ *positivo*.



(b)

Fig. 22-5

Ecuación de movimiento

$$\Sigma M_O = I_O\alpha; \qquad -k\theta = I_O\ddot{\theta}$$

o bien,

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{I_O}\theta = 0$$

Como esta ecuación está en la "forma estándar", la frecuencia natural es $\omega_n = \sqrt{k/I_O}$.

Según la tabla en los forros del libro, el momento de inercia de la placa con respecto a un eje que coincide con la varilla es $I_O = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$. Por lo tanto,

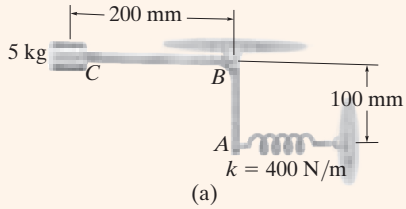
$$I_O = \frac{1}{12}(10\ \text{kg})\left[(0.2\ \text{m})^2 + (0.3\ \text{m})^2\right] = 0.1083\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

El periodo de vibración natural es, entonces,

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.1083}{1.5}} = 1.69\ \text{s} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 22.3

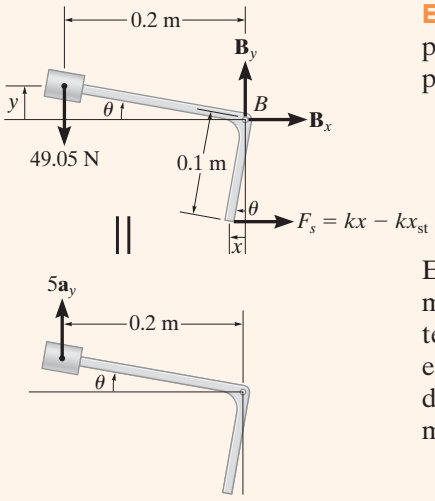
La varilla acodada que se muestra en la figura 22-6*a* tiene una masa insignificante y sostiene un collarín de 5 kg en su extremo. Si la varilla está en la posición de equilibrio indicada, determine el periodo de vibración natural para el sistema.



(a)

SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre y cinético. Figura 22-6*b*. Aquí la varilla aparece desplazada un pequeño ángulo θ desde la posición de equilibrio. Como el resorte se somete a una compresión inicial x_{st} en la posición de equilibrio, entonces cuando experimenta el desplazamiento $x > x_{st}$ el resorte ejerce una fuerza $F_s = kx - kx_{st}$ en la varilla. Para obtener la "forma estándar", ecuación 22-16, $5\mathbf{a}_y$ debe actuar *hacia arriba*, lo cual concuerda con el desplazamiento θ positivo.



(b)

Ecuación de movimiento. Los momentos se sumarán con respecto al punto B para eliminar la reacción desconocida en este punto. Como θ es pequeño,

$$\zeta + \Sigma M_B = \Sigma(\mathcal{M}_k)_B;$$

$$kx(0.1\text{ m}) - kx_{st}(0.1\text{ m}) + 49.05\text{ N}(0.2\text{ m}) = -(5\text{ kg})a_y(0.2\text{ m})$$

El segundo término del lado izquierdo, $-kx_{st}(0.1\text{ m})$, representa el momento creado por la fuerza del resorte, la cual es necesaria para mantener el collarín en *equilibrio*, es decir, en $x = 0$. Como este momento es igual y opuesto al momento de 49.05 N(0.2 m) creado por el peso del collarín, ambos términos se eliminan en la ecuación anterior, de modo que

$$kx(0.1) = -5a_y(0.2) \tag{1}$$

Cinemática. La deformación del resorte y la posición del collarín pueden relacionarse con el ángulo θ (fig. 22-6*c*). Como θ es pequeño, $x = (0.1\text{ m})\theta$ y $y = (0.2\text{ m})\theta$. Por consiguiente, $a_y = \ddot{y} = 0.2\ddot{\theta}$. Sustituyendo en la ecuación 1 obtenemos

$$400(0.1\theta)\,0.1 = -5(0.2\ddot{\theta})0.2$$

Al reescribir esta ecuación en la "forma estándar",

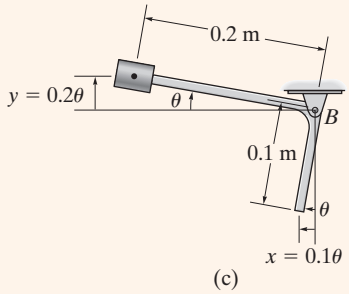
$$\ddot{\theta} + 20\theta = 0$$

Comparada con $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$ (ecuación 22-16), tenemos

$$\omega_n^2 = 20 \quad \omega_n = 4.47\text{ rad/s}$$

El periodo de vibración natural es, por lo tanto,

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{4.47} = 1.40\text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

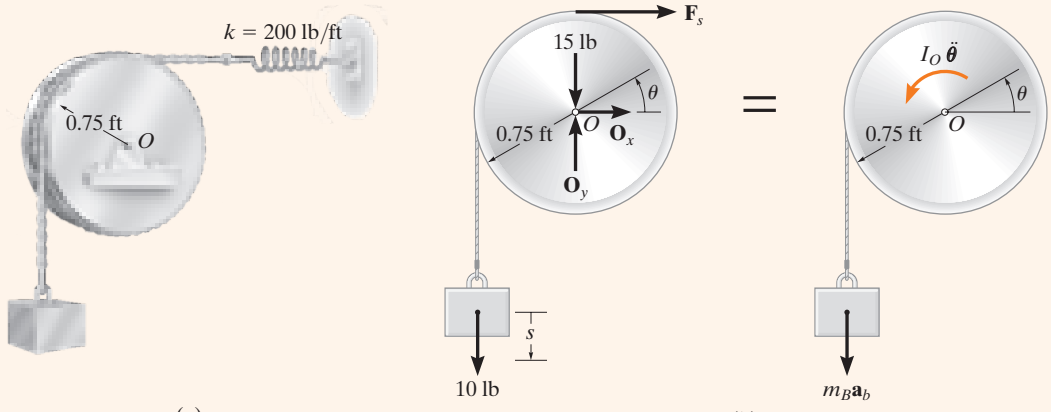


(c)

Fig. 22-6

EJEMPLO 22.4

Se suspende un bloque de 10 lb de una cuerda que pasa sobre un disco de 15 lb, como se ilustra en la figura 22-7*a*. El resorte tiene una rigidez $k = 200$ lb/ft. Determine el periodo de vibración natural para el sistema.



SOLUCIÓN

Diagramas de cuerpo libre y cinético. Figura 22-7*b*. El *sistema* se compone del disco, el cual experimenta una rotación definida por el ángulo θ, y el bloque, que se traslada en una cantidad s. El vector $I_O\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ actúa en la dirección de θ *positivo* y, por consiguiente, $m_B\mathbf{a}_b$ actúa dirigida hacia abajo en la dirección de s *positivo*.

Ecuación de movimiento. Al sumar los momentos con respecto al punto O para eliminar las reacciones $\mathbf{O}_x$ y $\mathbf{O}_y$, y habida cuenta de que $I_O = \frac{1}{2}mr^2$, obtenemos

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O;$$

$$10\text{ lb}(0.75\text{ ft}) - F_s(0.75\text{ ft}) = \frac{1}{2}\left(\frac{15\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)(0.75\text{ ft})^2\,\ddot{\theta} + \left(\frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ ft/s}^2}\right)a_b(0.75\text{ ft}) \quad (1)$$

Cinemática. Como se muestra en el diagrama cinemático en la figura 22-7*c*, un pequeño desplazamiento positivo θ del disco hace que el bloque baje una cantidad $s = 0.75\theta$, por consiguiente, $a_b = \ddot{s} = 0.75\ddot{\theta}$. Cuando $\theta = 0°$, la fuerza del resorte requerida para el *equilibrio* del disco es de 10 lb dirigida a la derecha. En la posición θ, la fuerza del resorte es $F_s = (200\text{ lb/ft})(0.75\theta\text{ ft}) + 10\text{ lb}$. Al sustituir estos resultados en la ecuación 1 y simplificar, obtenemos

$$\ddot{\theta} + 368\theta = 0$$

En consecuencia,

$$\omega_n^2 = 368 \qquad \omega_n = 19.18\text{ rad/s}$$

Por lo tanto, el periodo de vibración natural es

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{19.18} = 0.328\text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

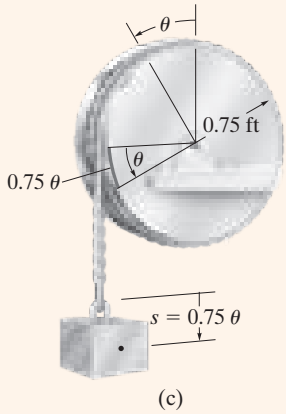


Fig. 22-7

PROBLEMAS

22-1. Un resorte es alargado 175 mm por un bloque de 8 kg. Si el bloque se desplaza 100 mm hacia abajo desde su posición de equilibrio y se le imprime una velocidad dirigida hacia abajo de 1.50 m/s, determine la ecuación diferencial que describe el movimiento. Suponga que el desplazamiento positivo es hacia abajo. Además, determine la posición del bloque cuando $t = 0.22$ s.

22-2. Un resorte tiene una rigidez de 800 N/m. Si un bloque de 2 kg está unido al resorte, es empujado 50 mm por encima de su posición de equilibrio y se libera desde el reposo, determine la ecuación que describe el movimiento del bloque. Suponga que el desplazamiento positivo es hacia abajo.

22-3. Un bloque de 15 kg estira 200 mm un resorte. Si el bloque se desplaza 100 mm hacia abajo desde su posición de equilibrio y recibe una velocidad descendente de 0.75 m/s, determine la ecuación que describe el movimiento. ¿Cuál es el ángulo de fase? Suponga que el desplazamiento positivo es hacia abajo.

***22-4.** Cuando un peso de 20 lb se suspende de un resorte, éste se estira una distancia de 4 in. Determine la frecuencia natural y el periodo de vibración para un peso de 10 lb unido al mismo resorte.

22-5. Cuando un bloque de 3 kg se suspende de un resorte, éste se estira una distancia de 60 mm. Determine la frecuencia natural y el periodo de vibración para un bloque de 0.2 kg unido al mismo resorte.

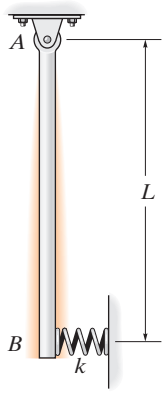
22-6. Un bloque de 8 kg está suspendido de un resorte que tiene una rigidez $k = 80$ N/m. Si al bloque se le da una velocidad ascendente de 0.4 m/s, cuando está 90 mm por encima de su posición de equilibrio, determine la ecuación que describe el movimiento y el desplazamiento máximo hacia arriba del bloque, medido a partir de la posición de equilibrio. Suponga que el desplazamiento positivo se mide hacia abajo.

22-7. Un peso de 2 lb está suspendido de un resorte que tiene una rigidez $k = 2$ lb/in. Si el peso se empuja 1 in hacia arriba desde su posición de equilibrio y después se libera desde el reposo, determine la ecuación que describe el movimiento. ¿Cuáles son la amplitud y la frecuencia de la vibración natural?

***22-8.** Un peso de 6 lb está suspendido de un resorte que tiene una rigidez $k = 3$ lb/in. Si al peso se le da una velocidad ascendente de 20 ft/s cuando está a 2 in por encima de su posición de equilibrio, determine la ecuación que describe el movimiento y el desplazamiento máximo del peso hacia arriba, medido a partir de la posición de equilibrio. Suponga que el desplazamiento positivo es hacia abajo.

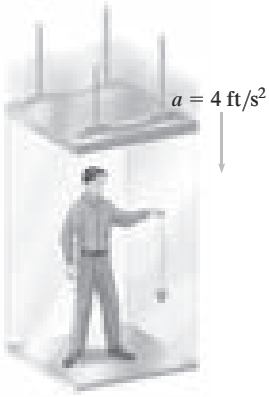
22-9. Un bloque de 3 kg está suspendido de un resorte que tiene una rigidez de $k = 200$ N/m. Si el bloque se empuja 50 mm hacia arriba desde su posición de equilibrio y después se libera desde reposo, determine la ecuación que describe el movimiento. ¿Cuáles son la amplitud y la frecuencia de la vibración natural? Suponga que el desplazamiento positivo es hacia abajo.

22-10. La varilla uniforme de masa m se sostiene mediante un pasador en A y un resorte en B. Si a B se le da un pequeño desplazamiento lateral y se libera, determine el periodo de vibración natural.



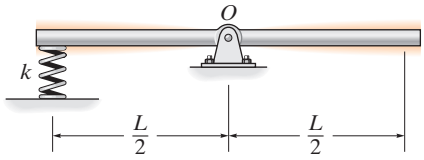
Prob. 22-10

22-11. Mientras está de pie en un ascensor, el hombre sostiene un péndulo que consiste en una cuerda de 18 in y un peso de 0.5 lb. Si el ascensor está descendiendo con una aceleración $a = 4$ ft/s^2, determine el periodo de vibración natural para amplitudes de oscilación pequeñas.



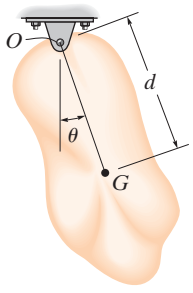
Prob. 22-11

***22-12.** Determine el periodo de vibración natural de la barra uniforme de masa m cuando se desplaza ligeramente hacia abajo y se libera.



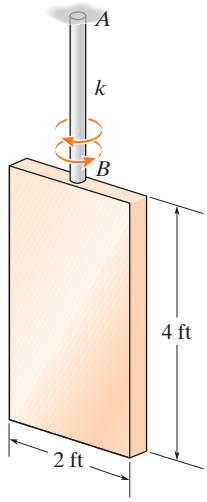
Prob. 22-12

22-13. El cuerpo de forma arbitraria tiene una masa m, centro de masa en G, y un radio de giro alrededor de G de k_G. Si se desplaza un ligero ángulo θ desde su posición de equilibrio y se libera, determine el periodo de vibración natural.



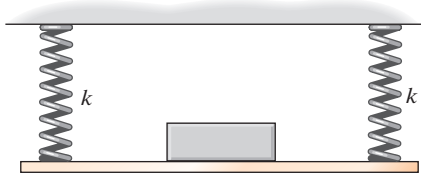
Prob. 22-13

22-14. La placa rectangular de 20 lb tiene un periodo de vibración natural $\tau = 0.3$ s, mientras oscila alrededor del eje de la varilla AB. Determine la rigidez torsional k de la varilla, medida en lb · ft/rad. Desprecie la masa de la varilla.



Prob. 22-14

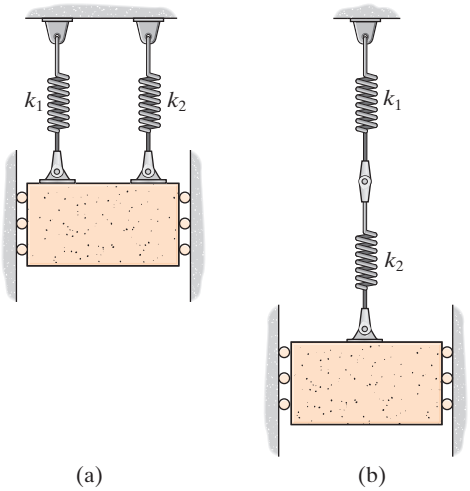
22-15. Una plataforma, que tiene una masa desconocida, se apoya en *cuatro* resortes, cada uno con la misma rigidez k. Cuando no hay nada en la plataforma, el periodo de vibración vertical se mide como 2.35 s; mientras que si se coloca un bloque de 3 kg sobre la plataforma, el periodo de vibración vertical es de 5.23 s. Determine la masa de un bloque colocado sobre la plataforma (vacía) que hará que ésta vibre verticalmente con un periodo de 5.62 s. ¿Cuál es la rigidez k de cada uno de los resortes?



Prob. 22-15

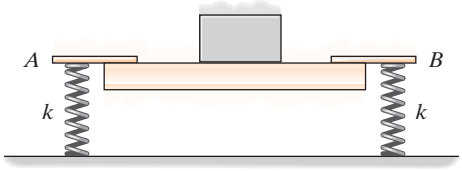
***22-16.** Un bloque de masa m está suspendido de dos resortes que tienen rigideces de k_1 y k_2, y están dispuestos a) paralelos entre sí y b) en serie. Determine la rigidez equivalente de un solo resorte con las mismas características de oscilación y periodo de oscilación para cada caso.

22-17. El bloque de 15 kg está suspendido de dos resortes que tienen rigideces diferentes, y están dispuestos a) paralelos entre sí y b) en serie. Si se observa que los periodos de oscilación naturales del sistema en serie y el sistema en paralelo son de 0.5 s y 1.5 s, respectivamente, determine las rigideces k_1 y k_2 de los resortes.



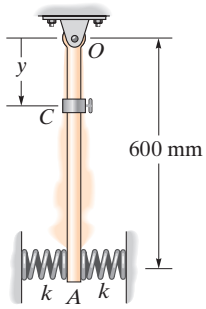
Probs. 22-16/17

22-18. La viga uniforme está apoyada en sus extremos sobre dos resortes A y B, cada uno con la misma rigidez k. Cuando no hay nada sobre la viga, ésta tiene un periodo de vibración vertical de 0.83 s. Si se coloca una masa de 50 kg sobre su centro, el periodo de vibración vertical es de 1.52 s. Calcule la rigidez de cada resorte y la masa de la viga.



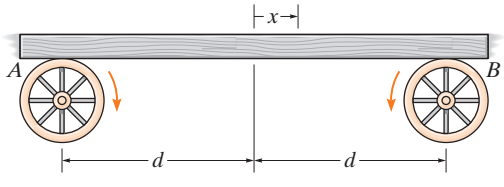
Prob. 22-18

22-19. La varilla delgada tiene una masa de 0.2 kg y se sostiene en O mediante un pasador y en su extremo A por medio de dos resortes, cada uno de los cuales tiene una rigidez $k = 4$ N/m. El periodo de vibración de la varilla se puede establecer fijando el collarín C de 0.5 kg a la varilla, en un lugar adecuado a lo largo de su longitud. Si los resortes están originalmente sin estirar cuando la varilla se encuentra en posición vertical, determine la posición y del collarín, de modo que el periodo de vibración natural sea $r = 1$ s. Desprecie el tamaño del collarín.



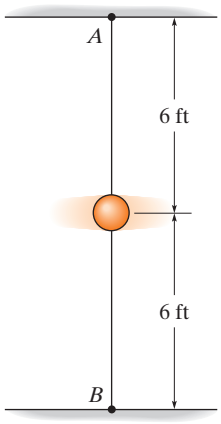
Prob. 22-19

***22-20.** Un tablón uniforme se apoya sobre dos ruedas que giran en direcciones opuestas a una velocidad angular constante. Si el coeficiente de fricción cinética entre las ruedas y el tablón es μ, determine la frecuencia de vibración del tablón si se desplaza ligeramente, una distancia x desde el punto medio entre las ruedas, y se libera.



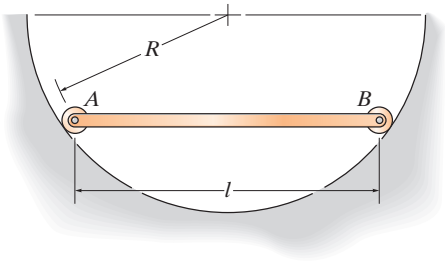
Prob. 22-20

22-21. Si el alambre AB está sometido a una tensión de 20 lb, determine la ecuación que describe el movimiento cuando el peso de 5 lb se desplaza 2 in en forma horizontal y se libera desde el reposo.



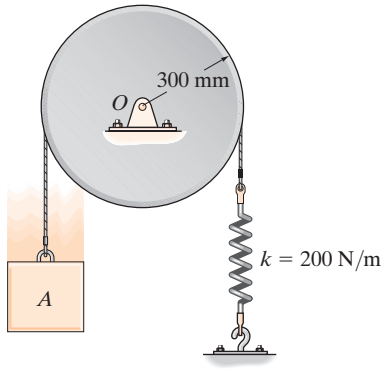
Prob. 22-21

22-22. La barra tiene una longitud l y una masa m. Está apoyada en sus extremos mediante rodillos de masa despreciable. Si se le da un pequeño desplazamiento y se libera, determine su frecuencia de vibración natural.



Prob. 22-22

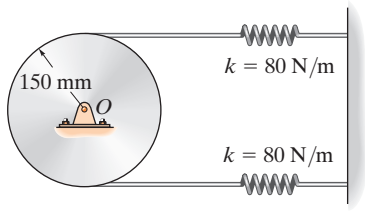
22-23. El disco de 20 kg está fijo en su centro de masa O y soporta el bloque A de 4 kg. Si la banda que pasa sobre el disco no puede deslizarse sobre su superficie de contacto, determine el periodo de vibración natural del sistema.



Prob. 22-23

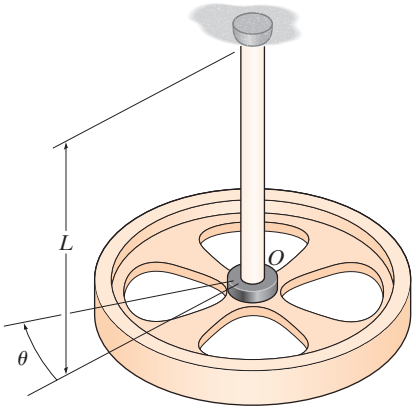
***22-24.** El disco de 10 kg está conectado mediante un pasador en su centro de masa. Determine el periodo de vibración natural del disco, si los resortes soportan una tensión suficiente en ellos para evitar que la cuerda se deslice sobre el disco mientras éste oscila. *Sugerencia:* Suponga que el estiramiento inicial en cada resorte es δ_O.

22-25. Si el disco del problema 22-24 tiene una masa de 10 kg, determine la frecuencia de vibración natural. *Sugerencia:* Suponga que el estiramiento inicial en cada resorte es δ_O.



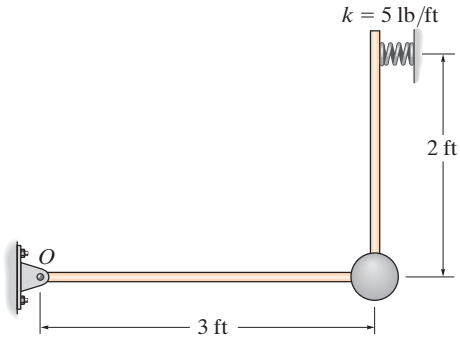
Probs. 22-24/25

22-26. Un volante de masa m, que tiene un radio de giro de k_O alrededor de su centro de masa, está suspendido de una flecha circular que tiene una resistencia a la torsión de $M = C\theta$. Si al volante se le da un pequeño desplazamiento angular de θ y se libera, determine el periodo de oscilación natural.



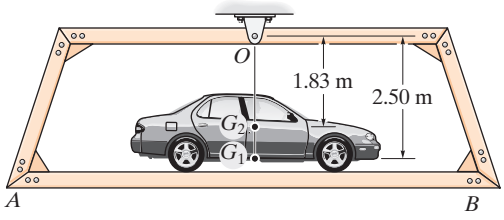
Prob. 22-26

22-27. El peso de 6 lb está unido a las varillas de masa despreciable. Determine la frecuencia de vibración natural del peso cuando se desplaza ligeramente desde la posición de equilibrio y se libera.



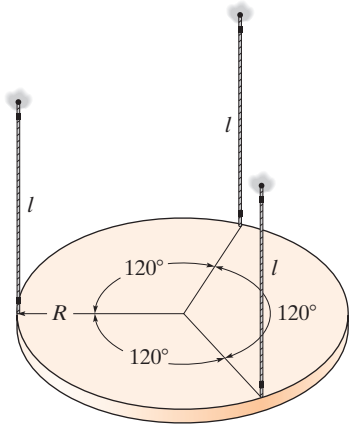
Prob. 22-27

***22-28.** Cuando la plataforma AB está vacía tiene una masa de 400 kg, centro de masa en G_1 y un periodo de oscilación natural $\tau_1 = 2.38$ s. Si un automóvil, con masa de 1.2 Mg y centro de masa en G_2, se coloca sobre la plataforma, el periodo de oscilación natural se vuelve $\tau_2 = 3.16$ s. Determine el momento de inercia del automóvil con respecto a un eje que pasa a través de G_2.



Prob. 22-28

22-29. La placa de masa m se sostiene mediante tres cuerdas de longitud l, colocadas simétricamente, como se indica en la figura. Si a la placa se le da una ligera rotación alrededor de un eje vertical que pasa por su centro y se libera, determine el periodo de oscilación natural.



Prob. 22-29

*22.2 Métodos de energía

El movimiento armónico simple, estudiado en la sección anterior, se debe sólo a fuerzas de restauración gravitacional y elástica que actúan en el cuerpo. Como estas fuerzas son *conservadoras*, también es posible utilizar la ecuación de conservación de la energía para obtener la frecuencia de oscilación natural o el periodo de vibración del cuerpo. Para demostrar cómo se hace esto, considere de nueva cuenta el modelo de bloque y resorte de la figura 22-8. Cuando el bloque se desplaza una distancia x de la posición de equilibrio, la energía cinética es $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ y la energía potencial es $V = \frac{1}{2}kx^2$. Como se conserva la energía, es necesario que

$$T + V = \text{constante}$$

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \text{constante} \tag{22-17}$$

La ecuación diferencial que describe el *movimiento acelerado* del bloque se obtiene por *diferenciación* de esta ecuación con respecto al tiempo, es decir,

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

$$\dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0$$

Como la velocidad $\dot{x}$ no *siempre* es cero en un sistema sometido a vibración,

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad \omega_n = \sqrt{k/m}$$

la cual es la misma que la ecuación 22-1.

Si la ecuación de conservación de la energía se escribe para un *sistema de cuerpos conectados*, la frecuencia natural o la ecuación de movimiento también se determina mediante diferenciación con respecto al tiempo. *No es necesario* desmembrar el sistema para mostrar las fuerzas internas porque no realizan trabajo.

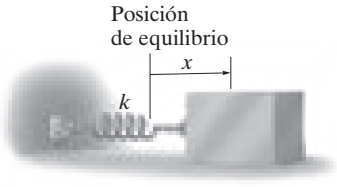


Fig. 22-8

La suspensión de un carro de ferrocarril se compone de un conjunto de resortes montados entre el armazón del carro y el portarruedas. La suspensión le imprime al carro una frecuencia de vibración natural que es posible determinar. (© R. C. Hibbeler)

Procedimiento para el análisis

La frecuencia natural ω_n de un cuerpo o sistema de cuerpos conectados se determina al aplicar la ecuación de conservación de la energía con el siguiente procedimiento.

Ecuación de energía

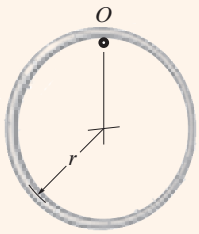
- Trace el cuerpo cuando está desplazado en una *pequeña cantidad* de su posición de equilibrio, y defina la ubicación del cuerpo con respecto a su posición de equilibrio por medio de una coordenada de posición apropiada q.
- Formule la conservación de energía del cuerpo, $T + V =$ constante, en función de la coordenada de posición.
- En general, la energía cinética debe incluir tanto el movimiento de traslación como el de rotación del cuerpo, $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$, ecuación 18-2.
- La energía potencial es la suma de las energías potenciales gravitacional y elástica del cuerpo, $V = V_g + V_e$, ecuación 18-17. En particular, V_g deberá medirse con respecto a un plano de referencia para el cual $q = 0$ (posición de equilibrio).

Derivada con respecto al tiempo

- Calcule la derivada con respecto al tiempo de la ecuación de energía con la regla de la cadena del cálculo y factorice los términos comunes. La ecuación diferencial resultante representa la ecuación de movimiento para el sistema. La frecuencia natural ω_n se obtiene después de reordenar los términos en la "forma estándar" $\ddot{q} + \omega_n^2 q = 0$.

EJEMPLO 22.5

El aro delgado que se muestra en la figura 22-9*a* está sostenido por la clavija en O. Determine el periodo de oscilación natural para amplitudes de oscilación pequeñas. El aro tiene una masa m.



(a)

SOLUCIÓN

Ecuación de energía. En la figura 22-9*b* se muestra un diagrama del aro desplazado una pequeña distancia $(q =)\theta$ de la posición de equilibrio. Con la tabla que aparece en los forros de este libro y el teorema de los ejes paralelos para determinar I_O, la energía cinética es

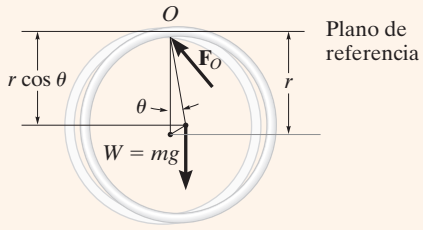
$$T = \tfrac{1}{2} I_O \omega_n^2 = \tfrac{1}{2}[mr^2 + mr^2]\dot{\theta}^2 = mr^2\dot{\theta}^2$$

Si se coloca un plano de referencia horizontal a través del punto O y, luego, en la posición desplazada, la energía potencial es

$$V = -mg(r\cos\theta)$$

La energía total en el sistema es

$$T + V = mr^2\dot{\theta}^2 - mgr\cos\theta$$



(b)

Fig. 22-9

Derivada con respecto al tiempo

$$mr^2(2\dot{\theta})\ddot{\theta} + mgr(\operatorname{sen}\theta)\dot{\theta} = 0$$
$$mr\dot{\theta}(2r\ddot{\theta} + g\operatorname{sen}\theta) = 0$$

Como $\dot{\theta}$ no siempre es igual a cero, con los términos entre paréntesis,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2r}\operatorname{sen}\theta = 0$$

Para un ángulo θ pequeño, $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$.

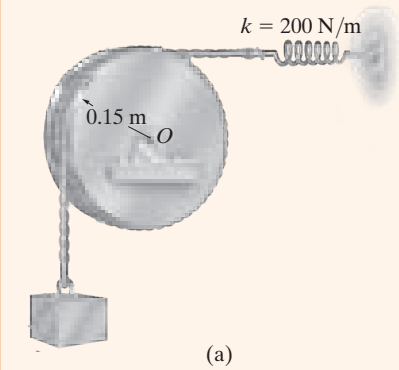
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2r}\theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{2r}}$$

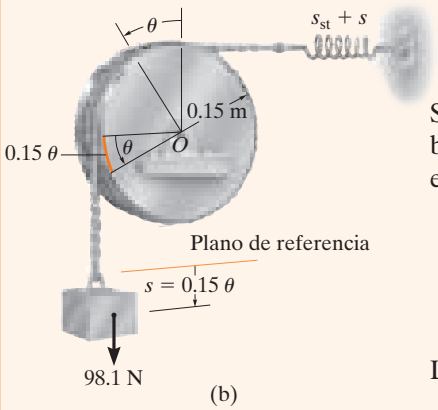
de modo que

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 22.6



(a)



(b)

Fig. 22-10

Un bloque de 10 kg está suspendido de una cuerda enrollada alrededor de un disco de 5 kg, como se indica en la figura 22-10*a*. Si el resorte tiene una rigidez $k = 200$ N/m, determine el periodo de vibración natural para el sistema.

SOLUCIÓN

Ecuación de energía. En la figura 22-10*b* se muestra un diagrama del bloque y disco cuando están desplazados en cantidades respectivas s y θ desde la posición de equilibrio. Como $s = (0.15\text{ m})\theta$, entonces $v_b \approx \dot{s} = (0.15\text{ m})\dot{\theta}$. Por lo tanto, la energía cinética del sistema es

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}m_b v_b^2 + \tfrac{1}{2}I_O\omega_d^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(10\text{ kg})[(0.15\text{ m})\dot{\theta}]^2 + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}(5\text{ kg})(0.15\text{ m})^2\right](\dot{\theta})^2 \\ &= 0.1406(\dot{\theta})^2 \end{aligned}$$

Si se establece el plano de referencia en la posición de equilibrio del bloque y se tiene en cuenta que el resorte se alarga s_{st} cuando está en equilibrio, la energía potencial es

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{2}k(s_{st} + s)^2 - Ws \\ &= \tfrac{1}{2}(200\text{ N/m})[s_{st} + (0.15\text{ m})\theta]^2 - 98.1\text{ N}[(0.15\text{ m})\theta] \end{aligned}$$

La energía total del sistema es, por consiguiente,

$$T + V = 0.1406(\dot{\theta})^2 + 100(s_{st} + 0.15\theta)^2 - 14.715\theta$$

Derivada con respecto al tiempo

$$0.28125(\dot{\theta})\ddot{\theta} + 200(s_{st} + 0.15\theta)0.15\dot{\theta} - 14.72\dot{\theta} = 0$$

Como $s_{st} = 98.1/200 = 0.4905$ m, la ecuación anterior se reduce a la "forma estándar"

$$\ddot{\theta} + 16\theta = 0$$

de modo que

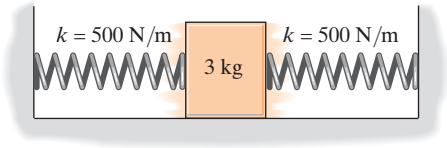
$$\omega_n = \sqrt{16} = 4\text{ rad/s}$$

Por lo tanto,

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{4} = 1.57\text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

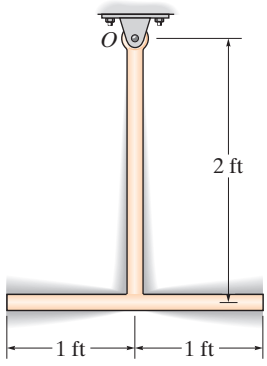
PROBLEMAS

22-30. Determine la ecuación diferencial del movimiento del bloque de 3 kg cuando se desplaza ligeramente y se libera. La superficie es lisa y los resortes están originalmente sin estirar.



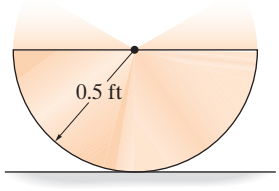
Prob. 22-30

22-31. Determine el periodo natural de vibración del péndulo. Considere que las dos varillas son delgadas, cada una con un peso de 8 lb/ft.



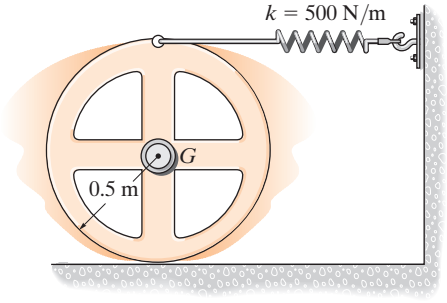
Prob. 22-31

***22-32.** Determine el periodo de vibración natural del disco semicircular de 10 lb.



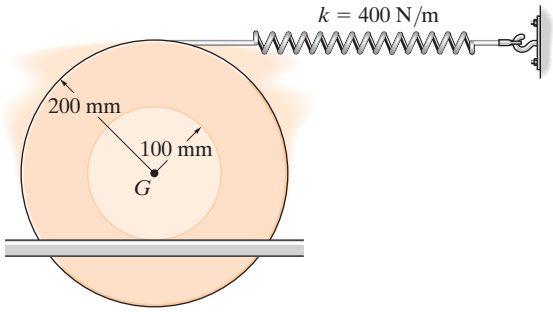
Prob. 22-32

22-33. Si la rueda de 20 kg se desplaza una pequeña distancia y se libera, determine el periodo de vibración natural. El radio de giro de la rueda es $k_G = 0.36$ m. La rueda gira sin deslizarse.



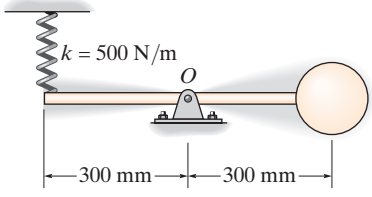
Prob. 22-33

22-34. Determine la ecuación diferencial del movimiento del carrete de 3 kg. Suponga que éste no se desliza sobre la superficie de contacto mientras oscila. El radio de giro del carrete alrededor de su centro de masa es $k_G = 125$ mm.



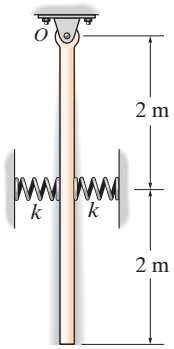
Prob. 22-34

22-35. Determine el periodo de vibración natural de la esfera de 3 kg. Desprecie la masa de la varilla y el tamaño de la esfera.



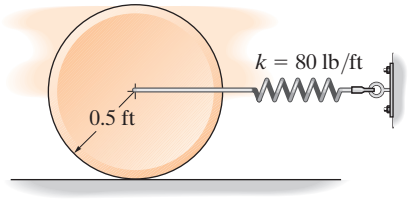
Prob. 22-35

*22-36. Si el extremo inferior de la varilla delgada de 6 kg se desplaza una pequeña distancia y se libera desde el reposo, determine la frecuencia de vibración natural. Cada resorte tiene una rigidez de $k = 200$ N/m y no está estirado cuando la varilla cuelga verticalmente.



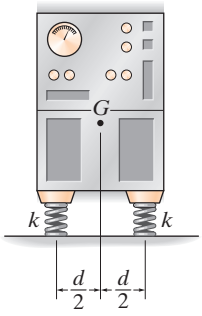
Prob. 22-36

22-37. El disco tiene un peso de 30 lb y rueda sin deslizarse sobre la superficie horizontal, mientras oscila con respecto a su posición de equilibrio. Si el disco se desplaza, al hacerlo rodar 0.2 rad en sentido antihorario, determine la ecuación que describe su movimiento oscilatorio y el periodo natural cuando se libera.



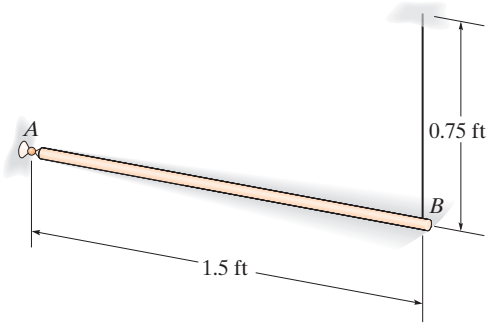
Prob. 22-37

22-38. La máquina tiene una masa m y está apoyada de manera uniforme sobre *cuatro* resortes, cada uno de los cuales tiene una rigidez k. Determine el periodo de vibración natural vertical.



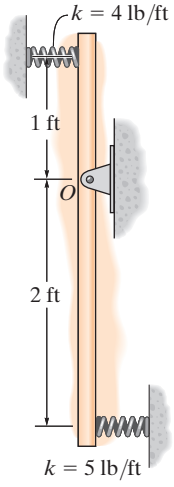
Prob. 22-38

22-39. La varilla delgada tiene un peso de 4 lb/ft. Si se sostiene en el plano horizontal mediante una junta de rótula en A y un cable en B, determine la frecuencia de vibración natural cuando al extremo B se le da un pequeño desplazamiento horizontal y después se libera.



Prob. 22-39

*22-40. Si la varilla delgada tiene un peso de 5 lb, determine la frecuencia de vibración natural. En un inicio, los resortes no están estirados.

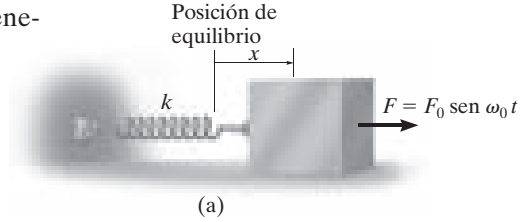


Prob. 22-40

*22.3 Vibración forzada no amortiguada

Se considera que la vibración forzada no amortiguada es uno de los tipos de movimiento vibratorio más importantes en el campo de la ingeniería. Sus principios pueden utilizarse para describir el movimiento de muchos tipos de máquinas y estructuras.

Fuerza periódica. El bloque y el resorte que se muestran en la figura 22-11*a* constituyen un modelo conveniente para representar las características vibratorias de un sistema sometido a una fuerza periódica $F = F_0 \operatorname{sen} \omega_0 t$. Esta fuerza tiene una amplitud de F_0 y una *frecuencia forzada* ω_0. El diagrama de cuerpo libre del bloque desplazado una distancia x se muestra en la figura 22-11*b*. Al aplicar la ecuación de movimiento, tenemos



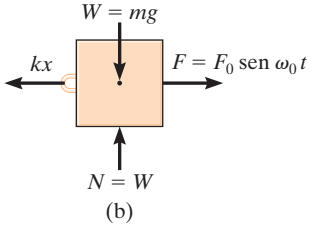
(a)

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad F_0 \operatorname{sen} \omega_0 t - kx = m\ddot{x}$$

o bien,

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\operatorname{sen} \omega_0 t \tag{22-18}$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial de segundo grado no homogénea. La solución general consta de una solución complementaria, x_c, *más* una solución particular, x_P.



(b)

Fig. 22-11

La *solución complementaria* se determina estableciendo el término del lado derecho de la ecuación 22-18 igual a cero y resolviendo la ecuación homogénea resultante. La ecuación 22-9 define la solución, es decir,

$$x_c = C \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \tag{22-19}$$

donde ω_n es la frecuencia natural, $\omega_n = \sqrt{k/m}$, ecuación 22–2.

Como el movimiento es periódico, la *solución particular* de la ecuación 22-18 puede determinarse, si se supone una solución de la forma

$$x_P = X \operatorname{sen} \omega_0 t \tag{22-20}$$

donde X es una constante. Si calculamos la segunda derivada con respecto al tiempo y sustituimos en la ecuación 22-18 obtenemos

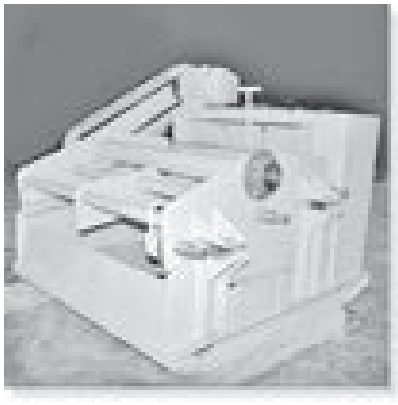
$$-X\omega_0^2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{k}{m}(X \operatorname{sen} \omega_0 t) = \frac{F_0}{m}\operatorname{sen} \omega_0 t$$

Al factorizar sen $\omega_O t$ y resolver para X

$$X = \frac{F_0/m}{(k/m) - \omega_0^2} = \frac{F_0/k}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2} \tag{22-21}$$

Sustituimos en la ecuación 22-20, y obtenemos la solución particular

$$\boxed{x_p = \frac{F_0/k}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2}\operatorname{sen} \omega_0 t} \tag{22-22}$$



Las mesas sacudidoras o trepidantes producen vibración forzada y se utilizan para separar materiales granulados. (R. C. Hibbeler)

La *solución general* es, por consiguiente, la suma de dos funciones seno de frecuencias diferentes.

$$x = x_c + x_p = C\,\text{sen}(\omega_n t + \phi) + \frac{F_0/k}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2}\,\text{sen}\,\omega_0 t \qquad (22\text{-}23)$$

La *solución complementaria* x_c define la *vibración libre*, la cual depende de la frecuencia natural $\omega_n = \sqrt{k/m}$ y las constantes C y ϕ. La *solución particular* x_p describe la *vibración forzada* del bloque provocada por la fuerza aplicada $F = F_0$ sen $\omega_0 t$. Como todos los sistemas vibratorios se someten a *fricción*, la vibración libre, x_c, se amortiguará al paso del tiempo. Por ello, la vibración libre se conoce como *transitoria* y la vibración forzada se conoce como de *estado continuo*, ya que es la única vibración que permanece.

Según la ecuación 22-21, la *amplitud* de la vibración forzada, o de estado continuo, depende de la *relación de frecuencia* ω_0/ω_n. Si el *factor de amplificación* MF se define como la relación de la amplitud de la vibración de estado continuo, X, a la deflexión estática F_0/k, producida por la amplitud de la fuerza periódica F_0, entonces, según la ecuación 22-21,

El compactador de suelo opera por vibración forzada desarrollada por un motor interno. Es importante que la frecuencia forzadora no se aproxime a la frecuencia de la vibración natural del compactador, la cual puede determinarse cuando se apaga el motor; de lo contrario habrá resonancia y la máquina se volverá incontrolable. (© R. C. Hibbeler)

$$\text{MF} = \frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2} \qquad (22\text{-}24)$$

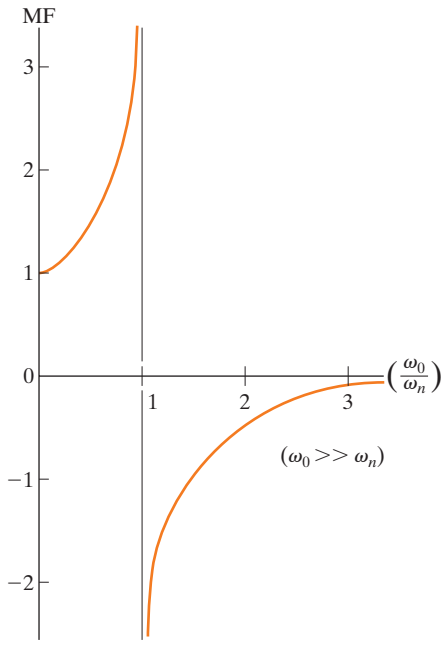


Fig. 22-12

Esta ecuación se grafica en la figura 22-12. Observe que si la fuerza o el desplazamiento se aplican con una frecuencia próxima a la frecuencia natural del sistema, es decir $\omega_0/\omega_n \approx 1$, la amplitud de vibración del bloque llega a ser extremadamente grande. Esto ocurre porque la fuerza **F** se aplica al bloque de modo que siempre siga el movimiento de éste. Esta condición se llama *resonancia*; en la práctica, las vibraciones resonantes pueden dar lugar a esfuerzos enormes y a la rápida falla de las partes*.

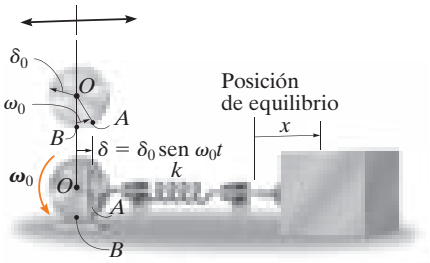
Desplazamiento periódico del soporte. Las vibraciones forzadas también pueden ser originadas por la excitación periódica del soporte de un sistema. El modelo de la figura 22-13*a* representa la vibración periódica de un bloque provocada por movimiento armónico $\delta = \delta_0 \operatorname{sen} \omega_0 t$ del soporte. El diagrama de cuerpo libre del bloque, en este caso, se muestra en la figura 22-13*b*. El desplazamiento δ del soporte se mide con respecto al punto de desplazamiento cero, es decir, cuando la línea radial *OA* coincide con *OB*. Por consiguiente, la deformación general del resorte es $(x - \delta_0 \operatorname{sen} \omega_0 t)$. Aplicamos la ecuación de movimiento y obtenemos

$$\stackrel{+}{\rightarrow} F_x = ma_x; \qquad -k(x - \delta_0 \operatorname{sen} \omega_0 t) = m\ddot{x}$$

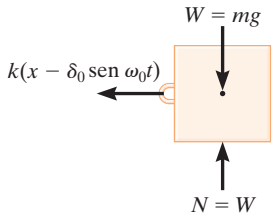
o bien,

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k\delta_0}{m}\operatorname{sen} \omega_0 t \qquad (22\text{-}25)$$

Por comparación, esta ecuación es idéntica a la ecuación 22-18, *siempre que* F_0 sea *reemplazada* por $k\delta_0$. Si esta sustitución se hace en las soluciones definidas por las ecuaciones 22-21 a 22-23, los resultados son apropiados para describir el movimiento del bloque cuando se somete al desplazamiento del soporte $\delta = \delta_0 \operatorname{sen} \omega_0 t$.



(a)



(b)

Fig. 22-13

*Un columpio tiene periodo de vibración natural, como se determinó en el ejemplo 22.1. Si alguien lo empuja, sólo cuando alcanza su punto más alto, e ignora la resistencia al avance o la resistencia del viento, habrá resonancia pues las frecuencias natural y forzadora son las mismas.

EJEMPLO 22.7

El instrumento que se muestra en la figura 22-14 está rígidamente montado en una plataforma P, la cual a su vez está sostenida por *cuatro* resortes, cada uno con una rigidez $k = 800\ \text{N/m}$. Si el piso se somete a un desplazamiento vertical $\delta = 10\ \text{sen}\ (8t)$ mm, donde t está en segundos, determine la amplitud de la vibración de estado continuo. ¿Cuál es la frecuencia de la vibración del piso requerida para provocar resonancia? El instrumento y la plataforma tienen una masa total de 20 kg.

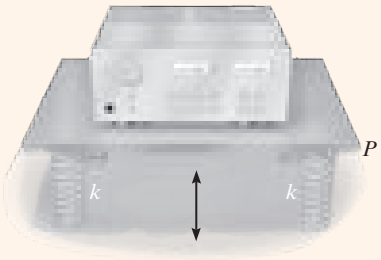


Fig. 22-14

SOLUCIÓN

La frecuencia natural es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4(800\ \text{N/m})}{20\ \text{kg}}} = 12.65\ \text{rad/s}$$

La amplitud de la vibración de estado continuo se determina con la ecuación 22-21, donde $k\delta_0$ reemplaza a F_0.

$$X = \frac{\delta_0}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2} = \frac{10}{1 - [(8\ \text{rad/s})/(12.65\ \text{rad/s})]^2} = 16.7\ \text{mm} \quad \textit{Resp.}$$

Ocurrirá resonancia cuando la amplitud de vibración X provocada por el desplazamiento del piso tienda a infinito. Esto requiere

$$\omega_0 = \omega_n = 12.6\ \text{rad/s} \quad \textit{Resp.}$$

*22.4 Vibración libre amortiguada viscosa

El análisis de vibración considerado hasta ahora no ha incluido los efectos de fricción o amortiguación en el sistema y, en consecuencia, las soluciones obtenidas no corresponden del todo al movimiento real. Como todas las vibraciones cesan con el tiempo, en el análisis deberán incluirse las fuerzas de amortiguación.

En muchos casos la amortiguación se atribuye a la resistencia creada por la sustancia —agua, aceite o aire—, en la cual vibre el sistema. Siempre que el cuerpo se mueva lentamente a través de esta sustancia, la resistencia al movimiento será directamente proporcional a la rapidez del cuerpo. El tipo de fuerza desarrollada en estas condiciones se llama *fuerza de amortiguación viscosa*. La magnitud de tal fuerza se expresa por medio de una ecuación de la forma

$$F = c\dot{x} \tag{22-26}$$

donde la constante c se llama *coeficiente de amortiguación viscosa* y sus unidades son N · s/m o lb · s/ft.

El movimiento vibratorio de un cuerpo o sistema que tiene amortiguación viscosa se puede caracterizar por el bloque y el resorte que se ilustran en la figura 22-15*a*. El efecto de amortiguación lo proporciona el *amortiguador* conectado al bloque del lado derecho. La amortiguación ocurre cuando el pistón P se mueve a la derecha o izquierda dentro del cilindro cerrado. El cilindro contiene un fluido y el movimiento del pistón se retarda, ya que el líquido debe fluir alrededor de un pequeño orificio en el pistón o a través de éste. Se supone que el amortiguador tiene un coeficiente de amortiguación viscosa c.

Si el bloque se desplaza una distancia x desde su posición de equilibrio, el diagrama de cuerpo libre resultante se muestra en la figura 22-15*b*. Tanto la fuerza del resorte como la fuerza de amortiguación se oponen al movimiento de avance del bloque, de modo que al aplicar la ecuación de movimiento se obtiene

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad -kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

o bien,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{22-27}$$

La solución de esta ecuación diferencial homogénea lineal de segundo grado tiene la forma

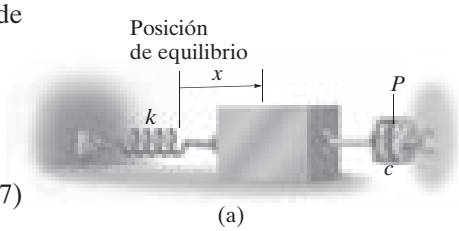
$$x = e^{\lambda t}$$

donde e es la base del logaritmo natural y λ (lambda) es una constante. El valor de λ se obtiene al sustituir esta solución y sus derivadas con respecto al tiempo en la ecuación 22-27, lo cual da

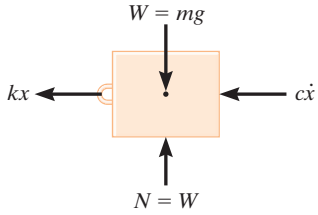
$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + c\lambda e^{\lambda t} + ke^{\lambda t} = 0$$

o bien,

$$e^{\lambda t}(m\lambda^2 + c\lambda + k) = 0$$



(a)



(b)

Fig. 22-15

Como $e^{\lambda t}$ nunca puede ser cero, una solución es posible siempre que

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

Por consiguiente, según la fórmula cuadrática, los dos valores de λ son

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$
$$\lambda_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \tag{22-28}$$

La solución general de la ecuación 22-27 es, por consiguiente, una combinación de exponenciales que implica estas dos raíces. Existen tres posibles combinaciones de λ_1 y λ_2 que se deben considerar. Antes de analizar las combinaciones, sin embargo, primero definiremos el *coeficiente de amortiguación crítica* c_c como el valor de c que hace que el radical presente en las ecuaciones 22-28 sea igual a cero, es decir,

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

o bien,

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n \tag{22-29}$$

Sistema sobreamortiguado. Cuando $c > c_c$, las raíces λ_1 y λ_2 son reales. Entonces la solución general de la ecuación 22-27 puede escribirse como

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \tag{22-30}$$

El movimiento correspondiente a esta solución es *no vibratorio*. El efecto de amortiguación es tan fuerte que cuando el bloque se desplaza y se libera, simplemente regresa a su posición original sin oscilar. Se dice entonces que el sistema está *sobreamortiguado.*

Sistema críticamente amortiguado. Si $c = c_c$, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = -c_c/2m = -\omega_n$. Esta situación se conoce como *amortiguación crítica*, ya que representa una condición donde c tiene el valor mínimo necesario para hacer que el sistema sea no vibratorio. Con los métodos de ecuaciones diferenciales puede demostrarse que la solución de la ecuación 22-27 con amortiguación crítica es

$$x = (A + Bt)e^{-\omega_n t} \tag{22-31}$$

Sistema subamortiguado. Con mucha frecuencia $c < c_c$, en cuyo caso el sistema se conoce como *subamortiguado*, donde las raíces λ_1 y λ_2 son números complejos, y puede demostrarse que la solución general de la ecuación 22-27 se escribe como

$$x = D[e^{-(c/2m)t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi)] \tag{22-32}$$

donde D y ϕ son constantes, por lo general determinadas a partir de las condiciones iniciales del problema. La constante ω_d se llama *frecuencia natural amortiguada* del sistema. Su valor es

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} \tag{22-33}$$

donde la relación c/c_c se llama *factor de amortiguación*.

En la figura 22-16 se muestra la gráfica de la ecuación 22-32. El límite inicial del movimiento, D, se reduce con cada ciclo de vibración, ya que el movimiento está confinado dentro de los límites de la curva exponencial. Si utilizamos la frecuencia natural amortiguada ω_d, el periodo de vibración amortiguada puede escribirse como

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \tag{22-34}$$

Como $\omega_d < \omega_n$, ecuación 22-33, el periodo de vibración amortiguada, τ_d, será mayor que el de vibración libre, $\tau = 2\pi/\omega_n$.

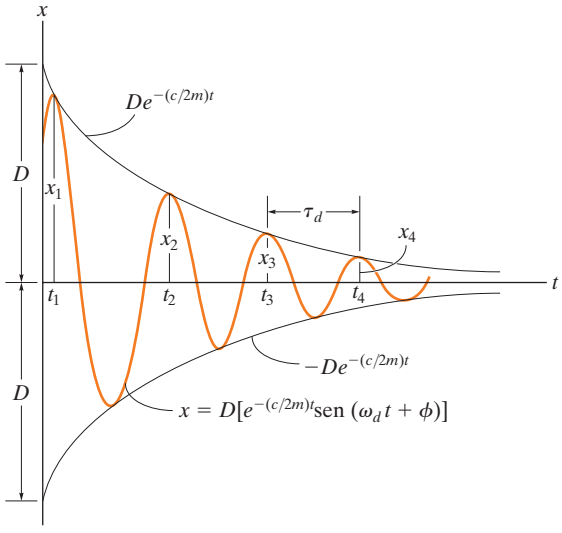


Fig. 22-16

*22.5 Vibración forzada amortiguada viscosa

El caso más general de movimiento vibratorio con un solo grado de libertad ocurre cuando el sistema incluye los efectos de movimiento forzado y amortiguación inducida. El análisis de este tipo particular de vibración es de valor práctico cuando se aplica a sistemas con características de amortiguación significativas.

Si se conecta un amortiguador al bloque y el resorte que se muestran en la figura 22-11*a*, la ecuación diferencial que describe el movimiento es

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \operatorname{sen} \omega_0 t \tag{22-35}$$

Para un bloque y resorte que experimenten desplazamiento periódico de sus soportes puede escribirse una ecuación similar (fig. 22-13*a*), la cual incluya los efectos de amortiguación. En ese caso, sin embargo, a F_0 la reemplaza $k\delta_0$. Como la ecuación 22-35 es no homogénea, la solución general es la suma de una solución complementaria x_c y una solución particular x_p. La solución complementaria se determina al igualar a cero el lado derecho de la ecuación 22-35 y resolver la ecuación homogénea, la cual es equivalente a la ecuación 22-27. Las ecuaciones 22-30, 22-31 o 22-32, por consiguiente, dan la solución, según los valores de λ_1 y λ_2. Como todos los sistemas se someten a fricción, entonces esta solución se amortiguará con el tiempo. Únicamente permanecerá la solución particular que describe la *vibración de estado continuo* del sistema. Como la función forzadora es armónica, el movimiento de estado continuo también será armónico. Por consiguiente, la solución particular será de la forma

$$X_P = X' \operatorname{sen}(\omega_0 t - \phi') \tag{22-36}$$

Las constantes X' y ϕ' se determinan calculando la primera y segunda derivadas con respecto al tiempo y sustituyéndolas en la ecuación 22-35, la cual después de simplificarse resulta

$$-X'm\omega_0^2 \operatorname{sen}(\omega_0 t - \phi') + X'c\omega_0 \cos(\omega_0 t - \phi') + X'k \operatorname{sen}(\omega_0 t - \phi') = F_0 \operatorname{sen} \omega_0 t$$

Como esta ecuación es válida todo el tiempo, los coeficientes constantes se obtienen haciendo $\omega_0 t - \phi' = 0$ y $\omega_0 t - \phi' = \pi/2$, lo cual hace que la ecuación anterior se escriba como

$$X'c\omega_0 = F_0 \operatorname{sen} \phi'$$

$$-X'm\omega_0^2 + X'k = F_0 \cos \phi'$$

La amplitud se obtiene al elevar al cuadrado estas ecuaciones, sumar los resultados y utilizar la identidad $\text{sen}^2\phi' + \cos^2\phi' = 1$, lo cual da

$$X' = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega_0^2)^2 + c^2\omega_0^2}} \tag{22-37}$$

Si dividimos la primera ecuación entre la segunda obtenemos

$$\phi' = \tan^{-1}\left[\frac{c\omega_0}{k - m\omega_0^2}\right] \tag{22-38}$$

Como $\omega_n = \sqrt{k/m}$ y $c_c = 2m\omega_n$, entonces las ecuaciones anteriores también pueden escribirse como

$$X' = \frac{F_0/k}{\sqrt{[1 - (\omega_0/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_0/\omega_n)]^2}}$$

$$\phi' = \tan^{-1}\left[\frac{2(c/c_c)(\omega_0/\omega_n)}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2}\right] \tag{22-39}$$

El ángulo ϕ' representa la diferencia de fase entre la fuerza aplicada y la vibración de estado continuo resultante del sistema amortiguado.

El *factor de amplificación* MF se definió en la sección 22.3 como la relación entre la amplitud de deflexión provocada por la vibración forzada y la deflexión provocada por la fuerza estática F_0. Por lo tanto,

$$\text{MF} = \frac{X'}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_0/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_0/\omega_n)]^2}} \tag{22-40}$$

El MF se traza en la figura 22-17 versus la relación de frecuencia ω_0/ω_n para varios valores del factor de amortiguación c/c_c. En esta gráfica se observa que la amplificación de la amplitud se incrementa a medida que se reduce el factor de amortiguación. Evidentemente, ocurre resonancia sólo cuando el factor de amortiguación es cero y la relación de frecuencia es igual a 1.

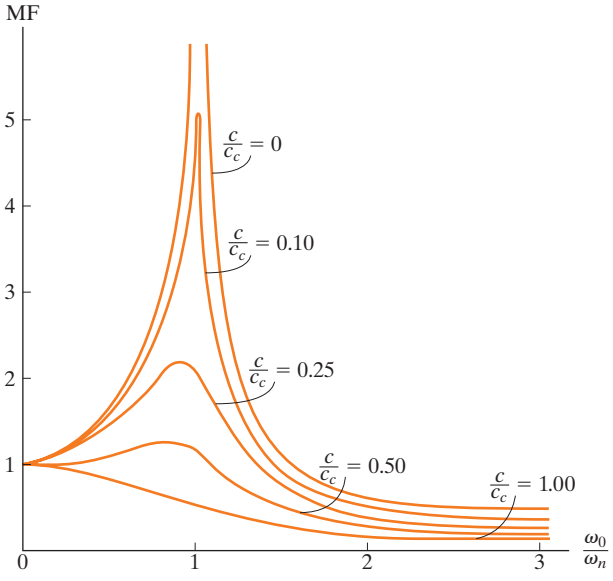


Fig. 22-17

EJEMPLO 22.8

El motor eléctrico de 30 kg que se ilustra en la figura 22-18 está limitado a moverse verticalmente y se sostiene mediante *cuatro* resortes, cada uno con una rigidez de 200 N/m. Si el rotor se desbalancea de modo que su efecto equivalga a una masa de 4 kg situada a 60 mm del eje de rotación, determine la amplitud de la vibración cuando el rotor gira a $\omega_0 = 10$ rad/s. El factor de amortiguación es $c/c_c = 0.15$.

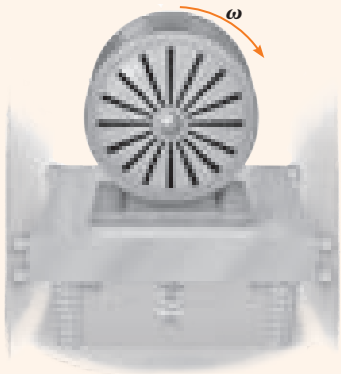


Fig. 22-18

SOLUCIÓN

La fuerza periódica que hace que el motor vibre es la fuerza centrífuga a consecuencia del rotor desbalanceado. Esta fuerza tiene una magnitud constante de

$$F_0 = ma_n = mr\omega_0^2 = 4\text{ kg}(0.06\text{ m})(10\text{ rad/s})^2 = 24\text{ N}$$

La rigidez de todo el sistema de cuatro resortes es $k = 4(200\text{ N/m}) = 800\text{ N/m}$. Por consiguiente, la frecuencia de vibración natural es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800\text{ N/m}}{30\text{ kg}}} = 5.164\text{ rad/s}$$

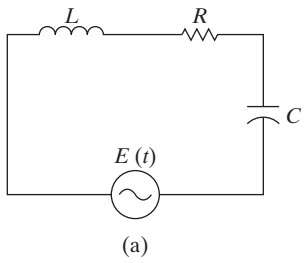
Como se conoce el factor de amortiguación, la amplitud de estado continuo se determina con la primera de las ecuaciones 22-39, es decir,

$$X' = \frac{F_0/k}{\sqrt{[1-(\omega_0/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_0/\omega_n)]^2}}$$

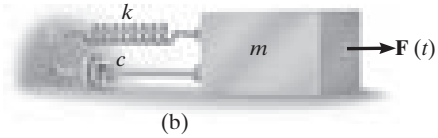
$$= \frac{24/800}{\sqrt{[1-(10/5.164)^2]^2 + [2(0.15)(10/5.164)]^2}}$$

$$= 0.0107\text{ m} = 10.7\text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

*22.6 Análogos de un circuito eléctrico



(a)



(b)

Fig. 22-19

Las características de un sistema mecánico vibratorio pueden representarse por medio de un circuito eléctrico. Considere el circuito que se muestra en la figura 22-19*a*, el cual consta de un inductor L, un resistor R y un capacitor C. Cuando se aplica un voltaje $E(t)$, hace que una corriente de magnitud i fluya a través del circuito. Cuando la corriente fluye más allá del inductor la caída de voltaje es $L(di/dt)$, cuando fluye a través del resistor la caída es Ri, y cuando llega al capacitor la caída es $(1/C)\int i\,dt$. Como la corriente no puede fluir más allá del capacitor, sólo es posible medir la carga q que actúa en el capacitor. La carga, sin embargo, puede relacionarse con la corriente mediante la ecuación $i = dq/dt$. Por lo tanto, las caídas de voltaje que ocurren a través del inductor, resistor y capacitor son $L\,d^2q/dt^2$, $R\,dq/dt$ y q/C, respectivamente. De acuerdo con la ley del voltaje de Kirchhoff, el voltaje aplicado es igual a la suma de las caídas de voltaje alrededor del circuito. Por consiguiente,

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \tag{22-41}$$

Considere ahora el modelo de un sistema mecánico con un solo grado de libertad (fig. 22-19*b*), sometido tanto a una función forzadora general $F(t)$ como de amortiguación. La ecuación de movimiento para este sistema se estableció en la sección previa y puede escribirse como

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \tag{22–42}$$

Por comparación, se observa que las ecuaciones 22-41 y 22-42 tienen la misma forma y, por ende, matemáticamente el procedimiento de analizar un circuito eléctrico es igual al de analizar un sistema mecánico vibratorio. Las similitudes entre las dos ecuaciones se dan en la tabla 22-1.

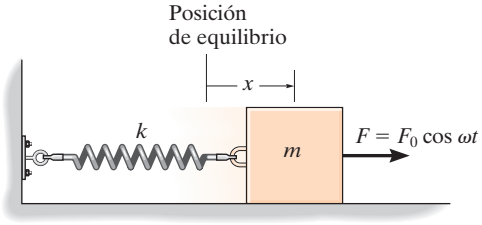
Este analogía tiene una importante aplicación en el trabajo experimental, ya que es más fácil simular la vibración de un sistema mecánico complejo por medio de un circuito eléctrico, el cual puede construirse con una computadora analógica, que construir un modelo mecánico de resorte y amortiguador equivalente.

TABLA 22-1
Análogos eléctricos–mecánicos

Eléctricos		Mecánicos	
Carga eléctrica	q	Desplazamiento	x
Corriente eléctrica	i	Velocidad	dx/dt
Voltaje	$E(t)$	Fuerza aplicada	$F(t)$
Inductancia	L	Masa	m
Resistencia	R	Coeficiente de amortiguación viscosa	c
Recíproco de capacitancia	$1/C$	Rigidez de resorte	k

PROBLEMAS

22-41. Si el modelo de bloque y resorte se somete a la fuerza periódica $F = F_0 \cos \omega t$, demuestre que la ecuación diferencial de movimiento es $\ddot{x} + (k/m)x = (F_0/m) \cos \omega t$, donde x se mide con respecto a la posición de equilibrio del bloque. ¿Cuál es la solución general de esta ecuación?



Prob. 22-41

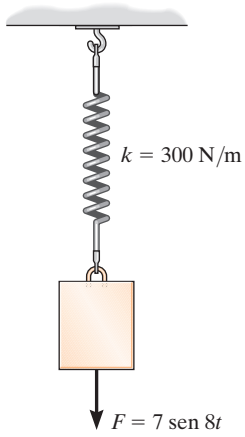
22-42. Un bloque que tiene una masa m está suspendido de un resorte de rigidez k. Si sobre el peso se imprime una fuerza vertical $F = F_O$ que actúa hacia abajo, determine la ecuación que describe la posición del bloque como una función del tiempo.

22-43. Un peso de 4 lb está unido a un resorte que tiene una rigidez $k = 10$ lb/ft. El peso se jala hacia abajo hasta una distancia de 4 in y se libera desde el reposo. Si el soporte se mueve con un desplazamiento vertical $d = (0.5 \text{ sen } 4t)$ in, donde t se da en segundos, determine la ecuación que describe la posición del peso como una función del tiempo.

***22-44.** Un bloque de 4 kg está suspendido de un resorte que tiene una rigidez de $k = 600$ N/m. El bloque se jala hacia abajo hasta 50 mm desde la posición de equilibrio y se libera desde el reposo, cuando $t = 0$. Si al soporte se le imprime un desplazamiento de $\delta = (10 \text{ sen } 4t)$ mm, donde t se da en segundos, determine la ecuación que describe el movimiento vertical del bloque. Suponga que el desplazamiento positivo es hacia abajo.

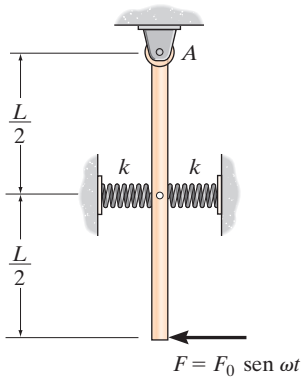
22-45. Use un modelo de bloque y resorte como el mostrado en la figura 22-13*a*, pero suspendido desde una posición vertical y sometido a un desplazamiento periódico del soporte $\delta = \delta_0 \text{ sen } \omega_0 t$, para determinar la ecuación de movimiento para el sistema, y obtener su solución general. Defina el desplazamiento y medido desde la posición de equilibrio estático del bloque cuando $t = 0$.

22-46. Un bloque de 5 kg está suspendido de un resorte que tiene una rigidez de 300 N/m. Si sobre el bloque actúa una fuerza vertical $F = (7 \text{ sen } 8t)$ N, donde t se da en segundos, determine la ecuación que describe el movimiento del bloque cuando se jala 100 mm hacia abajo desde la posición de equilibrio y se libera desde el reposo en $t = 0$. Suponga que el desplazamiento positivo es hacia abajo.



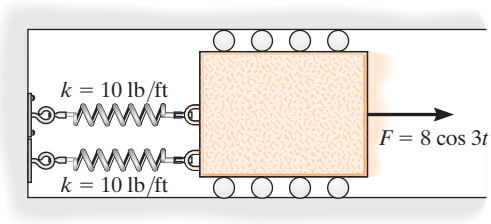
Prob. 22-46

22-47. La varilla uniforme tiene una masa de m. Si sobre la varilla actúa una fuerza periódica de $F = F_0 \text{ sen } \omega t$, determine la amplitud de la vibración de estado continuo.



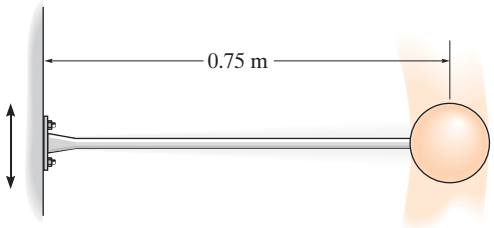
Prob. 22-47

*22-48. El bloque de 30 lb está unido a dos resortes que tienen una rigidez de 10 lb/ft. Sobre el bloque se aplica una fuerza periódica $F = (8 \cos 3t)$ lb, donde t se da en segundos. Determine la rapidez máxima del bloque después de que las fuerzas de fricción ocasionan que se amortigüen las vibraciones libres.



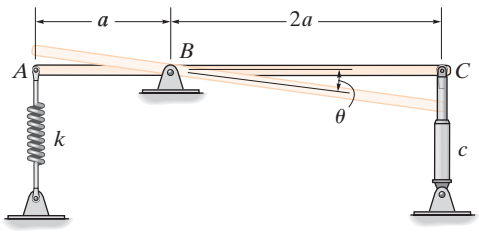
Prob. 22-48

22-49. La varilla elástica ligera soporta una esfera de 4 kg. Cuando se aplica una fuerza vertical de 18 N sobre la esfera, la varilla sufre una deflexión de 14 mm. Si la pared oscila con frecuencia armónica de 2 Hz y tiene una amplitud de 15 mm, determine la amplitud de la vibración para la esfera.



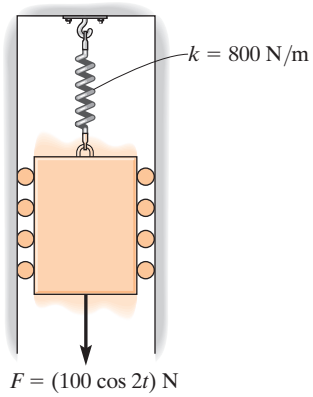
Prob. 22-49

22-50. Encuentre la ecuación diferencial para pequeñas oscilaciones en función de θ para la varilla uniforme de masa m. También muestre que si $c < \sqrt{mk}/2$, entonces el sistema permanece subamortiguado. La varilla está en una posición horizontal cuando se encuentra en equilibrio.



Prob. 22-50

22-51. El bloque de 40 kg está unido a un resorte que tiene una rigidez de 800 N/m. Sobre el bloque se aplica una fuerza $F = (100 \cos 2t)$ N, donde t se da en segundos. Determine la velocidad máxima del bloque para la vibración de estado continuo.



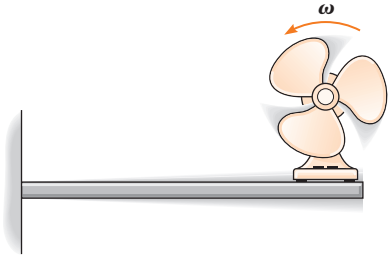
Prob. 22-51

*22-52. Con un modelo de bloque y resorte, como el de la figura 22-13*a,* pero suspendido en posición vertical y sometido a un desplazamiento periódico de su soporte de $\delta = \delta_0 \cos \omega_0 t$, determine la ecuación de movimiento del sistema y obtenga su solución general. Defina el desplazamiento y medido a partir de la posición de equilibrio estático del bloque cuando $t = 0$.

22-53. El ventilador tiene una masa de 25 kg y está fijo en el extremo de una viga horizontal de masa insignificante. Las aspas del ventilador están montadas excéntricamente en la flecha, de modo que equivalen a una masa desbalanceada de 3.5 kg localizada a 100 mm del eje de rotación. Si la deflexión estática de la viga es de 50 mm a consecuencia del peso del ventilador, determine la velocidad angular de sus aspas a la cual ocurrirá la resonancia. *Sugerencia:* Consulte la primera parte del ejemplo 22.8.

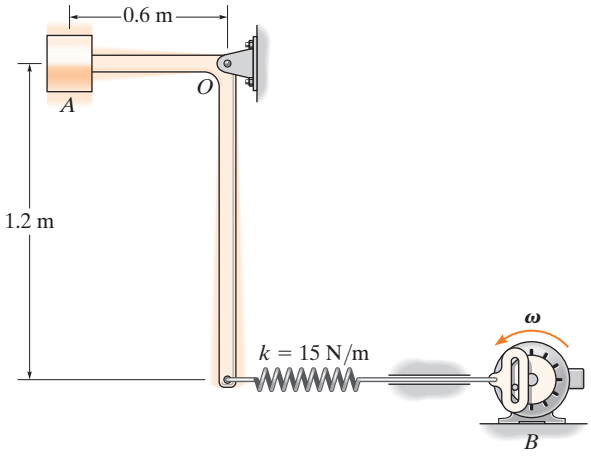
22-54. En el problema 22-53, determine la amplitud de la vibración de estado continuo del ventilador, si su velocidad angular es de 10 rad/s.

22-55. ¿Cuál será la amplitud de la vibración de estado continuo del ventilador del problema 22-53, si su velocidad angular es de 18 rad/s? *Sugerencia:* Consulte la primera parte del ejemplo 22.8.



Probs. 22-53/54/55

***22-56.** El pequeño bloque en A tiene una masa de 4 kg y está montado sobre la varilla doblada que tiene masa despreciable. Si el rotor en B provoca un movimiento armónico $\delta_B = (0.1 \cos 15t)$ m, donde t se da en segundos, determine la amplitud de estado continuo de la vibración del bloque.

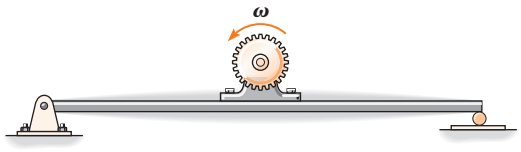


Prob. 22-56

22-57. El motor eléctrico hace girar un volante excéntrico que es equivalente a un peso desequilibrado de 0.25 lb, situado a 10 in del eje de rotación. Si la deflexión estática de la viga es de 1 in a causa del peso del motor, determine la velocidad angular del volante a la que se producirá la resonancia. El motor pesa 150 lb. Desprecie la masa de la viga.

22-58. ¿Cuál será la amplitud de la vibración de estado continuo del motor del problema 22-57, si la velocidad angular del volante es 20 rad/s?

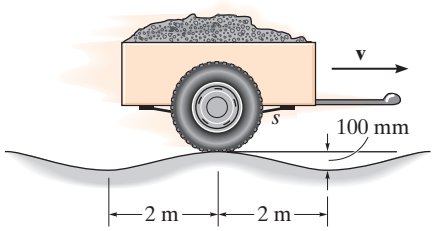
22-59. Determine la velocidad angular del volante del problema 22-57 que producirá una amplitud de vibración de 0.25 in.



Probs. 22-57/58/59

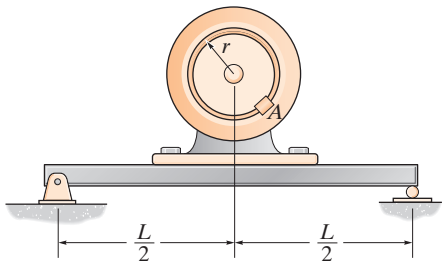
***22-60.** El remolque de 450 kg es jalado a una rapidez constante sobre la superficie de un camino irregular, la cual puede aproximarse mediante una curva coseno que tiene una amplitud de 50 mm y una longitud de onda de 4 m. Si cada uno de los dos resortes s que soportan el remolque tiene una rigidez de 800 N/m, determine la velocidad v que causará la máxima vibración (resonancia) del remolque. Desprecie el peso de las ruedas.

22-61. Determine la amplitud de la vibración del remolque en el problema 22-60, si la rapidez $v = 15$ km/h.



Probs. 22-60/61

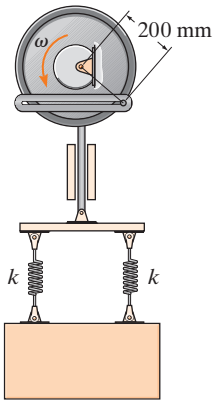
22-62. El motor de masa M se soporta mediante una viga simplemente apoyada de masa despreciable. Si el bloque A de masa m se sujeta al rotor, que gira a velocidad angular constante de ω, determine la amplitud de la vibración de estado continuo. *Sugerencia:* Cuando la viga se somete a una fuerza concentrada de P en la mitad de su claro, experimenta una deflexión $\delta = PL^3/48EI$ en este punto. Aquí, E es el módulo de elasticidad de Young, una propiedad del material, e I es el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga.



Prob. 22-62

22-63. El sistema de resortes está conectado a un cruceta que oscila verticalmente cuando la rueda gira a una velocidad angular constante de $\boldsymbol{\omega}$. Si la amplitud de la vibración de estado continuo es de 400 mm y cada uno de los resortes tiene una rigidez de $k = 2500$ N/m, determine los dos posibles valores de $\boldsymbol{\omega}$ a que debe girar la rueda. La masa del bloque es de 50 kg.

***22-64.** El sistema de resortes está conectado a un cruceta que oscila verticalmente cuando la rueda gira a una velocidad angular constante de $\omega = 5$ rad/s. Si la amplitud de la vibración de estado continuo es de 400 mm, determine los dos posibles valores de la rigidez k de los resortes. La masa del bloque es de 50 kg.



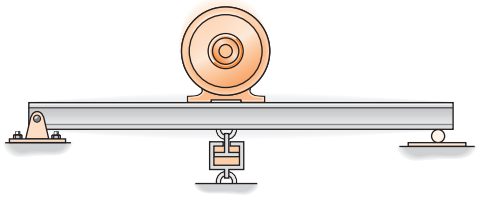
Probs. 22-63/64

22-65. Un bloque de 7 lb está suspendido de un resorte que tiene una rigidez de $k = 75$ lb/ft. El soporte al que está unido el resorte experimenta un movimiento armónico simple que puede expresarse como $\delta = (0.15 \text{ sen } 2t)$ ft, donde t se da en segundos. Si el factor de amortiguación es $c/c_c = 0.8$, determine el ángulo de fase ϕ de la vibración forzada.

22-66. Determine el factor de magnificación de la combinación bloque, resorte y amortiguador en el problema 22-65.

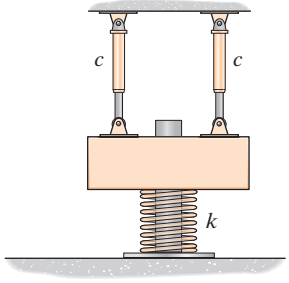
22-67. Un bloque con 7 kg de masa está suspendido de un resorte que tiene una rigidez $k = 600$ N/m. Si al bloque se le imparte una velocidad hacia arriba de 0.6 m/s a partir de su posición cuando $t = 0$, determine la posición en función del tiempo. Suponga que el desplazamiento positivo del bloque es hacia abajo y que el movimiento se desarrolla en un medio que genera una fuerza de amortiguación $F = (50|v|)$N, donde v está en m/s.

***22-68.** El motor eléctrico de 200 lb se sujeta al punto medio de la viga simplemente apoyada. Se ha encontrado que la viga sufre una deflexión de 2 in cuando el motor no está funcionando. El motor gira un volante excéntrico que es equivalente a un peso desequilibrado de 1 lb ubicado a 5 in del eje de rotación. Si el motor gira a 100 rpm, determine la amplitud de la vibración de estado continuo. El factor de amortiguación es $c/c_c = 0.20$. Desprecie la masa de la viga.



Prob. 22-68

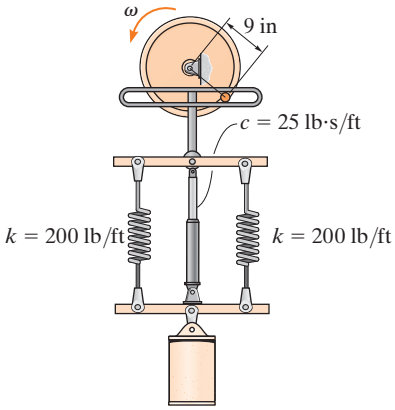
22-69. Dos amortiguadores idénticos se disponen de modo que son paralelos entre sí, como se indica. Muestre que si el coeficiente de amortiguación $c < \sqrt{mk}$, entonces el bloque de masa m vibrará como un sistema subamortiguado.



Prob. 22-69

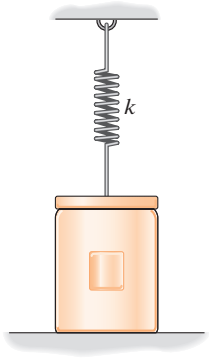
22-70. El factor de amortiguación, c/c_c, puede determinarse experimentalmente usando la medición sucesiva de las amplitudes de movimiento vibratorio de un sistema. Si dos de estos desplazamientos máximos pueden aproximarse mediante x_1 y x_2, como se indica en la figura 22-16, demuestre que $(x_1/x_2) = 2\pi(c/c_c)/\sqrt{1-(c/c_c)^2}$. La cantidad $\ln(x_1/x_2)$ se llama *decremento logarítmico*.

22-71. Si la amplitud de la vibración de estado continuo del cilindro de 50 lb es 6 in, determine la velocidad angular ω de la rueda.



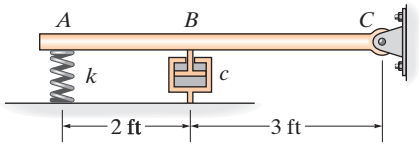
Prob. 22-71

***22-72.** El bloque, que tiene un peso de 12 lb, se sumerge en un líquido de modo que la fuerza de amortiguación que actúa sobre el bloque tiene una magnitud de $F = (0.7|v|)$ lb, donde v está en ft/s. Si el bloque se jala 0.62 ft hacia abajo y se libera desde el reposo, determine la posición del bloque en función del tiempo. El resorte tiene una rigidez de $k = 53$ lb/ft. Suponga que el desplazamiento positivo es hacia abajo.



Prob. 22-72

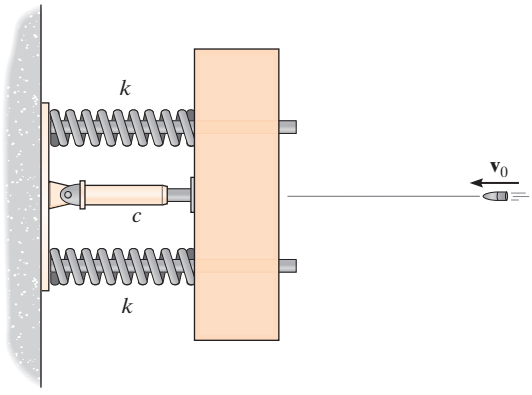
22-73. La barra pesa 6 lb, la rigidez del resorte es de $k = 8$ lb/ft y el amortiguador tiene un coeficiente de amortiguación $c = 60$ lb · s/ft; determine la ecuación diferencial que describe el movimiento en función del ángulo θ de rotación de la barra. Además, ¿cuál debería ser el coeficiente de amortiguación del amortiguador si la barra debe estar críticamente amortiguada?



Prob. 22-73

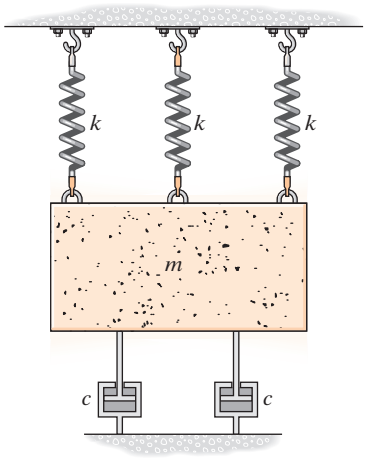
22-74. Una bala de masa m tiene una velocidad de $\mathbf{v}_0$ justo antes de golpear el blanco de masa M. Si la bala se incrusta en el blanco y la vibración debe estar críticamente amortiguada, determine el coeficiente de amortiguación crítico del amortiguador, así como la compresión máxima de los resortes. El blanco se mueve libremente a lo largo de las dos guías horizontales que están "anidadas" en los resortes.

22-75. Una bala de masa m tiene una velocidad $\mathbf{v}_0$ justo antes de golpear el blanco de masa M. Si la bala se incrusta en el blanco y el coeficiente de amortiguación del amortiguador es $0 < c << c_c$, determine la compresión máxima de los resortes. El blanco se mueve libremente a lo largo de las dos guías horizontales que están "anidadas" en los resortes.



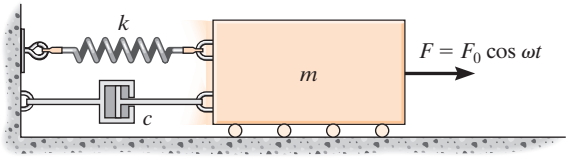
Probs. 22-74/75

*22-76. Determine la ecuación diferencial de movimiento para el sistema vibratorio amortiguado que se muestra en la figura. ¿Qué tipo de movimiento se produce? Considere que $k = 100\ \text{N/m}, c = 200\ \text{N} \cdot \text{s/m}, m = 25\ \text{kg}$.



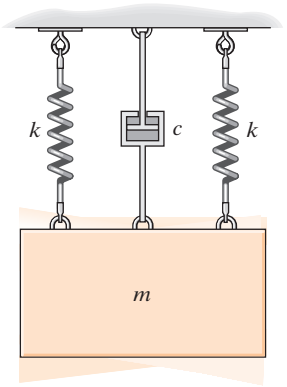
Prob. 22-76

22-77. Dibuje el circuito eléctrico que es equivalente al sistema mecánico mostrado. Determine la ecuación diferencial que describe la carga q en el circuito.



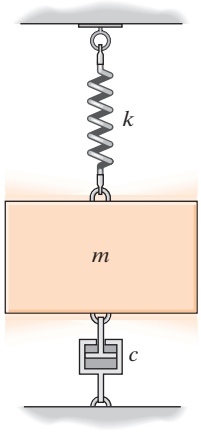
Prob. 22-77

22-78. Dibuje el circuito eléctrico que es equivalente al sistema mecánico ilustrado. ¿Cuál es la ecuación diferencial que describe la carga q en el circuito?



Prob. 22-78

22-79. Dibuje el circuito eléctrico que es equivalente al sistema mecánico mostrado. Determine la ecuación diferencial que describe la carga q en el circuito.



Prob. 22-79

REPASO DEL CAPÍTULO

Vibración libre no amortiguada

Un cuerpo experimenta vibración libre cuando fuerzas de restauración gravitacional y elásticas provocan el movimiento. Este movimiento es no amortiguado cuando se desprecian las fuerzas de fricción. El movimiento periódico de un cuerpo no amortiguado que vibra libremente puede estudiarse al desplazar el cuerpo de la posición de equilibrio y, luego, aplicar la ecuación de movimiento a lo largo de la trayectoria.

Para un sistema con un grado de libertad, la ecuación diferencial resultante puede escribirse en función de su frecuencia natural ω_n.

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad \tau = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

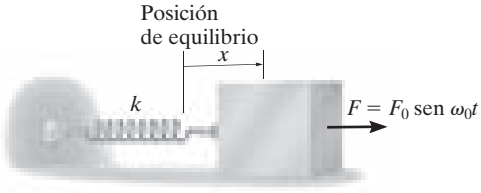
Métodos de energía

Siempre que las fuerzas de restauración que actúan en el cuerpo sean gravitacionales y elásticas, entonces también pueden utilizarse para determinar su movimiento armónico simple. Para hacerlo, el cuerpo se desplaza una pequeña distancia desde su posición de equilibrio y se escribe una expresión para sus energías cinética y potencial. La derivada con respecto al tiempo de esta ecuación puede reordenarse entonces en la forma estándar $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$.

Vibración forzada no amortiguada

Cuando se aplica la ecuación de movimiento a un cuerpo, el cual está sometido a una fuerza periódica, o el soporte se desplaza con una frecuencia ω_0, entonces la solución de la ecuación diferencial consiste en una solución complementaria y una solución particular. La solución complementaria es provocada por la vibración libre y puede despreciarse. La solución particular es provocada por la vibración forzada.

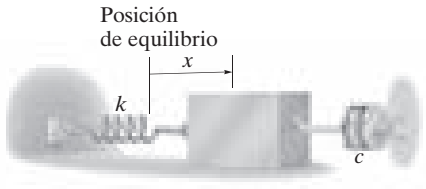
Ocurrirá resonancia si la frecuencia de vibración natural ω_n es igual a la frecuencia forzadora ω_0. Esto debe evitarse, puesto que el movimiento tenderá a volverse ilimitado.



$$x_p = \frac{F_0/k}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2} \operatorname{sen} \omega_0 t$$

Vibración libre amortiguada viscosa

Una fuerza de amortiguación viscosa es provocada por la resistencia al avance de un fluido en el sistema cuando vibra. Si el movimiento es lento, esa fuerza de resistencia al avance será proporcional a la velocidad, es decir, $F = c\dot{x}$. Donde c es el coeficiente de amortiguación viscosa. Al comparar su valor con el coeficiente de amortiguación crítica, $c_c = 2m\omega_n$, podemos especificar el tipo de vibración que ocurre. Si $c > c_c$, es un sistema sobreamortiguado; si $c = c_c$, es un sistema críticamente amortiguado; si $c < c_c$, es un sistema subamortiguado.



Vibración forzada amortiguada viscosa

El tipo más general de vibración de un sistema con un grado de libertad ocurre cuando el sistema está amortiguado y se somete a movimiento forzado periódico. La solución da una idea sobre cómo influyen en la vibración el factor de amortiguación, c/c_c, y la relación de frecuencia ω_0/ω_n.

La resonancia se evita siempre que $c/c_c \neq 0$ y $\omega_0/\omega_n \neq 1$.

Análogos de un circuito eléctrico

El movimiento vibratorio de un sistema mecánico complejo puede estudiarse si se modela como un circuito eléctrico. Esto es posible ya que las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de cada sistema son las mismas.

APÉNDICE

A Expresiones matemáticas

Fórmula cuadrática

$$\text{Si } ax^2 + bx + c = 0, \text{ entonces } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Funciones hiperbólicas

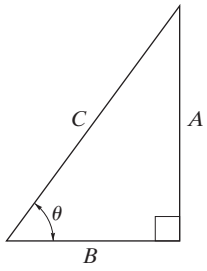
$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$$

Identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{A}{C}, \csc\theta = \frac{C}{A}$$

$$\cos\theta = \frac{B}{C}, \sec\theta = \frac{C}{B}$$

$$\tan\theta = \frac{A}{B}, \cot\theta = \frac{B}{A}$$



$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\operatorname{sen}(\theta \pm \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi \pm \cos\theta\operatorname{sen}\phi$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}, \operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Expansiones en series de potencias

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots \qquad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

Derivadas

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = \tan u\sec u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u\cot u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\operatorname{sen} u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) = \cosh u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh u) = \operatorname{senh} u\frac{du}{dx}$$

Integrales

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx) + C$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ba}}\ln\left[\frac{a+x\sqrt{-ab}}{a-x\sqrt{-ab}}\right] + C,\ ab < 0$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\ln(bx^2+a) + C$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b\sqrt{ab}}\tan^{-1}\frac{x\sqrt{ab}}{a} + C, ab > 0$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left[\frac{a+x}{a-x}\right] + C, a^2 > x^2$$

$$\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3} + C$$

$$\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{-2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3} + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,\text{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right] + C, a > 0$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,\text{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right) + C, a > 0$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right] + C$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + C$$

$$\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} \mp \frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b} + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left[\sqrt{a+bx+cx^2} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right] + C,\ c > 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}}\text{sen}^{-1}\left(\frac{-2cx-b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) + C, c < 0$$

$$\int \text{sen}\,x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \text{sen}\,x + C$$

$$\int x\cos(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\text{sen}(ax) + C$$

$$\int x^2\cos(ax)\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos(ax) + \frac{a^2x^2-2}{a^3}\text{sen}(ax) + C$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C$$

$$\int \text{senh}\,x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \text{senh}\,x + C$$

APÉNDICE

B Análisis vectorial

El siguiente material es un breve repaso del análisis vectorial. Un tratamiento más detallado de estos temas se da en *Ingeniería mecánica: Estática*.

Vector: Un vector **A** es una cantidad que tiene magnitud y dirección, y se suma de acuerdo con la ley del paralelogramo. Como se muestra en la figura B-1, $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, donde **A** es el *vector resultante* y **B** y **C** son los *vectores componentes*.

Vector unitario. Un vector unitario, $\mathbf{u}_A$, tiene una magnitud de una unidad "sin unidades" y actúa en la misma dirección que **A**. Se determina al dividir **A** entre su magnitud A, es decir,

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} \tag{B-1}$$

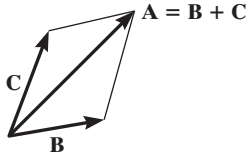


Fig. B-1

Notación vectorial cartesiana. Las direcciones de los ejes x, y, z positivos se definen mediante los vectores unitarios cartesianos $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, respectivamente.

Como se muestra en la figura B-2, el vector $\mathbf{A}$ se formula por medio de la adición de sus componentes x, y, z como

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \tag{B-2}$$

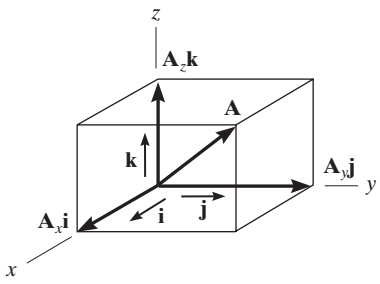


Fig. B-2

La *magnitud* de $\mathbf{A}$ se determina con

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{B-3}$$

La *dirección* de $\mathbf{A}$ se define en función de sus ángulos de dirección de las coordenadas α, β, λ, medidos de la *cola* de $\mathbf{A}$ a los ejes x, y, z positivos (fig. B-3). Estos ángulos se determinan con los *cosenos de dirección* que representan las componentes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ del vector unitario $\mathbf{u}_A$; es decir, de acuerdo con las ecuaciones B-1 y B-2.

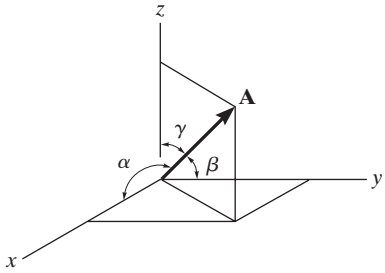


Fig. B-3

$$\mathbf{u}_A = \frac{A_x}{A}\mathbf{i} + \frac{A_y}{A}\mathbf{j} + \frac{A_z}{A}\mathbf{k} \tag{B-4}$$

de modo que los cosenos de dirección son

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \quad \cos\beta = \frac{A_y}{A} \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{A} \tag{B-5}$$

Por consiguiente, $\mathbf{u}_A = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$, y con la ecuación B-3, se observa que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{B-6}$$

Producto vectorial. El producto vectorial de dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, que da el vector resultante $\mathbf{C}$, se escribe como

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \tag{B-7}$$

y se lee $\mathbf{C}$ es igual a $\mathbf{A}$ "cruz" $\mathbf{B}$. La *magnitud* de $\mathbf{C}$ es

$$C = AB \operatorname{sen}\theta \tag{B-8}$$

donde θ es el ángulo que se forma entre las *colas* de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ ($0° \leq \theta \leq 180°$). La *dirección* de $\mathbf{C}$ se determina con la regla de la mano derecha, según la cual los dedos de la mano derecha se cierran *de* $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ y el pulgar apunta en la dirección de $\mathbf{C}$ (fig. B-4). Este vector es perpendicular al plano que contiene los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

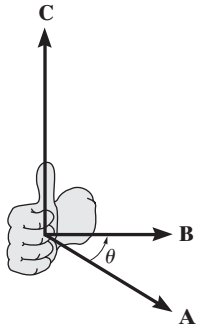


Fig. B-4

El producto vectorial (cruz) *no* es conmutativo, es decir, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$. Más bien

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \tag{B-9}$$

La ley distributiva es válida; es decir,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{D} \tag{B-10}$$

Y el producto vectorial puede multiplicarse por un escalar m de cualquier manera; es decir,

$$m(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})m \tag{B-11}$$

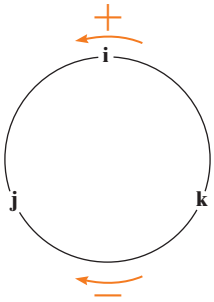


Fig. B-5

La ecuación B-7 puede utilizarse para determinar el producto vectorial de cualquier par de vectores unitarios cartesianos. Por ejemplo, para determinar $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, la magnitud es $(i)(j)$ sen $90° = (1)(1)(1) = 1$, y su dirección $+\mathbf{k}$ se determina con la regla de la mano derecha, aplicada a $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ (fig. B-2). Un esquema simple que se muestra en la figura B-5 puede ser útil para obtener éste y otros resultados cuando se requiera. Si el círculo se construye como se indica y, luego, se "cruzan" (se multiplican vectorialmente) dos de los vectores unitarios en *sentido antihorario* alrededor del círculo, se obtiene un tercer vector *positivo*, por ejemplo, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$. Al moverse *en sentido horario* se obtiene un vector unitario *negativo*, por ejemplo, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ están expresados en forma de componentes cartesianas, entonces el producto vectorial, ecuación B-7, se evalúa al expandir la determinante

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{B-12}$$

la cual resulta

$$\mathbf{C} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k}$$

Recuerde que el producto vectorial se utiliza en estática para definir el momento de una fuerza $\mathbf{F}$ con respecto a un punto O, en cuyo caso

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{B-13}$$

donde $\mathbf{r}$ es un vector de posición dirigido desde el punto O hasta *cualquier punto* sobre la línea de acción de $\mathbf{F}$.

Producto punto. El producto punto (escalar) de dos vectores **A** y **B,** que da un escalar, se define como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \tag{B-14}$$

y se lee **A** "punto" **B**. El ángulo θ se forma entre las *colas* de **A** y **B** ($0° \leq \theta \leq 180°$).
El producto punto es conmutativo; es decir,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \tag{B-15}$$

La ley distributiva es válida; entonces,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \tag{B-16}$$

Y la multiplicación escalar puede realizarse de cualquier manera, es decir,

$$m(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})m \tag{B-17}$$

Con la ecuación B-14 puede determinarse el producto punto entre dos vectores cartesianos cualesquiera. Por ejemplo, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = (1)(1) \cos 0° = 1$ e $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1)(1) \cos 90° = 0$.

Si **A** y **B** se expresan en forma de componentes cartesianos, entonces el producto punto, ecuación C-14, se determina con

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z} \tag{B-18}$$

El producto punto puede utilizarse para determinar el ángulo θ *formado entre dos vectores*. Según la ecuación B-14,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB}\right) \tag{B–19}$$

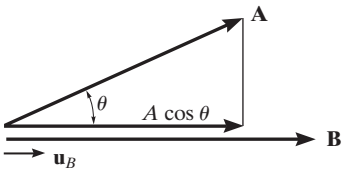


Fig. B-6

También es posible determinar *la componente de un vector en una dirección dada* con el producto punto. Por ejemplo, la magnitud de la componente (o proyección) del vector **A** en la dirección de **B** (fig. B-6) se define por $A \cos \theta$. Según la ecuación B-14, esta magnitud es

$$A \cos \theta = \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{B}}{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_B \tag{B-20}$$

donde $\mathbf{u}_B$ representa un vector unitario que actúa en la dirección de **B** (fig. B-6).

Diferenciación e integración de funciones vectoriales. Las reglas para la diferenciación e integración de las sumas y productos de funciones escalares también son válidas para funciones vectoriales. Considere, por ejemplo, las dos funciones vectoriales $\mathbf{A}(s)$ y $\mathbf{B}(s)$. Siempre que estas funciones sean uniformes y continuas con todos los valores de s, entonces

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{ds} + \frac{d\mathbf{B}}{ds} \tag{B-21}$$

$$\int (\mathbf{A} + \mathbf{B})\, ds = \int \mathbf{A}\, ds + \int \mathbf{B}\, ds \tag{B-22}$$

Para el producto vectorial,

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \left(\frac{d\mathbf{A}}{ds} \times \mathbf{B}\right) + \left(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{ds}\right) \tag{B-23}$$

Asimismo, para el producto punto,

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{ds} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} \tag{B-24}$$

APÉNDICE

C

Regla de la cadena

La regla de la cadena del cálculo se utiliza para determinar la derivada con respecto al tiempo de una función compuesta. Por ejemplo, si y es una función de x y x es una función de t, entonces podemos determinar la derivada de y con respecto a t como sigue

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{C-1}$$

En otras palabras, para determinar $\dot{y}$ consideramos la derivada común (dy/dx) y la multiplicamos por la derivada con respecto al tiempo de (dx/dt).

Si varias variables son funciones del tiempo y están multiplicadas entre sí, entonces debe utilizarse la regla del producto $d(uv) = du\ v + u\ dv$, junto con la regla de la cadena, cuando se consideren las derivadas con respecto al tiempo. Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO C-1

Si $y = x^3$ y $x = t^4$, determine $\ddot{y}$, la segunda derivada de y con respecto al tiempo.

SOLUCIÓN

Con la regla de la cadena, ecuación C-1,

$$\dot{y} = 3x^2\dot{x}$$

Para obtener la segunda derivada con respecto al tiempo, debemos utilizar la regla del producto, ya que x y $\dot{x}$ son funciones del tiempo y, además, para $3x^2$ debe aplicarse la regla de la cadena. Por lo tanto, con $u = 3x^2$ y $v = \dot{x}$, tenemos

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= [6x\dot{x}]\dot{x} + 3x^2[\ddot{x}] \\ &= 3x[2\dot{x}^2 + x\ddot{x}]\end{aligned}$$

Como $x = t^4$, entonces $\dot{x} = 4t^3$ y $\ddot{x} = 12t^2$ de modo que

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= 3(t^4)[2(4t^3)^2 + t^4(12t^2)] \\ &= 132t^{10}\end{aligned}$$

Observe que este resultado también puede obtenerse al combinar las funciones y, luego, considerar las derivadas con respecto al tiempo, es decir,

$$\begin{aligned}y &= x^3 = (t^4)^3 = t^{12} \\ \dot{y} &= 12t^{11} \\ \ddot{y} &= 132t^{10}\end{aligned}$$

EJEMPLO C-2

Si $y = xe^x$, determine $\ddot{y}$.

SOLUCIÓN

Como x y e^x son funciones del tiempo, deben aplicarse las reglas de la cadena y el producto. Considere que $u = x$ y $v = e^x$.

$$\dot{y} = [\dot{x}]e^x + x[e^x\dot{x}]$$

La segunda derivada con respecto al tiempo también requiere la aplicación de las reglas del producto y la cadena. Observe que la regla del producto se aplica a tres variables con respecto al tiempo del último término, es decir, x, e^x y $\dot{x}$.

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \{[\ddot{x}]e^x + \dot{x}[e^x\dot{x}]\} + \{[\dot{x}]e^x\dot{x} + x[e^x\dot{x}]\dot{x} + xe^x[\ddot{x}]\} \\ &= e^x[\ddot{x}(1 + x) + \dot{x}^2(2 + x)]\end{aligned}$$

Si $x = t^2$ entonces $\dot{x} = 2t$, $\ddot{x} = 2$ así que en función de t se tiene

$$\ddot{y} = e^{t^2}[2(1 + t^2) + 4t^2(2 + t^2)]$$

EJEMPLO C-3

Si la trayectoria en coordenadas radiales se da como $r = 5\theta^2$, donde θ es una función del tiempo conocida, determine $\ddot{r}$.

SOLUCIÓN

En primer lugar, con la regla de la cadena y luego con las reglas de la cadena y el producto, donde $u = 10\theta$ y $v = \dot{\theta}$, se tiene

$$\begin{aligned} r &= 5\theta^2 \\ \dot{r} &= 10\theta\dot{\theta} \\ \ddot{r} &= 10[(\dot{\theta})\dot{\theta} + \theta(\ddot{\theta})] \\ &= 10\dot{\theta}^2 + 10\theta\ddot{\theta} \end{aligned}$$

EJEMPLO C-4

Si $r^2 = 6\theta^3$, determine $\ddot{r}$

SOLUCIÓN

En este caso, las reglas de la cadena y el producto se aplican como sigue.

$$\begin{aligned} r^2 &= 6\theta^3 \\ 2r\dot{r} &= 18\theta^2\dot{\theta} \\ 2[(\dot{r})\dot{r} + r(\ddot{r})] &= 18[(2\theta\dot{\theta})\dot{\theta} + \theta^2(\ddot{\theta})] \\ \dot{r}^2 + r\ddot{r} &= 9(2\theta\dot{\theta}^2 + \theta^2\ddot{\theta}) \end{aligned}$$

Para determinar $\ddot{r}$ con un valor especificado de θ el cual es una función del tiempo conocida, primero podemos determinar $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$. A continuación, con estos valores evaluamos r con la primera ecuación, $\dot{r}$ con la segunda y $\ddot{r}$ con la última.

Soluciones parciales y respuestas a los problemas fundamentales

Capítulo 12

F12-1. $v = v_0 + a_c t$

$10 = 35 + a_c(15)$

$a_c = -1.67\ \text{m/s}^2 = 1.67\ \text{m/s}^2 \leftarrow$ *Resp.*

F12-2. $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$

$0 = 0 + 15t + \frac{1}{2}(-9.81)t^2$

$t = 3.06\ \text{s}$ *Resp.*

F12-3. $ds = v\, dt$

$$\int_0^s ds = \int_0^t \left(4t - 3t^2\right) dt$$

$s = \left(2t^2 - t^3\right)\text{m}$

$s = 2\left(4^2\right) - 4^3$

$= -32\ \text{m} = 32\ \text{m} \leftarrow$ *Resp.*

F12-4. $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0.5t^3 - 8t\right)$

$a = \left(1.5t^2 - 8\right)\ \text{m/s}^2$

Cuando $t = 2\ \text{s}$,

$a = 1.5\left(2^2\right) - 8 = -2\ \text{m/s}^2 = 2\ \text{m/s}^2 \leftarrow$ *Resp.*

F12-5. $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^2 - 8t + 6) = (4t - 8)\ \text{m/s}$

$v = 0 = (4t - 8)$

$t = 2\ \text{s}$ *Resp.*

$s|_{t=0} = 2\left(0^2\right) - 8(0) + 6 = 6\ \text{m}$

$s|_{t=2} = 2\left(2^2\right) - 8(2) + 6 = -2\ \text{m}$

$s|_{t=3} = 2\left(3^2\right) - 8(3) + 6 = 0\ \text{m}$

$(\Delta s)_{\text{Tot}} = 8\ \text{m} + 2\ \text{m} = 10\ \text{m}$ *Resp.*

F12-6. $\int v\, dv = \int a\, ds$

$$\int_{5\ \text{m/s}}^{v} v\, dv = \int_0^s (10 - 0.2s)\, ds$$

$v = \left(\sqrt{20s - 0.2s^2 + 25}\right)\ \text{m/s}$

En $s = 10\ \text{m}$,

$v = \sqrt{20(10) - 0.2(10^2) + 25}$

$= 14.3\ \text{m/s} \rightarrow$ *Resp.*

F12-7. $v = \int (4t^2 - 2)\, dt$

$v = \frac{4}{3}t^3 - 2t + C_1$

$s = \int \left(\frac{4}{3}t^3 - 2t + C_1\right) dt$

$s = \frac{1}{3}t^4 - t^2 + C_1 t + C_2$

$t = 0, s = -2, C_2 = -2$

$t = 2, s = -20, C_1 = -9.67$

$t = 4, s = 28.7\ \text{m}$ *Resp.*

F12-8. $a = v\frac{dv}{ds}$

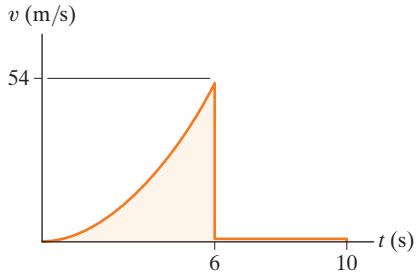
$= \left(20 - 0.05s^2\right)\left(-0.1s\right)$

En $s = 15\ \text{m}$,

$a = -13.1\ \text{m/s}^2 = 13.1\ \text{m/s}^2 \leftarrow$ *Resp.*

F12-9. $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0.5t^3\right) = 1.5t^2$

$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(108) = 0$ *Resp.*



F12-10. $ds = v\, dt$

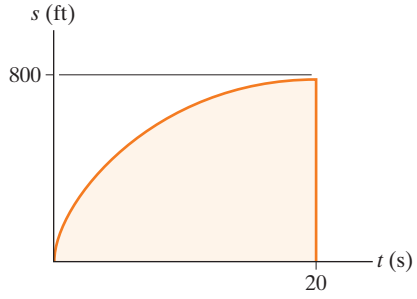
$$\int_0^s ds = \int_0^t (-4t + 80)\, dt$$

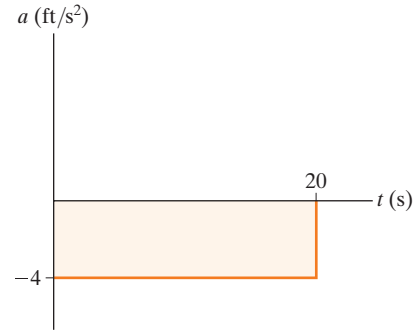
$s = -2t^2 + 80t$

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4t + 80) = -4\ \text{ft/s}^2 = 4\ \text{ft/s}^2 \leftarrow$

Además,

$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 80\ \text{ft/s}}{20\ \text{s} - 0} = -4\ \text{ft/s}^2$

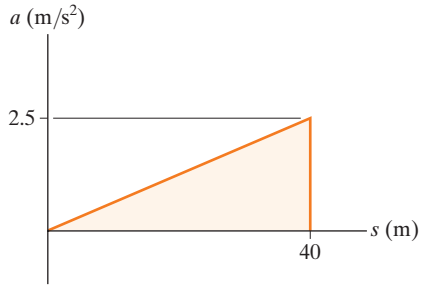




F12-11. $a\,ds = v\,dv$

$a = v\frac{dv}{ds} = 0.25s\,\frac{d}{ds}(0.25s) = 0.0625s$

$a\big|_{s=40\text{ m}} = 0.0625(40\text{ m}) = 2.5\text{ m/s}^2 \rightarrow$



F12-12. Para $0 \le s \le 10$ m

$a = s$

$\int_0^v v\,dv = \int_0^s s\,ds$

$v = s$

en $s = 10$ m, $v = 10$ m

Para $10\text{ m} \le s \le 15$

$a = 10$

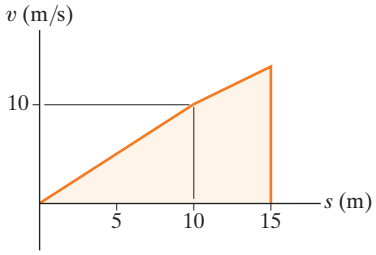
$\int_{10}^v v\,dv = \int_{10}^s 10\,ds$

$\frac{1}{2}v^2 - 50 = 10s - 100$

$v = \sqrt{20s - 100}$

en $s = 15$ m

$v = 14.1$ m/s *Resp.*



F12-13. $0 \le t < 5$ s,

$dv = a\,dt \quad \int_0^v dv = \int_0^t 20\,dt$

$v = (20t)$ m/s

$5\text{ s} < t \le t'$,

$(\pm) \quad dv = a\,dt \quad \int_{100\text{ m/s}}^v dv = \int_{5\text{ s}}^t -10\,dt$

$v - 100 = (50 - 10t)$ m/s,

$0 = 150 - 10t'$

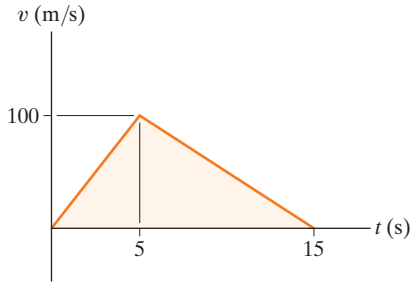
$t' = 15$ s

Además

$\Delta v = 0 =$ Área bajo la gráfica a–t

$0 = (20\text{ m/s}^2)(5\text{ s}) + [-(10\text{ m/s})(t' - 5)\text{ s}]$

$t' = 15$ s



F12-14. $0 \le t \le 5$ s,

$ds = v\,dt \quad \int_0^s ds = \int_0^t 30t\,dt$

$s\big|_0^s = 15t^2\big|_0^t$

$s = (15t^2)$ m

$5\text{ s} < t \le 15$ s,

$(\pm)\,ds = v\,dt; \quad \int_{375\text{ m}}^s ds = \int_{5\text{s}}^t (-15t + 225)dt$

$s = (-7.5t^2 + 225t - 562.5)$ m

$s = (-7.5)(15)^2 + 225(15) - 562.5$ m

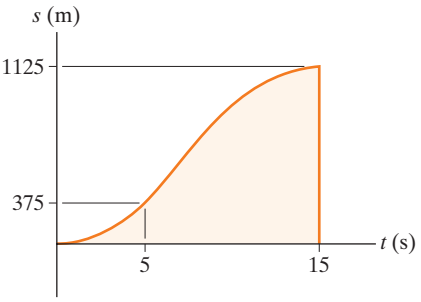
$= 1125$ m *Resp.*

Además

$\Delta s =$ Área bajo la gráfica v–t

$= \frac{1}{2}(150\text{ m/s})(15\text{ s})$

$= 1125$ m *Resp.*



F12-15. $\int_0^x dx = \int_0^t 32t\,dt$

$x = (16t^2)$ m (1)

$\int_0^y dy = \int_0^t 8\,dt$

$t = \frac{y}{8}$ (2)

Al sustituir la ecuación (2) en la ecuación (1), se obtiene

$$y = 2\sqrt{x} \qquad \textit{Resp.}$$

F12-16. $y = 0.75(8t) = 6t$

$$v_x = \dot{x} = \tfrac{dx}{dt} = \tfrac{d}{dt}(8t) = 8 \text{ m/s} \rightarrow$$

$$v_y = \dot{y} = \tfrac{dy}{dt} = \tfrac{d}{dt}(6t) = 6 \text{ m/s} \uparrow$$

La magnitud de la velocidad de la partícula es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(8 \text{ m/s})^2 + (6 \text{ m/s})^2}$$

$$= 10 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

F12-17. $y = (4t^2)$ m

$$v_x = \dot{x} = \tfrac{d}{dt}\left(4t^4\right) = \left(16t^3\right) \text{ m/s} \rightarrow$$

$$v_y = \dot{y} = \tfrac{d}{dt}\left(4t^2\right) = (8t) \text{ m/s} \uparrow$$

Cuando $t = 0.5$ s,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2 \text{ m/s})^2 + (4 \text{ m/s})^2}$$

$$= 4.47 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$a_x = \dot{v}_x = \tfrac{d}{dt}\left(16t^3\right) = \left(48t^2\right) \text{ m/s}^2$$

$$a_y = \dot{v}_y = \tfrac{d}{dt}(8t) = 8 \text{ m/s}^2$$

Cuando $t = 0.5$ s,

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(12 \text{ m/s}^2)^2 + (8 \text{ m/s}^2)^2}$$

$$= 14.4 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

F12-18. $y = 0.5x$

$$\dot{y} = 0.5\dot{x}$$

$$v_y = t^2$$

Cuando $t = 4$ s,

$$v_x = 32 \text{ m/s} \qquad v_y = 16 \text{ m/s}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 35.8 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$a_x = \dot{v}_x = 4t$$

$$a_y = \dot{v}_y = 2t$$

Cuando $t = 4$ s,

$$a_x = 16 \text{ m/s}^2 \qquad a_y = 8 \text{ m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{16^2 + 8^2} = 17.9 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

F12-19. $v_y = \dot{y} = 0.5\, x\, \dot{x} = 0.5(8)(8) = 32$ m/s

Por lo tanto,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 33.0 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$a_y = \dot{v}_y = 0.5\, \dot{x}^2 + 0.5\, x\ddot{x}$$

$$= 0.5(8)^2 + 0.5(8)(4)$$

$$= 48 \text{ m/s}^2$$

$$a_x = 4 \text{ m/s}^2$$

Por lo tanto,

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4^2 + 48^2} = 48.2 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

F12-20. $\dot{y} = 0.1x\dot{x}$

$$v_y = 0.1(5)(-3) = -1.5 \text{ m/s} = 1.5 \text{ m/s} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

$$\ddot{y} = 0.1\left[\dot{x}\dot{x} + x\ddot{x}\right]$$

$$a_y = 0.1\left[(-3)^2 + 5(-1.5)\right] = 0.15 \text{ m/s}^2 \uparrow \qquad \textit{Resp.}$$

F12-21. $(v_B)_y^2 = (v_A)_y^2 + 2a_y(y_B - y_A)$

$$0^2 = (5 \text{ m/s})^2 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)(h - 0)$$

$$h = 1.27 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

F12-22. $y_C = y_A + (v_A)_y t_{AC} + \frac{1}{2} a_y t_{AC}^2$

$$0 = 0 + (5 \text{ m/s}) t_{AC} + \tfrac{1}{2}(-9.81 \text{ m/s}^2) t_{AC}^2$$

$$t_{AC} = 1.0194 \text{ s}$$

$$(v_C)_y = (v_A)_y + a_y t_{AC}$$

$$(v_C)_y = 5 \text{ m/s} + (-9.81 \text{ m/s}^2)(1.0194 \text{ s})$$

$$= -5 \text{ m/s} = 5 \text{ m/s} \downarrow$$

$$v_C = \sqrt{(v_C)_x^2 + (v_C)_y^2}$$

$$= \sqrt{(8.660 \text{ m/s})^2 + (5 \text{ m/s})^2} = 10 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$R = x_A + (v_A)_x t_{AC} = 0 + (8.660 \text{ m/s})(1.0194 \text{ s})$$

$$= 8.83 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

F12-23. $s = s_0 + v_0 t$

$$10 = 0 + v_A \cos 30° t$$

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_c t^2$$

$$3 = 1.5 + v_A \operatorname{sen} 30° t + \tfrac{1}{2}(-9.81) t^2$$

$$t = 0.9334 \text{ s}, \quad v_A = 12.4 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

F12-24. $s = s_0 + v_0 t$

$$R\left(\tfrac{4}{5}\right) = 0 + 20\left(\tfrac{3}{5}\right) t$$

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_c t^2$$

$$-R\left(\tfrac{3}{5}\right) = 0 + 20\left(\tfrac{4}{5}\right) t + \tfrac{1}{2}(-9.81) t^2$$

$$t = 5.10 \text{ s}$$

$$R = 76.5 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

F12-25. $x_B = x_A + (v_A)_x t_{AB}$

$$12 \text{ ft} = 0 + (0.8660\, v_A) t_{AB}$$

$$v_A t_{AB} = 13.856 \qquad (1)$$

$$y_B = y_A + (v_A)_y t_{AB} + \tfrac{1}{2} a_y t_{AB}^2$$

$$(8 - 3)\,\text{ft} = 0 + 0.5v_A t_{AB} + \tfrac{1}{2}(-32.2\,\text{ft/s}^2)t_{AB}^2$$

Al usar la ecuación (1)

$$5 = 0.5(13.856) - 16.1\,t_{AB}^2$$

$$t_{AB} = 0.3461\,\text{s}$$

$$v_A = 40.0\,\text{ft/s} \qquad \textit{Resp.}$$

F12-26. $y_B = y_A + (v_A)_y t_{AB} + \tfrac{1}{2}a_y t_{AB}^2$

$$-150\,\text{m} = 0 + (90\,\text{m/s})t_{AB} + \tfrac{1}{2}(-9.81\,\text{m/s}^2)t_{AB}^2$$

$$t_{AB} = 19.89\,\text{s}$$

$$x_B = x_A + (v_A)_x t_{AB}$$

$$R = 0 + 120\,\text{m/s}(19.89\,\text{s}) = 2386.37\,\text{m}$$

$$= 2.39\,\text{km} \qquad \textit{Resp.}$$

F12-27. $a_t = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(0.0625t^2) = (0.125t)\,\text{m/s}^2\big|_{t=10\,\text{s}}$

$$= 1.25\,\text{m/s}^2$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(0.0625t^2)^2}{40\,\text{m}} = \left[97.656(10^{-6})t^4\right]\text{m/s}^2\big|_{t=10\,\text{s}}$$

$$= 0.9766\,\text{m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(1.25\,\text{m/s}^2)^2 + (0.9766\,\text{m/s}^2)^2}$$

$$= 1.59\,\text{m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

F12-28. $v = 2s\,\big|_{s=10} = 20\,\text{m/s}$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(20\,\text{m/s})^2}{50\,\text{m}} = 8\,\text{m/s}^2$$

$$a_t = v\frac{dv}{ds} = 4s\big|_{s=10} = 40\,\text{m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(40\,\text{m/s}^2)^2 + (8\,\text{m/s}^2)^2}$$

$$= 40.8\,\text{m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

F12-29. $v_C^2 = v_A^2 + 2a_t(s_C - s_A)$

$$(15\,\text{m/s})^2 = (25\,\text{m/s})^2 + 2a_t(300\,\text{m} - 0)$$

$$a_t = -0.6667\,\text{m/s}^2$$

$$v_B^2 = v_A^2 + 2a_t(s_B - s_A)$$

$$v_B^2 = (25\,\text{m/s})^2 + 2(-0.6667\,\text{m/s}^2)(250\,\text{m} - 0)$$

$$v_B = 17.08\,\text{m/s}$$

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(17.08\,\text{m/s})^2}{300\,\text{m}} = 0.9722\,\text{m/s}^2$$

$$a_B = \sqrt{(a_B)_t^2 + (a_B)_n^2}$$

$$= \sqrt{(-0.6667\,\text{m/s}^2)^2 + (0.9722\,\text{m/s}^2)^2}$$

$$= 1.18\,\text{m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

F12-30. $\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{24}x^2\right) = \frac{1}{12}x$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\tfrac{1}{12}x\right)\Big|_{x=10\,\text{ft}}$$

$$= \tan^{-1}\left(\tfrac{10}{12}\right) = 39.81^\circ = 39.8^\circ\,\text{d} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\rho = \frac{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{3/2}}{\left|d^2y/dx^2\right|} = \frac{\left[1 + \left(\frac{1}{12}x\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{1}{12}\right|}\Bigg|_{x=10\,\text{ft}}$$

$$= 26.468\,\text{ft}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(20\,\text{ft/s})^2}{26.468\,\text{ft}} = 15.11\,\text{ft/s}^2$$

$$a = \sqrt{(a_t)^2 + (a_n)^2} = \sqrt{(6\,\text{ft/s}^2)^2 + (15.11\,\text{ft/s}^2)^2}$$

$$= 16.3\,\text{ft/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

F12-31. $(a_B)_t = -0.001s = (-0.001)(300\,\text{m})\left(\tfrac{\pi}{2}\,\text{rad}\right)\text{m/s}^2$

$$= -0.4712\,\text{m/s}^2$$

$$v\,dv = a_t\,ds$$

$$\int_{25\,\text{m/s}}^{v_B} v\,dv = \int_0^{150\pi\,\text{m}} -0.001s\,ds$$

$$v_B = 20.07\,\text{m/s}$$

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(20.07\,\text{m/s})^2}{300\,\text{m}} = 1.343\,\text{m/s}^2$$

$$a_B = \sqrt{(a_B)_t^2 + (a_B)_n^2}$$

$$= \sqrt{(-0.4712\,\text{m/s}^2)^2 + (1.343\,\text{m/s}^2)^2}$$

$$= 1.42\,\text{m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

F12-32. $a_t\,ds = v\,dv$

$$a_t = v\frac{dv}{ds} = (0.2s)(0.2) = (0.04s)\,\text{m/s}^2$$

$$a_t = 0.04(50\,\text{m}) = 2\,\text{m/s}^2$$

$$v = 0.2(50\,\text{m}) = 10\,\text{m/s}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(10\text{ m/s})^2}{500\text{ m}} = 0.2\text{ m/s}^2$$
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(2\text{ m/s}^2)^2 + (0.2\text{ m/s}^2)^2}$$
$$= 2.01\text{ m/s}^2 \quad \textit{Resp.}$$

F12-33. $v_r = \dot{r} = 0$
$v_\theta = r\dot{\theta} = (400\dot{\theta})\text{ ft/s}$
$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$
$55\text{ ft/s} = \sqrt{0^2 + [(400\dot{\theta})\text{ ft/s}]^2}$
$\dot{\theta} = 0.1375\text{ rad/s}$ *Resp.*

F12-34. $r = 0.1t^3\big|_{t=1.5\text{ s}} = 0.3375\text{ m}$
$\dot{r} = 0.3t^2\big|_{t=1.5\text{ s}} = 0.675\text{ m/s}$
$\ddot{r} = 0.6t\big|_{t=1.5\text{ s}} = 0.900\text{ m/s}^2$
$\theta = 4t^{3/2}\big|_{t=1.5\text{ s}} = 7.348\text{ rad}$
$\dot{\theta} = 6t^{1/2}\big|_{t=1.5\text{ s}} = 7.348\text{ rad/s}$
$\ddot{\theta} = 3t^{-1/2}\big|_{t=1.5\text{ s}} = 2.449\text{ rad/s}^2$
$v_r = \dot{r} = 0.675\text{ m/s}$
$v_\theta = r\dot{\theta} = (0.3375\text{ m})(7.348\text{ rad/s}) = 2.480\text{ m/s}$
$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
$= (0.900\text{ m/s}^2) - (0.3375\text{ m})(7.348\text{ rad/s})^2$
$= -17.325\text{ m/s}^2$
$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (0.3375\text{ m})(2.449\text{ rad/s}^2)$
$+ 2(0.675\text{ m/s})(7.348\text{ rad/s}) = 10.747\text{ m/s}^2$
$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$
$= \sqrt{(0.675\text{ m/s})^2 + (2.480\text{ m/s})^2}$
$= 2.57\text{ m/s}$ *Resp.*
$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$
$= \sqrt{(-17.325\text{ m/s}^2)^2 + (10.747\text{ m/s}^2)^2}$
$= 20.4\text{ m/s}^2$ *Resp.*

F12-35. $r = 2\theta$
$\dot{r} = 2\dot{\theta}$
$\ddot{r} = 2\ddot{\theta}$
En $\theta = \pi/4$ rad,
$r = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\text{ ft}$
$\dot{r} = 2(3\text{ rad/s}) = 6\text{ ft/s}$
$\ddot{r} = 2(1\text{ rad/s}) = 2\text{ ft/s}^2$
$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 2\text{ ft/s}^2 - \left(\frac{\pi}{2}\text{ ft}\right)(3\text{ rad/s})^2$
$= -12.14\text{ ft/s}^2$
$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
$= \left(\frac{\pi}{2}\text{ ft}\right)(1\text{ rad/s}^2) + 2(6\text{ ft/s})(3\text{ rad/s})$
$= 37.57\text{ ft/s}^2$
$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$
$= \sqrt{(-12.14\text{ ft/s}^2)^2 + (37.57\text{ ft/s}^2)^2}$
$= 39.5\text{ ft/s}^2$ *Resp.*

F12-36. $r = e^\theta$
$\dot{r} = e^\theta\dot{\theta}$
$\ddot{r} = e^\theta\ddot{\theta} + e^\theta\dot{\theta}^2$
$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = (e^\theta\ddot{\theta} + e^\theta\dot{\theta}^2) - e^\theta\dot{\theta}^2 = e^{\pi/4}(4)$
$= 8.77\text{ m/s}^2$ *Resp.*
$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (e^\theta\ddot{\theta}) + (2(e^\theta\dot{\theta})\dot{\theta}) = e^\theta(\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2)$
$= e^{\pi/4}(4 + 2(2)^2)$
$= 26.3\text{ m/s}^2$ *Resp.*

F12-37. $r = [0.2(1 + \cos\theta)]\text{ m}\big|_{\theta=30°} = 0.3732\text{ m}$
$\dot{r} = \left[-0.2\,(\text{sen}\,\theta)\dot{\theta}\right]\text{ m/s}\big|_{\theta=30°}$
$= -0.2\text{ sen }30°(3\text{ rad/s})$
$= -0.3\text{ m/s}$
$v_r = \dot{r} = -0.3\text{ m/s}$
$v_\theta = r\dot{\theta} = (0.3732\text{ m})(3\text{ rad/s}) = 1.120\text{ m/s}$
$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{(-0.3\text{ m/s})^2 + (1.120\text{ m/s})^2}$
$= 1.16\text{ m/s}$ *Resp.*

F12-38. $30\text{ m} = r\,\text{sen}\,\theta$
$r = \left(\frac{30\text{ m}}{\text{sen}\,\theta}\right) = (30\csc\theta)\text{ m}$
$r = (30\csc\theta)\big|_{\theta=45°} = 42.426\text{ m}$
$\dot{r} = -30\csc\theta\,\text{ctn}\,\theta\,\dot{\theta}\big|_{\theta=45°} = -\left(42.426\dot{\theta}\right)\text{ m/s}$
$v_r = \dot{r} = -(42.426\dot{\theta})\text{ m/s}$
$v_\theta = r\dot{\theta} = (42.426\dot{\theta})\text{ m/s}$
$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$
$2 = \sqrt{(-42.426\dot{\theta})^2 + (42.426\dot{\theta})^2}$
$\dot{\theta} = 0.0333\text{ rad/s}$ *Resp.*

F12-39. $l_T = 3s_D + s_A$
$0 = 3v_D + v_A$
$0 = 3v_D + 3\text{ m/s}$
$v_D = -1\text{ m/s} = 1\text{ m/s}\uparrow$ *Resp.*

F12-40. $s_B + 2s_A + 2h = l$
$v_B + 2v_A = 0$
$6 + 2v_A = 0 \quad v_A = -3 \text{ m/s} = 3 \text{ m/s} \uparrow$ *Resp.*

F12-41. $3s_A + s_B = l$
$3v_A + v_B = 0$
$3v_A + 1.5 = 0 \quad v_A = -0.5 \text{ m/s} = 0.5 \text{ m/s} \uparrow$ *Resp.*

F12-42. $l_T = 4\,s_A + s_F$
$0 = 4\,v_A + v_F$
$0 = 4\,v_A + 3 \text{ m/s}$
$v_A = -0.75 \text{ m/s} = 0.75 \text{ m/s} \uparrow$ *Resp.*

F12-43. $s_A + 2(s_A - a) + (s_A - s_P) = l$
$4s_A - s_P = l + 2a$
$4v_A - v_P = 0$
$4v_A - (-4) = 0$
$4v_A + 4 = 0 \quad v_A = -1 \text{ m/s} = 1 \text{ m/s} \nearrow$ *Resp.*

F12-44. $s_C + s_B = l_{CED}$ (1)
$(s_A - s_C) + (s_B - s_C) + s_B = l_{ACDF}$
$s_A + 2s_B - 2s_C = l_{ACDF}$ (2)
Por lo tanto,
$v_C + v_B = 0$
$v_A + 2v_B - 2v_C = 0$
Al eliminar v_C,
$v_A + 4v_B = 0$
Por lo tanto,
$4 \text{ ft/s} + 4v_B = 0$
$v_B = -1 \text{ ft/s} = 1 \text{ ft/s} \uparrow$ *Resp.*

F12-45. $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$
$100\mathbf{i} = 80\mathbf{j} + \mathbf{v}_{B/A}$
$\mathbf{v}_{B/A} = 100\mathbf{i} - 80\mathbf{j}$
$v_{B/A} = \sqrt{(v_{B/A})_x^2 + (v_{B/A})_y^2}$
$= \sqrt{(100 \text{ km/h})^2 + (-80 \text{ km/h})^2}$
$= 128 \text{ km/h}$ *Resp.*
$\theta = \tan^{-1}\left[\dfrac{(v_{B/A})_y}{(v_{B/A})_x}\right] = \tan^{-1}\left(\dfrac{80 \text{ km/h}}{100 \text{ km/h}}\right) = 38.7° \searrow$ *Resp.*

F12-46. $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$
$(-400\mathbf{i} - 692.82\mathbf{j}) = (650\mathbf{i}) + \mathbf{v}_{B/A}$
$\mathbf{v}_{B/A} = [-1050\mathbf{i} - 692.82\mathbf{j}] \text{ km/h}$
$v_{B/A} = \sqrt{(v_{B/A})_x^2 + (v_{B/A})_y^2}$
$= \sqrt{(1050 \text{ km/h})^2 + (692.82 \text{ km/h})^2}$
$= 1258 \text{ km/h}$ *Resp.*
$\theta = \tan^{-1}\left[\dfrac{(v_{B/A})_y}{(v_{B/A})_x}\right] = \tan^{-1}\left(\dfrac{692.82 \text{ km/h}}{1050 \text{ km/h}}\right) = 33.4° \swarrow$ *Resp.*

F12-47. $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$
$(5\mathbf{i} + 8.660\mathbf{j}) = (12.99\mathbf{i} + 7.5\mathbf{j}) + \mathbf{v}_{B/A}$
$\mathbf{v}_{B/A} = [-7.990\mathbf{i} + 1.160\mathbf{j}] \text{ m/s}$
$v_{B/A} = \sqrt{(-7.990 \text{ m/s})^2 + (1.160 \text{ m/s})^2}$
$= 8.074 \text{ m/s}$
$d_{AB} = v_{B/A}t = (8.074 \text{ m/s})(4 \text{ s}) = 32.3 \text{ m}$ *Resp.*

F12-48. $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$
$-20 \cos 45°\mathbf{i} + 20 \operatorname{sen} 45°\mathbf{j} = 65\mathbf{i} + \mathbf{v}_{A/B}$
$\mathbf{v}_{A/B} = -79.14\mathbf{i} + 14.14\mathbf{j}$
$v_{A/B} = \sqrt{(-79.14)^2 + (14.14)^2}$
$= 80.4 \text{ km/h}$ *Resp.*
$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}$
$\dfrac{(20)^2}{0.1} \cos 45°\mathbf{i} + \dfrac{(20)^2}{0.1} \operatorname{sen} 45°\mathbf{j} = 1200\mathbf{i} + \mathbf{a}_{A/B}$
$\mathbf{a}_{A/B} = 1628\mathbf{i} + 2828\mathbf{j}$
$a_{A/B} = \sqrt{(1628)^2 + (2828)^2}$
$= 3.26(10^3) \text{ km/h}^2$ *Resp.*

Capítulo 13

F13-1. $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$
$6 \text{ m} = 0 + 0 + \frac{1}{2} a(3 \text{ s})^2$
$a = 1.333 \text{ m/s}^2$
$\Sigma F_y = ma_y; \quad N_A - 20(9.81) \text{ N} \cos 30° = 0$
$N_A = 169.91 \text{ N}$
$\Sigma F_x = ma_x; \quad T - 20(9.81) \text{ N} \operatorname{sen} 30°$
$- 0.3(169.91 \text{ N}) = (20 \text{ kg})(1.333 \text{ m/s}^2)$
$T = 176 \text{ N}$ *Resp.*

F13-2. $(F_f)_{\text{máx}} = \mu_s N_A = 0.3(245.25 \text{ N}) = 73.575 \text{ N}.$
Como $F = 100 \text{ N} > (F_f)_{\text{máx}}$ cuando $t = 0$, la caja comenzará a moverse inmediatamente después de aplicar **F**.
$+\uparrow \Sigma F_y = ma_y; \quad N_A - 25(9.81) \text{ N} = 0$
$N_A = 245.25 \text{ N}$
$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x;$
$10t^2 + 100 - 0.25(245.25 \text{ N}) = (25 \text{ kg})a$
$a = (0.4t^2 + 1.5475) \text{ m/s}^2$
$dv = a\,dt$
$\int_0^v dv = \int_0^{4 \text{ s}} (0.4t^2 + 1.5475)\,dt$
$v = 14.7 \text{ m/s} \rightarrow$ *Resp.*

F13-3. $\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ma_x;$

$\left(\frac{4}{5}\right)500\text{ N} - (500s)\text{N} = (10\text{ kg})a$

$a = (40 - 50s)\text{ m/s}^2$

$v\,dv = a\,ds$

$\int_0^v v\,dv = \int_0^{0.5\text{ m}} (40 - 50s)\,ds$

$\frac{v^2}{2}\Big|_0^v = \left(40s - 25s^2\right)\Big|_0^{0.5\text{ m}}$

$v = 5.24\text{ m/s}$ *Resp.*

F13-4. $\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ma_x \quad 100(s+1)\text{ N} = (2000\text{ kg})a$

$a = (0.05(s+1))\text{ m/s}^2$

$v\,dv = a\,ds$

$\int_0^v v\,dv = \int_0^{10\text{ m}} 0.05(s+1)\,ds$

$v = 2.45\text{ m/s}$

F13-5. $F_{sp} = k(l - l_0) = (200\text{ N/m})(0.5\text{ m} - 0.3\text{ m})$

$= 40\text{ N}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0.3\text{ m}}{0.4\text{ m}}\right) = 36.86°$

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ma_x;$

$100\text{ N} - (40\text{ N})\cos 36.86° = (25\text{ kg})a$

$a = 2.72\text{ m/s}^2$

F13-6. Bloques A y B:

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ma_x;\ 6 = \frac{70}{32.2}a;\ a = 2.76\text{ ft/s}^2$

Compruebe si ocurre deslizamiento entre A y B.

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ma_x;\ 6 - F = \frac{20}{32.2}(2.76);$

$F = 4.29\text{ lb} < 0.4(20) = 8\text{ lb}$

$a_A = a_B = 2.76\text{ ft/s}^2$ *Resp.*

F13-7. $\Sigma F_n = m\frac{v^2}{\rho};\ (0.3)m(9.81) = m\frac{v^2}{2}$

$v = 2.43\text{ m/s}$ *Resp.*

F13-8. $+\downarrow\Sigma F_n = ma_n;\ m(32.2) = m\left(\frac{v^2}{250}\right)$

$v = 89.7\text{ ft/s}$ *Resp.*

F13-9. $+\downarrow\Sigma F_n = ma_n;\ 150 + N_p = \frac{150}{32.2}\left(\frac{(120)^2}{400}\right)$

$N_p = 17.7\text{ lb}$ *Resp.*

F13-10. $\overset{+}{\leftarrow}\Sigma F_n = ma_n;$

$N_c\,\text{sen}\,30° + 0.2\,N_c\cos 30° = m\frac{v^2}{500}$

$+\uparrow\Sigma F_b = 0;$

$N_c\cos 30° - 0.2N_c\,\text{sen}\,30° - m(32.2) = 0$

$v = 119\text{ ft/s}$ *Resp.*

F13-11. $\Sigma F_t = ma_t;\quad 10(9.81)\text{ N}\cos 45° = (10\text{ kg})a_t$

$a_t = 6.94\text{ m/s}^2$ *Resp.*

$\Sigma F_n = ma_n;$

$T - 10(9.81)\text{ N}\,\text{sen}\,45° = (10\text{ kg})\frac{(3\text{ m/s})^2}{2\text{ m}}$

$T = 114\text{ N}$ *Resp.*

F13-12. $\Sigma F_n = ma_n;$

$F_n = (500\text{ kg})\frac{(15\text{ m/s})^2}{200\text{ m}} = 562.5\text{ N}$

$\Sigma F_t = ma_t;$

$F_t = (500\text{ kg})(1.5\text{ m/s}^2) = 750\text{ N}$

$F = \sqrt{F_n^2 + F_t^2} = \sqrt{(562.5\text{ N})^2 + (750\text{ N})^2}$

$= 938\text{ N}$ *Resp.*

F13-13. $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - (1.5\text{ m} + (8\text{ m})\text{sen}\,45°)\dot{\theta}^2$

$= (-7.157\,\dot{\theta}^2)\text{ m/s}^2$

$\Sigma F_z = ma_z;$

$T\cos 45° - m(9.81) = m(0) \quad T = 13.87\,m$

$\Sigma F_r = ma_r;$

$-(13.87m)\,\text{sen}\,45° = m(-7.157\,\dot{\theta}^2)$

$\dot{\theta} = 1.17\text{ rad/s}$ *Resp.*

F13-14. $\theta = \pi t^2\big|_{t=0.5\text{ s}} = (\pi/4)\text{ rad}$

$\dot{\theta} = 2\pi t\big|_{t=0.5\text{ s}} = \pi\text{ rad/s}$

$\ddot{\theta} = 2\pi\text{ rad/s}^2$

$r = 0.6\,\text{sen}\,\theta\big|_{\theta=\pi/4\text{ rad}} = 0.4243\text{ m}$

$\dot{r} = 0.6\,(\cos\theta)\dot{\theta}\big|_{\theta=\pi/4\text{ rad}} = 1.3329\text{ m/s}$

$\ddot{r} = 0.6\,[(\cos\theta)\ddot{\theta} - (\text{sen}\theta)\dot{\theta}^2]\big|_{\theta=\pi/4\text{ rad}} = -1.5216\text{ m/s}^2$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -1.5216\text{ m/s}^2 - (0.4243\text{ m})(\pi\text{ rad/s})^2$

$= -5.7089\text{ m/s}^2$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta} = 0.4243\text{ m}(2\pi\text{ rad/s}^2)$

$+ 2(1.3329\text{ m/s})(\pi\text{ rad/s})$

$= 11.0404\text{ m/s}^2$

$\Sigma F_r = ma_r;$

$F\cos 45° - N\cos 45° - 0.2(9.81)\cos 45°$

$= 0.2(-5.7089)$

$\Sigma F_\theta = ma_\theta;$

$F\,\text{sen}\,45° + N\,\text{sen}\,45° - 0.2(9.81)\,\text{sen}\,45°$

$= 0.2(11.0404)$

$N = 2.37\text{ N} \qquad F = 2.72\text{ N}$ *Resp.*

F13-15. $r = 50e^{2\theta}\big|_{\theta=\pi/6\text{ rad}} = \left[50e^{2(\pi/6)}\right]\text{ m} = 142.48\text{ m}$

$\dot{r} = 50\left(2e^{2\theta}\dot{\theta}\right) = 100e^{2\theta}\dot{\theta}\big|_{\theta=\pi/6\text{ rad}}$

$= \left[100e^{2(\pi/6)}(0.05)\right] = 14.248\text{ m/s}$

$\ddot{r} = 100\left((2e^{2\theta}\dot{\theta})\dot{\theta} + e^{2\theta}(\ddot{\theta})\right)\big|_{\theta=\pi/6\text{ rad}}$

$= 100\left[2e^{2(\pi/6)}(0.05^2) + e^{2(\pi/6)}(0.01)\right]$

$= 4.274\text{ m/s}^2$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 4.274\text{ m/s}^2 - 142.48\text{ m}(0.05\text{ rad/s})^2$

$= 3.918\text{ m/s}^2$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 142.48\text{ m}(0.01\text{ rad/s}^2)$

$+ 2(14.248\text{ m/s})(0.05\text{ rad/s})$

$= 2.850\text{ m/s}^2$

$\Sigma F_r = ma_r;$

$F_r = (2000\text{ kg})(3.918\text{ m/s}^2) = 7836.55\text{ N}$

$\Sigma F_\theta = ma_\theta;$

$F_\theta = (2000\text{ kg})(2.850\text{ m/s}^2) = 5699.31\text{ N}$

$F = \sqrt{F_r^2 + F_\theta^2}$

$= \sqrt{(7836.55\text{ N})^2 + (5699.31\text{ N})^2}$

$= 9689.87\text{ N} = 9.69\text{ kN}$

F13-16. $r = (0.6\cos 2\theta)\text{ m}\big|_{\theta=0^\circ} = [0.6\cos 2(0^\circ)]\text{ m} = 0.6\text{ m}$

$\dot{r} = (-1.2\,\text{sen}2\theta\dot{\theta})\text{ m/s}\big|_{\theta=0^\circ}$

$= \left[-1.2\,\text{sen}2(0^\circ)(-3)\right]\text{ m/s} = 0$

$\ddot{r} = -1.2\left(\text{sen}2\theta\ddot{\theta} + 2\cos 2\theta\dot{\theta}^2\right)\text{ m/s}^2\big|_{\theta=0^\circ}$

$= -21.6\text{ m/s}^2$

Por lo tanto,

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -21.6\text{ m/s}^2 - 0.6\text{ m}(-3\text{ rad/s})^2$

$= -27\text{ m/s}^2$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0.6\text{ m}(0) + 2(0)(-3\text{ rad/s}) = 0$

$\Sigma F_\theta = ma_\theta; \quad F - 0.2(9.81)\text{ N} = 0.2\text{ kg}(0)$

$F = 1.96\text{ N}\uparrow$ *Resp.*

Capítulo 14

F14-1. $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$0 + \left(\frac{4}{5}\right)(500\text{ N})(0.5\text{ m}) - \frac{1}{2}(500\text{ N/m})(0.5\text{ m})^2$

$= \frac{1}{2}(10\text{ kg})v^2$

$v = 5.24\text{ m/s}$ *Resp.*

F14-2. $\Sigma F_y = ma_y;\ N_A - 20(9.81)\text{ N}\cos 30^\circ = 0$

$N_A = 169.91\text{ N}$

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$0 + 300\text{ N}(10\text{ m}) - 0.3(169.91\text{ N})(10\text{ m})$

$- 20(9.81)\text{N}(10\text{ m})\,\text{sen}\,30^\circ$

$= \frac{1}{2}(20\text{ kg})v^2$

$v = 12.3\text{ m/s}$ *Resp.*

F14-3. $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$0 + 2\left[\int_0^{15\text{ m}} (600 + 2s^2)\text{ N}\,ds\right] - 100(9.81)\text{ N}(15\text{ m})$

$= \frac{1}{2}(100\text{ kg})v^2$

$v = 12.5\text{ m/s}$ *Resp.*

F14-4. $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$\frac{1}{2}(1800\text{ kg})(125\text{ m/s})^2 - \left[\frac{(50\,000\text{ N} + 20\,000\text{ N})}{2}(400\text{ m})\right]$

$= \frac{1}{2}(1800\text{ kg})v^2$

$v = 8.33\text{ m/s}$ *Resp.*

F14-5. $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$\frac{1}{2}(10\text{ kg})(5\text{ m/s})^2 + 100\text{ N}s' + [10(9.81)\text{ N}]\,s'\,\text{sen}\,30^\circ$

$-\frac{1}{2}(200\text{ N/m})(s')^2 = 0$

$s' = 2.09\text{ m}$

$s = 0.6\text{ m} + 2.09\text{ m} = 2.69\text{ m}$ *Resp.*

F14-6. $T_A + \Sigma U_{A-B} = T_B$

Considere la diferencia de la longitud de la cuerda $AC - BC$, que es la distancia F que recorre.

$0 + 10\text{ lb}(\sqrt{(3\text{ ft})^2 + (4\text{ ft})^2} - 3\text{ ft})$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{32.2}\text{ slug}\right)v_B^2$

$v_B = 16.0\text{ ft/s}$ *Resp.*

F14-7. $\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ma_x;$

$30\left(\frac{4}{5}\right) = 20a \quad a = 1.2\text{ m/s}^2\ \rightarrow$

$v = v_0 + a_c t$

$v = 0 + 1.2(4) = 4.8\text{ m/s}$

$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = F(\cos\theta)v$

$= 30\left(\frac{4}{5}\right)(4.8)$

$= 115\text{ W}$ *Resp.*

F14-8. $\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ma_x;$

$10s = 20a \quad a = 0.5s\text{ m/s}^2\ \rightarrow$

$v\,dv = a\,ds$

$\int_1^v v\,dv = \int_0^{5\text{ m}} 0.5\,s\,ds$

$v = 3.674\text{ m/s}$

$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = [10(5)](3.674) = 184\text{ W}$ *Resp.*

F14-9. $(+\uparrow)\Sigma F_y = 0;$
$T_1 - 100\text{ lb} = 0 \quad T_1 = 100\text{ lb}$
$(+\uparrow)\Sigma F_y = 0;$
$100\text{ lb} + 100\text{ lb} - T_2 = 0 \quad T_2 = 200\text{ lb}$
$P_{\text{sal}} = \mathbf{T}_B \cdot \mathbf{v}_B = (200\text{ lb})(3\text{ ft/s}) = 1.091\text{ hp}$
$P_{\text{ent}} = \dfrac{P_{\text{sal}}}{\varepsilon} = \dfrac{1.091\text{ hp}}{0.8} = 1.36\text{ hp}$ *Resp.*

F14-10. $\Sigma F_{y'} = ma_{y'};\ N - 20(9.81)\cos 30° = 20(0)$
$N = 169.91\text{ N}$
$\Sigma F_{x'} = ma_{x'};$
$F - 20(9.81)\,\text{sen}\,30° - 0.2(169.91) = 0$
$F = 132.08\text{ N}$
$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = 132.08(5) = 660\text{ W}$ *Resp.*

F14-11. $+\uparrow\Sigma F_y = ma_y;$
$T - 50(9.81) = 50(0) \quad T = 490.5\text{ N}$
$P_{\text{sal}} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{v} = 490.5(1.5) = 735.75\text{ W}$
Además, para un punto sobre el otro cable
$P_{\text{sal}} = \left(\dfrac{490.5}{2}\right)(1.5)(2) = 735.75\text{ W}$
$P_{\text{ent}} = \dfrac{P_{\text{sal}}}{\varepsilon} = \dfrac{735.75}{0.8} = 920\text{ W}$ *Resp.*

F14-12. $2s_A + s_P = l$
$2a_A + a_P = 0$
$2a_A + 6 = 0$
$a_A = -3\text{ m/s}^2 = 3\text{ m/s}^2\uparrow$
$\Sigma F_y = ma_y; \quad T_A - 490.5\text{ N} = (50\text{ kg})(3\text{ m/s}^2)$
$T_A = 640.5\text{ N}$
$P_{\text{sal}} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{v} = (640.5\text{ N}/2)(12) = 3843\text{ W}$
$P_{\text{ent}} = \dfrac{P_{\text{sal}}}{\varepsilon} = \dfrac{3843}{0.8} = 4803.75\text{ W} = 4.80\text{ kW}$ *Resp.*

F14-13. $T_A + V_A = T_B + V_B$
$0 + 2(9.81)(1.5) = \frac{1}{2}(2)(v_B)^2 + 0$
$v_B = 5.42\text{ m/s}$ *Resp.*
$+\uparrow\Sigma F_n = ma_n;\ T - 2(9.81) = 2\left(\dfrac{(5.42)^2}{1.5}\right)$
$T = 58.9\text{ N}$ *Resp.*

F14-14. $T_A + V_A = T_B + V_B$
$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}m_B v_B^2 + mgh_B$
$\left[\frac{1}{2}(2\text{ kg})(1\text{ m/s})^2\right] + [2(9.81)\text{ N}(4\text{ m})]$
$= \left[\frac{1}{2}(2\text{ kg})v_B^2\right] + [0]$
$v_B = 8.915\text{ m/s} = 8.92\text{ m/s}$ *Resp.*
$+\uparrow\Sigma F_n = ma_n; \quad N_B - 2(9.81)\text{ N}$
$= (2\text{ kg})\left(\dfrac{(8.915\text{ m/s})^2}{2\text{ m}}\right)$
$N_B = 99.1\text{ N}$ *Resp.*

F14-15. $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$
$\frac{1}{2}(2)(4)^2 + \frac{1}{2}(30)(2-1)^2$
$= \frac{1}{2}(2)(v)^2 - 2(9.81)(1) + \frac{1}{2}(30)(\sqrt{5}-1)^2$
$v = 5.26\text{ m/s}$ *Resp.*

F14-16. $T_A + V_A = T_B + V_B$
$0 + \frac{1}{2}(4)(2.5-0.5)^2 + 5(2.5)$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{32.2}\right)v_B^2 + \frac{1}{2}(4)(1-0.5)^2$
$v_B = 16.0\text{ ft/s}$ *Resp.*

F14-17. $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$
$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 + \frac{1}{2}ks_1^2$
$= \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 + \frac{1}{2}ks_2^2$
$[0] + [0] + [0] = [0] +$
$[-75\text{ lb}(5\text{ ft} + s)] + \left[2\left(\frac{1}{2}(1000\text{ lb/ft})s^2\right)\right.$
$\left. + \frac{1}{2}(1500\text{ lb/ft})(s - 0.25\text{ ft})^2\right]$
$s = s_A = s_C = 0.580\text{ ft}$ *Resp.*
Además,
$s_B = 0.5803\text{ ft} - 0.25\text{ ft} = 0.330\text{ ft}$ *Resp.*

F14-18. $T_A + V_A = T_B + V_B$
$\frac{1}{2}mv_A^2 + \left(\frac{1}{2}ks_A^2 + mgy_A\right)$
$= \frac{1}{2}mv_B^2 + \left(\frac{1}{2}ks_B^2 + mgy_B\right)$
$\frac{1}{2}(4\text{ kg})(2\text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(400\text{ N/m})(0.1\text{ m} - 0.2\text{ m})^2 + 0$
$= \frac{1}{2}(4\text{ kg})v_B^2 + \frac{1}{2}(400\text{ N/m})(\sqrt{(0.4\text{ m})^2 + (0.3\text{ m})^2}$
$- 0.2\text{ m})^2 + [4(9.81)\text{ N}](-(0.1\text{ m} + 0.3\text{ m}))$
$v_B = 1.962\text{ m/s} = 1.96\text{ m/s}$ *Resp.*

Chapter 15

F15-1. $(\overset{+}{\rightarrow})\quad m(v_1)_x + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_x\,dt = m(v_2)_x$
$(0.5\text{ kg})(25\text{ m/s})\cos 45° - \int F_x\,dt$
$= (0.5\text{ kg})(10\text{ m/s})\cos 30°$
$I_x = \int F_x\,dt = 4.509\text{ N}\cdot\text{s}$
$(+\uparrow)\quad m(v_1)_y + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_y\,dt = m(v_2)_y$
$-(0.5\text{ kg})(25\text{ m/s})\,\text{sen}\,45° + \int F_y\,dt$
$= (0.5\text{ kg})(10\text{ m/s})\,\text{sen}\,30°$
$I_y = \int F_y\,dt = 11.339\text{ N}\cdot\text{s}$
$I = \int F\,dt = \sqrt{(4.509\text{ N}\cdot\text{s})^2 + (11.339\text{ N}\cdot\text{s})^2}$
$= 12.2\text{ N}\cdot\text{s}$ *Resp.*

F15-2. $(+\uparrow)\quad m(v_1)_y + \Sigma \int_{t1}^{t2} F_y\,dt = m(v_2)_y$

$0 + N(4\text{ s}) + (100\text{ lb})(4\text{ s})\text{sen }30° - (150\text{ lb})(4\text{ s}) = 0$

$N = 100\text{ lb}$

$(\pm\rightarrow)\quad m(v_1)_x + \Sigma \int_{t1}^{t2} F_x\,dt = m(v_2)_x$

$0 + (100\text{ lb})(4\text{ s})\cos 30° - 0.2(100\text{ lb})(4\text{ s}) = \left(\frac{150}{32.2}\text{ slug}\right) v$

$v = 57.2\text{ ft/s}$ *Resp.*

F15-3. Tiempo para que se inicie el movimiento.

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad N - 25(9.81)\text{ N} = 0 \quad N = 245.25\text{ N}$

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad 20t^2 - 0.3(245.25\text{ N}) = 0 \quad t = 1.918\text{ s}$

$(\pm\rightarrow)\quad m(v_1)_x + \Sigma \int_{t1}^{t2} F_x\,dt = m(v_2)_x$

$0 + \int_{1.918\text{ s}}^{4\text{ s}} 20t^2\,dt - (0.25(245.25\text{ N}))(4\text{ s} - 1.918\text{ s}) = (25\text{ kg})v$

$v = 10.1\text{ m/s}$ *Resp.*

F15-4. $(\pm\rightarrow)\quad m(v_1)_x + \Sigma \int_{t1}^{t2} F_x\,dt = m(v_2)_x$

$(1500\text{ kg})(0) + \left[\frac{1}{2}(6000\text{ N})(2\text{ s}) + (6000\text{ N})(6\text{ s} - 2\text{ s})\right] = (1500\text{ kg})\,v$

$v = 20\text{ m/s}$ *Resp.*

F15-5. Vehículo deportivo utilitario y remolque,

$m(v_1)_x + \Sigma \int_{t1}^{t2} F_x\,dt = m(v_2)_x$

$0 + (9000\text{ N})(20\text{ s}) = (1500\text{ kg} + 2500\text{ kg})v$

$v = 45.0\text{ m/s}$ *Resp.*

Remolque,

$m(v_1)_x + \Sigma \int_{t1}^{t2} F_x\,dt = m(v_2)_x$

$0 + T(20\text{ s}) = (1500\text{ kg})(45.0\text{ m/s})$

$T = 3375\text{ N} = 3.375\text{ kN}$ *Resp.*

F15-6. Bloque B:

$(+\downarrow) mv_1 + \int F\,dt = mv_2$

$0 + 8(5) - T(5) = \frac{8}{32.2}(1)$

$T = 7.95\text{ lb}$ *Resp.*

Bloque A:

$(\overset{+}{\rightarrow}) mv_1 + \int F\,dt = mv_2$

$0 + 7.95(5) - \mu_k(10)(5) = \frac{10}{32.2}(1)$

$\mu_k = 0.789$ *Resp.*

F15-7. $(\pm\rightarrow)\quad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2$

$(20(10^3)\text{ kg})(3\text{ m/s}) + (15(10^3)\text{ kg})(-1.5\text{ m/s}) = (20(10^3)\text{ kg})(v_A)_2 + (15(10^3)\text{ kg})(2\text{ m/s})$

$(v_A)_2 = 0.375\text{ m/s} \rightarrow$ *Resp.*

$(\pm\rightarrow)\quad m(v_B)_1 + \Sigma \int_{t1}^{t2} F\,dt = m(v_B)_2$

$(15(10^3)\text{ kg})(-1.5\text{ m/s}) + F_{\text{prom}}(0.5\text{ s}) = (15(10^3)\text{ kg})(2\text{ m/s})$

$F_{\text{prom}} = 105(10^3)\text{ N} = 105\text{ kN}$ *Resp.*

F15-8. $(\pm\rightarrow)\quad m_p[(v_p)_1]_x + m_c[(v)_1]_x = (m_p + m_c)v_2$

$5\left[10\left(\frac{4}{5}\right)\right] + 0 = (5 + 20)v_2$

$v_2 = 1.6\text{ m/s}$ *Resp.*

F15-9. $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$\frac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 + (V_g)_1 = \frac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 + (V_g)_2$

$\frac{1}{2}(5)(5)^2 + 5(9.81)(1.5) = \frac{1}{2}(5)(v_A)_2^2 + 0$

$(v_A)_2 = 7.378\text{ m/s}$

$(\pm\leftarrow)\quad m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 = (m_A + m_B)v$

$5(7.378) + 0 = (5 + 8)v$

$v = 2.84\text{ m/s}$ *Resp.*

F15-10. $(\pm\rightarrow)\quad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2$

$0 + 0 = 10(v_A)_2 + 15(v_B)_2 \qquad (1)$

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$\frac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 + \frac{1}{2}m_B(v_B)_1^2 + (V_e)_1 = \frac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}m_B(v_B)_2^2 + (V_e)_2$

$0 + 0 + \frac{1}{2}\left[5\left(10^3\right)\right](0.2^2) = \frac{1}{2}(10)(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}(15)(v_B)_2^2 + 0$

$5(v_A)_2^2 + 7.5(v_B)_2^2 = 100 \qquad (2)$

Al resolver las ecuaciones (1) y (2),

$(v_B)_2 = 2.31\text{ m/s} \rightarrow$ *Resp.*

$(v_A)_2 = -3.464\text{ m/s} = 3.46\text{ m/s} \leftarrow$ *Resp.*

F15-11. $(\pm\leftarrow)\quad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = (m_A + m_B)v_2$

$0 + 10(15) = (15 + 10)v_2$

$v_2 = 6\text{ m/s}$

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$\frac{1}{2}(m_A + m_B)v_2^2 + (V_e)_2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_3^2 + (V_e)_3$

$\frac{1}{2}(15 + 10)\left(6^2\right) + 0 = 0 + \frac{1}{2}\left[10\left(10^3\right)\right]s_{\text{máx}}^2$

$s_{\text{máx}} = 0.3\text{ m} = 300\text{ mm}$ *Resp.*

F15-12. $(\stackrel{+}{\rightarrow})\quad 0 + 0 = m_p(v_p)_x - m_c v_c$

$0 = (20\text{ kg})\,(v_p)_x - (250\text{ kg})v_c$

$(v_p)_x = 12.5\,v_c \qquad (1)$

$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{p/c}$

$(v_p)_x\mathbf{i} + (v_p)_y\mathbf{j} = -v_c\mathbf{i} + [(400\text{ m/s})\cos 30°\mathbf{i} + (400\text{ m/s})\,\text{sen}\,30°\mathbf{j}]$

$(v_p)_x\mathbf{i} + (v_p)_y\mathbf{j} = (346.41 - v_c)\mathbf{i} + 200\mathbf{j}$

$(v_p)_x = 346.41 - v_c$

$(v_p)_y = 200\text{ m/s}$

$(v_p)_x = 320.75\text{ m/s} \quad v_c = 25.66\text{ m/s}$

$v_p = \sqrt{(v_p)_x^2 + (v_p)_y^2}$

$= \sqrt{(320.75\text{ m/s})^2 + (200\text{ m/s})^2}$

$= 378\text{ m/s}$ *Resp.*

F15-13. $(\stackrel{+}{\rightarrow})\quad e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

$= \dfrac{(9\text{ m/s}) - (1\text{ m/s})}{(8\text{ m/s}) - (-2\text{ m/s})} = 0.8$

F15-14. $(\stackrel{+}{\rightarrow})\quad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2$

$[15(10^3)\text{ kg}](5\text{ m/s}) + [25(10^3)](-7\text{ m/s}) = [15(10^3)\text{ kg}](v_A)_2 + [25(10^3)](v_B)_2$

$15(v_A)_2 + 25(v_B)_2 = -100 \qquad (1)$

Con la ecuación del coeficiente de restitución

$(\stackrel{+}{\rightarrow})\quad e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

$0.6 = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{5\text{ m/s} - (-7\text{ m/s})}$

$(v_B)_2 - (v_A)_2 = 7.2 \qquad (2)$

Al resolver,

$(v_B)_2 = 0.2\text{ m/s} \rightarrow$ *Resp.*

$(v_A)_2 = -7\text{ m/s} = 7\text{ m/s} \leftarrow$ *Resp.*

F15-15. $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$\frac{1}{2}m(v_A)_1^2 + mg(h_A)_1 = \frac{1}{2}m(v_A)_2^2 + mg(h_A)_2$

$\frac{1}{2}\left(\frac{30}{32.2}\text{ slug}\right)(5\text{ ft/s})^2 + (30\text{ lb})(10\text{ft}) = \frac{1}{2}\left(\frac{30}{32.2}\text{ slug}\right)(v_A)_2^2 + 0$

$(v_A)_2 = 25.87\text{ ft/s} \leftarrow$

$(\stackrel{+}{\leftarrow})\quad m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 = m_A(v_A)_3 + m_B(v_B)_3$

$\left(\frac{30}{32.2}\text{ slug}\right)(25.87\text{ ft/s}) + 0 = \left(\frac{30}{32.2}\text{ slug}\right)(v_A)_3 + \left(\frac{80}{32.2}\text{ slug}°\right)(v_B)_3$

$30(v_A)_3 + 80(v_B)_3 = 775.95 \qquad (1)$

$(\stackrel{+}{\leftarrow})\quad e = \dfrac{(v_B)_3 - (v_A)_3}{(v_A)_2 - (v_B)_2}$

$0.6 = \dfrac{(v_B)_3 - (v_A)_3}{25.87\text{ ft/s} - 0}$

$(v_B)_3 - (v_A)_3 = 15.52 \qquad (2)$

Al resolver las ecuaciones (1) y (2), se obtiene

$(v_B)_3 = 11.3\text{ ft/s} \leftarrow$

$(v_A)_3 = -4.23\text{ ft/s} = 4.23\text{ ft/s} \rightarrow$ *Resp.*

F15-16. $(+\uparrow)\quad m[(v_b)_1]_y = m[(v_b)_2]_y$

$[(v_b)_2]_y = [(v_b)_1]_y = (20\text{ m/s})\,\text{sen}30° = 10\text{ m/s} \uparrow$

$(\stackrel{+}{\rightarrow})\quad e = \dfrac{(v_w)_2 - [(v_b)_2]_x}{[(v_b)_1]_x - (v_w)_1}$

$0.75 = \dfrac{0 - [(v_b)_2]_x}{(20\text{ m/s})\cos 30° - 0}$

$[(v_b)_2]_x = -12.99\text{ m/s} = 12.99\text{ m/s} \leftarrow$

$(v_b)_2 = \sqrt{[(v_b)_2]_x^2 + [(v_b)_2]_y^2}$

$= \sqrt{(12.99\text{ m/s})^2 + (10\text{ m/s})^2}$

$= 16.4\text{ m/s}$ *Resp.*

$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{[(v_b)_2]_y}{[(v_b)_2]_x}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{10\text{ m/s}}{12.99\text{ m/s}}\right)$

$= 37.6°$ *Resp.*

F15-17. $\Sigma m(v_x)_1 = \Sigma m(v_x)_2$

$0 + 0 = 2\,(1) + 11\,(v_{Bx})_2$

$(v_{Bx})_2 = -0.1818\text{ m/s}$

$\Sigma m(v_y)_1 = \Sigma m(v_y)_2$

$2\,(3) + 0 = 0 + 11\,(v_{By})_2$

$(v_{By})_2 = 0.545\text{ m/s}$

$(v_B)_2 = \sqrt{(-0.1818)^2 + (0.545)^2}$

$= 0.575\text{ m/s}$ *Resp.*

F15-18. $+\nearrow\quad 1\,(3)\left(\frac{3}{5}\right) - 1\,(4)\left(\frac{4}{5}\right) = 1\,(v_B)_{2x} + 1\,(v_A)_{2x}$

$+\nearrow\quad 0.5 = [(v_A)_{2x} - (v_B)_{2x}]\,/\left[(3)\left(\frac{3}{5}\right) - (-4)\left(\frac{4}{5}\right)\right]$

Al resolver,

$(v_A)_{2x} = 0.550\text{ m/s}, (v_B)_{2x} = -1.95\text{ m/s}$

Disco A,

$+\nwarrow\quad -1(4)\left(\frac{3}{5}\right) = 1(v_A)_{2y}$

$(v_A)_{2y} = -2.40\text{ m/s}$

Disco B,

$$-1(3)\left(\tfrac{4}{5}\right) = 1(v_B)_{2y}$$

$$(v_B)_{2y} = -2.40 \text{ m/s}$$

$$(v_A)_2 = \sqrt{(0.550)^2 + (2.40)^2} = 2.46 \text{ m/s} \quad \textit{Resp.}$$

$$(v_B)_2 = \sqrt{(1.95)^2 + (2.40)^2} = 3.09 \text{ m/s} \quad \textit{Resp.}$$

F15-19. $H_O = \Sigma mvd$;

$$H_O = \left[2(10)\left(\tfrac{4}{5}\right)\right](4) - \left[2(10)\left(\tfrac{3}{5}\right)\right](3)$$

$$= 28 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

F15-20. $H_P = \Sigma mvd$;

$$H_P = [2(15)\operatorname{sen} 30°](2) - [2(15)\cos 30°](5)$$

$$= -99.9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} = 99.9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \circlearrowright$$

F15-21. $(H_z)_1 + \Sigma \int M_z\, dt = (H_z)_2$

$$5(2)(1.5) + 5(1.5)(3) = 5v(1.5)$$

$$v = 5 \text{ m/s} \quad \textit{Resp.}$$

F15-22. $(H_z)_1 + \Sigma \int M_z\, dt = (H_z)_2$

$$0 + \int_0^{4\text{ s}} (10t)\left(\tfrac{4}{5}\right)(1.5)dt = 5v(1.5)$$

$$v = 12.8 \text{ m/s} \quad \textit{Resp.}$$

F15-23. $(H_z)_1 + \Sigma \int M_z\, dt = (H_z)_2$

$$0 + \int_0^{5\text{ s}} 0.9t^2\, dt = 2v(0.6)$$

$$v = 31.2 \text{ m/s} \quad \textit{Resp.}$$

F15-24. $(H_z)_1 + \Sigma \int M_z\, dt = (H_z)_2$

$$0 + \int_0^{4\text{ s}} 8t dt + 2(10)(0.5)(4) = 2[10v(0.5)]$$

$$v = 10.4 \text{ m/s} \quad \textit{Resp.}$$

Capítulo 16

F16-1. $\theta = (20 \text{ rev})\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right) = 40\pi \text{ rad}$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

$$(30 \text{ rad/s})^2 = 0^2 + 2\alpha_c[(40\pi \text{ rad}) - 0]$$

$$\alpha_c = 3.581 \text{ rad/s}^2 = 3.58 \text{ rad/s}^2 \quad \textit{Resp.}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$

$$30 \text{ rad/s} = 0 + (3.581 \text{ rad/s}^2)t$$

$$t = 8.38 \text{ s} \quad \textit{Resp.}$$

F16-2. $\frac{d\omega}{d\theta} = 2(0.005\theta) = (0.01\theta)$

$$\alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta} = \left(0.005\,\theta^2\right)(0.01\theta) = 50\left(10^{-6}\right)\theta^3 \text{ rad/s}^2$$

Cuando $\theta = 20 \text{ rev}(2\pi \text{ rad}/1 \text{ rev}) = 40\pi$ rad,

$$\alpha = \left[50\left(10^{-6}\right)(40\pi)^3\right] \text{ rad/s}^2$$

$$= 99.22 \text{ rad/s}^2 = 99.2 \text{ rad/s}^2 \quad \textit{Resp.}$$

F16-3. $\omega = 4\theta^{1/2}$

$$150 \text{ rad/s} = 4\,\theta^{1/2}$$

$$\theta = 1406.25 \text{ rad}$$

$$dt = \frac{d\theta}{\omega}$$

$$\int_0^t dt = \int_{1\text{ rad}}^{\theta} \frac{d\theta}{4\theta^{1/2}}$$

$$t\Big|_0^t = \tfrac{1}{2}\theta^{1/2}\Big|_{1\text{ rad}}^{\theta}$$

$$t = \tfrac{1}{2}\theta^{1/2} - \tfrac{1}{2}$$

$$t = \tfrac{1}{2}(1406.25)^{1/2} - \tfrac{1}{2} = 18.25 \text{ s} \quad \textit{Resp.}$$

F16-4. $\omega = \frac{d\theta}{dt} = (1.5t^2 + 15) \text{ rad/s}$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = (3t) \text{ rad/s}^2$$

$$\omega = [1.5(3^2) + 15] \text{ rad/s} = 28.5 \text{ rad/s}$$

$$\alpha = 3(3) \text{ rad/s}^2 = 9 \text{ rad/s}^2$$

$$v = \omega r = (28.5 \text{ rad/s})(0.75 \text{ ft}) = 21.4 \text{ ft/s} \quad \textit{Resp.}$$

$$a = \alpha r = (9 \text{ rad/s}^2)(0.75 \text{ ft}) = 6.75 \text{ ft/s}^2 \quad \textit{Resp.}$$

F16-5. $\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta$

$$\int_{2\text{ rad/s}}^{\omega} \omega\, d\omega = \int_0^{\theta} 0.5\theta\, d\theta$$

$$\frac{\omega^2}{2}\Big|_{2\text{ rad/s}}^{\omega} = 0.25\theta^2\Big|_0^{\theta}$$

$$\omega = (0.5\,\theta^2 + 4)^{1/2} \text{ rad/s}$$

Cuando $\theta = 2 \text{ rev} = 4\pi$ rad,

$$\omega = [0.5(4\pi)^2 + 4]^{1/2} \text{ rad/s} = 9.108 \text{ rad/s}$$

$$v_P = \omega r = (9.108 \text{ rad/s})(0.2 \text{ m}) = 1.82 \text{ m/s} \quad \textit{Resp.}$$

$$(a_P)_t = \alpha r = (0.5\theta \text{ rad/s}^2)(0.2 \text{ m})\Big|_{\theta = 4\pi \text{ rad}}$$

$$= 1.257 \text{ m/s}^2$$

$$(a_P)_n = \omega^2 r = (9.108 \text{ rad/s})^2(0.2 \text{ m}) = 16.59 \text{ m/s}^2$$

$$a_p = \sqrt{(a_P)_t^2 + (a_P)_n^2}$$

$$= \sqrt{(1.257 \text{ m/s}^2)^2 + (16.59 \text{ m/s}^2)^2}$$

$$= 16.6 \text{ m/s}^2 \quad \textit{Resp.}$$

F16-6.
$$\alpha_B = \alpha_A\left(\frac{r_A}{r_B}\right)$$
$$= (4.5\ \text{rad/s}^2)\left(\tfrac{0.075\ \text{m}}{0.225\ \text{m}}\right) = 1.5\ \text{rad/s}^2$$
$$\omega_B = (\omega_B)_0 + \alpha_B t$$
$$\omega_B = 0 + (1.5\ \text{rad/s}^2)(3\ \text{s}) = 4.5\ \text{rad/s}$$
$$\theta_B = (\theta_B)_0 + (\omega_B)_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_B t^2$$
$$\theta_B = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}(1.5\ \text{rad/s}^2)(3\ \text{s})^2$$
$$\theta_B = 6.75\ \text{rad}$$
$$v_C = \omega_B r_D = (4.5\ \text{rad/s})(0.125\ \text{m})$$
$$= 0.5625\ \text{m/s} \quad \textit{Resp.}$$
$$s_C = \theta_B r_D = (6.75\ \text{rad})(0.125\ \text{m}) = 0.84375\ \text{m}$$
$$= 844\ \text{mm} \quad \textit{Resp.}$$

F16-7. Análisis vectorial
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$
$$-v_B\,\mathbf{j} = (3\mathbf{i})\ \text{m/s} + (\omega\mathbf{k}) \times (-1.5\cos 30°\mathbf{i} + 1.5\,\text{sen}\,30°\mathbf{j})$$
$$-v_B\,\mathbf{j} = [3 - \omega_{AB}(1.5\,\text{sen}\,30°)]\mathbf{i} - \omega(1.5\cos 30°)\mathbf{j}$$
$$0 = 3 - \omega(1.5\,\text{sen}\,30°) \quad (1)$$
$$-v_B = 0 - \omega(1.5\cos 30°) \quad (2)$$
$$\omega = 4\ \text{rad/s} \qquad v_B = 5.20\ \text{m/s} \quad \textit{Resp.}$$

Solución escalar
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$
$$\left[\downarrow v_B\right] = \left[\underset{\rightarrow}{3}\right] + \left[\omega(1.5)\ \measuredangle 30°\right]$$

Esto conduce a las ecuaciones (1) y (2).

F16-8. Análisis vectorial
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$
$$(v_B)_x\mathbf{i} + (v_B)_y\mathbf{j} = \mathbf{0} + (-10\mathbf{k}) \times (-0.6\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j})$$
$$(v_B)_x\mathbf{i} + (v_B)_y\mathbf{j} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$$
$$(v_B)_x = 6\ \text{m/s}\ \text{ y }\ (v_B)_y = 6\ \text{m/s}$$
$$v_B = \sqrt{(v_B)_x^2 + (v_B)_y^2}$$
$$= \sqrt{(6\ \text{m/s})^2 + (6\ \text{m/s})^2}$$
$$= 8.49\ \text{m/s} \quad \textit{Resp.}$$

Solución escalar
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$
$$\left[\underset{\rightarrow}{(v_B)_x}\right] + \left[(v_B)_y \uparrow\right] = \left[0\right] + \left[\measuredangle 45°\ \ 10\left(\frac{0.6}{\cos 45°}\right)\right]$$
$$\underset{\rightarrow}{+}\ (v_B)_x = 0 + 10(0.6/\cos 45°)\cos 45° = 6\ \text{m/s} \rightarrow$$
$$+\uparrow (v_B)_y = 0 + 10(0.6/\cos 45°)\,\text{sen}\,45° = 6\ \text{m/s}\uparrow$$

F16-9. Análisis vectorial
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$
$$(4\ \text{ft/s})\mathbf{i} = (-2\ \text{ft/s})\mathbf{i} + (-\omega\mathbf{k}) \times (3\ \text{ft})\mathbf{j}$$
$$4\mathbf{i} = (-2 + 3\omega)\mathbf{i}$$
$$\omega = 2\ \text{rad/s} \quad \textit{Resp.}$$

Solución escalar
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$
$$\left[\underset{\rightarrow}{4}\right] = \left[\underset{\leftarrow}{2}\right] + \left[\underset{\rightarrow}{\omega(3)}\right]$$
$$\underset{\rightarrow}{+} \quad 4 = -2 + \omega(3); \qquad \omega = 2\ \text{rad/s}$$

F16-10. Análisis vectorial
$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}_{OA} \times \mathbf{r}_A$$
$$= (12\ \text{rad/s})\mathbf{k} \times (0.3\ \text{m})\mathbf{j}$$
$$= [-3.6\mathbf{i}]\ \text{m/s}$$
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A}$$
$$v_B\,\mathbf{j} = (-3.6\ \text{m/s})\mathbf{i} + (\omega_{AB}\,\mathbf{k}) \times (0.6\cos 30°\mathbf{i} - 0.6\,\text{sen}\,30°\mathbf{j})\ \text{m}$$
$$v_B\,\mathbf{j} = [\omega_{AB}(0.6\,\text{sen}\,30°) - 3.6]\mathbf{i} + \omega_{AB}(0.6\cos 30°)\mathbf{j}$$
$$0 = \omega_{AB}(0.6\,\text{sen}\,30°) - 3.6 \quad (1)$$
$$v_B = \omega_{AB}(0.6\cos 30°) \quad (2)$$
$$\omega_{AB} = 12\ \text{rad/s} \quad v_B = 6.24\ \text{m/s}\uparrow \quad \textit{Resp.}$$

Solución escalar
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$
$$\left[v_B \uparrow\right] = \left[\underset{12(0.3)}{\leftarrow}\right] + \left[\measuredangle 30°\,\omega(0.6)\right]$$

Esto conduce a las ecuaciones (1) y (2).

F16-11. Análisis vectorial
$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B}$$
$$v_C\,\mathbf{j} = (-60\mathbf{i})\ \text{ft/s} + (-\omega_{BC}\mathbf{k}) \times (-2.5\cos 30°\mathbf{i} + 2.5\,\text{sen}\,30°\mathbf{j})\text{ft}$$
$$v_C\mathbf{j} = (-60)\mathbf{i} + 2.165\omega_{BC}\mathbf{j} + 1.25\omega_{BC}\,\mathbf{i}$$
$$0 = -60 + 1.25\omega_{BC} \quad (1)$$
$$v_C = 2.165\,\omega_{BC} \quad (2)$$
$$\omega_{BC} = 48\ \text{rad/s} \quad \textit{Resp.}$$
$$v_C = 104\ \text{ft/s}$$

Análisis escalar
$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{C/B}$$
$$\left[v_C \uparrow\right] = \left[\underset{\leftarrow}{v_B}\right] + \left[\measuredangle 30°\ \omega\ (2.5)\right]$$

Esto conduce a las ecuaciones (1) y (2).

F16-12. Análisis vectorial

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$-v_B \cos 30°\,\mathbf{i} + v_B \operatorname{sen} 30°\,\mathbf{j} = (-3\ \text{m/s})\mathbf{j} + (-\omega\mathbf{k}) \times (-2 \operatorname{sen} 45°\mathbf{i} - 2 \cos 45°\mathbf{j})\ \text{m}$$

$$-0.8660 v_B\,\mathbf{i} + 0.5 v_B\,\mathbf{j} = -1.4142\omega\mathbf{i} + (1.4142\omega - 3)\mathbf{j}$$

$$-0.8660 v_B = -1.4142\omega \quad (1)$$

$$0.5 v_B = 1.4142\omega - 3 \quad (2)$$

$$\omega = 5.02\ \text{rad/s} \quad v_B = 8.20\ \text{m/s} \quad \textit{Resp.}$$

Solución escalar

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\left[\measuredangle 30°\ v_B\right] = \left[\downarrow 3\right] + \left[\measuredangle 45°\ \omega(2)\right]$$

Esto conduce a las ecuaciones (1) y (2).

F16-13. $\omega_{AB} = \dfrac{v_A}{r_{A/IC}} = \dfrac{6}{3} = 2\ \text{rad/s}$ *Resp.*

$$\phi = \tan^{-1}\left(\tfrac{2}{1.5}\right) = 53.13°$$

$$r_{C/IC} = \sqrt{(3)^2 + (2.5)^2 - 2(3)(2.5)\cos 53.13°} = 2.5\ \text{m}$$

$$v_C = \omega_{AB} r_{C/CI} = 2(2.5) = 5\ \text{m/s} \quad \textit{Resp.}$$

$$\theta = 90° - \phi = 90° - 53.13° = 36.9°\ \measuredangle \quad \textit{Resp.}$$

F16-14. $v_B = \omega_{AB} r_{B/A} = 12(0.6) = 7.2\ \text{m/s}\ \downarrow$

$$v_C = 0 \quad \textit{Resp.}$$

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{r_{B/CI}} = \frac{7.2}{1.2} = 6\ \text{rad/s} \quad \textit{Resp.}$$

F16-15. $\omega = \dfrac{v_O}{r_{O/CI}} = \dfrac{6}{0.3} = 20\ \text{rad/s}$ *Resp.*

$$r_{A/CI} = \sqrt{0.3^2 + 0.6^2} = 0.6708\ \text{m}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\tfrac{0.3}{0.6}\right) = 26.57°$$

$$v_A = \omega r_{A/CI} = 20(0.6708) = 13.4\ \text{m/s} \quad \textit{Resp.}$$

$$\theta = 90° - \phi = 90° - 26.57° = 63.4°\ \measuredangle \quad \textit{Resp.}$$

F16-16. El *CI* puede localizarse por medio de triángulos semejantes.

$$\frac{0.5 - r_{C/CI}}{3} = \frac{r_{C/CI}}{1.5} \qquad r_{C/CI} = 0.1667\ \text{m}$$

$$\omega = \frac{v_C}{r_{C/CI}} = \frac{1.5}{0.1667} = 9\ \text{rad/s} \quad \textit{Resp.}$$

También, $r_{O/CI} = 0.3 - r_{C/CI} = 0.3 - 0.1667 = 0.1333\ \text{m}$.

$$v_O = \omega r_{O/CI} = 9(0.1333) = 1.20\ \text{m/s} \quad \textit{Resp.}$$

F16-17. $v_B = \omega r_{B/A} = 6(0.2) = 1.2\ \text{m/s}$

$$r_{B/CI} = 0.8 \tan 60° = 1.3856\ \text{m}$$

$$r_{C/CI} = \frac{0.8}{\cos 60°} = 1.6\ \text{m}$$

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{r_{B/CI}} = \frac{1.2}{1.3856} = 0.8660\ \text{rad/s} = 0.866\ \text{rad/s} \quad \textit{Resp.}$$

Entonces,

$$v_C = \omega_{BC} r_{C/CI} = 0.8660(1.6) = 1.39\ \text{m/s} \quad \textit{Resp.}$$

F16-18. $v_B = \omega_{AB} r_{B/A} = 10(0.2) = 2\ \text{m/s}$

$$v_C = \omega_{CD} r_{C/D} = \omega_{CD}(0.2) \rightarrow$$

$$r_{B/CI} = \frac{0.4}{\cos 30°} = 0.4619\ \text{m}$$

$$r_{C/CI} = 0.4 \tan 30° = 0.2309\ \text{m}$$

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{r_{B/CI}} = \frac{2}{0.4619} = 4.330\ \text{rad/s} = 4.33\ \text{rad/s} \quad \textit{Resp.}$$

$$v_C = \omega_{BC} r_{C/CI}$$

$$\omega_{CD}(0.2) = 4.330(0.2309)$$

$$\omega_{CD} = 5\ \text{rad/s} \quad \textit{Resp.}$$

F16-19. $\omega = \dfrac{v_A}{r_{A/CI}} = \dfrac{6}{3} = 2\ \text{rad/s}$

Análisis vectorial

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

$$a_B\mathbf{i} = -5\mathbf{j} + (\alpha\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) - 2^2(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j})$$

$$a_B\mathbf{i} = (4\alpha - 12)\mathbf{i} + (3\alpha + 11)\mathbf{j}$$

$$a_B = 4\alpha - 12 \quad (1)$$

$$0 = 3\alpha + 11 \quad (2)$$

$$\alpha = -3.67\ \text{rad/s}^2 \quad \textit{Resp.}$$

$$a_B = -26.7\ \text{m/s}^2 \quad \textit{Resp.}$$

Solución escalar

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

$$\left[\begin{matrix} a_B \\ \rightarrow \end{matrix}\right] = \left[\downarrow 5\right] + \left[\alpha\,(5)\,\tfrac{5}{4}\right] + \left[4\,\tfrac{5}{3}\,(2)^2(5)\right]$$

Esto conduce a las ecuaciones (1) y (2).

F16-20. Análisis vectorial

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/O} - \omega^2 \mathbf{r}_{A/O}$$
$$= 1.8\mathbf{i} + (-6\mathbf{k}) \times (0.3\mathbf{j}) - 12^2\,(0.3\mathbf{j})$$
$$= \{3.6\mathbf{i} - 43.2\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Análisis escalar

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{A/O}$$
$$\begin{bmatrix} (a_A)_x \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (a_A)_y \uparrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (6)(0.3) \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (6)(0.3) \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \downarrow (12)^2(0.3) \end{bmatrix}$$
$$\overset{+}{\rightarrow} \quad (a_A)_x = 1.8 + 1.8 = 3.6\ \text{m/s}^2 \rightarrow$$
$$+\uparrow \quad (a_A)_y = -43.2\ \text{m/s}^2$$

F16-21. Al utilizar

$$v_O = \omega r; \quad 6 = \omega(0.3)$$
$$\omega = 20\ \text{rad/s}$$
$$a_O = \alpha r; \quad 3 = \alpha(0.3)$$
$$\alpha = 10\ \text{rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Análisis vectorial

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/O} - \omega^2 \mathbf{r}_{A/O}$$
$$= 3\mathbf{i} + (-10\mathbf{k}) \times (-0.6\mathbf{i}) - 20^2(-0.6\mathbf{i})$$
$$= \{243\mathbf{i} + 6\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Análisis escalar

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{A/O}$$
$$\begin{bmatrix} (a_A)_x \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (a_A)_y \\ \uparrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10(0.6) \\ \uparrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (20)^2(0.6) \\ \rightarrow \end{bmatrix}$$
$$\overset{+}{\rightarrow} \quad (a_A)_x = 3 + 240 = 243\ \text{m/s}^2$$
$$+\uparrow \quad (a_A)_y = 10(0.6) = 6\ \text{m/s}^2 \uparrow$$

F16-22. $$\frac{r_{A/CI}}{3} = \frac{0.5 - r_{A/CI}}{1.5}; \qquad r_{A/CI} = 0.3333\ \text{m}$$

$$\omega = \frac{v_A}{r_{A/CI}} = \frac{3}{0.3333} = 9\ \text{rad/s}$$

Análisis vectorial

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/C} - \omega^2\, \mathbf{r}_{A/C}$$
$$1.5\mathbf{i} - (a_A)_n\mathbf{j} = -0.75\mathbf{i} + (a_C)_n\mathbf{j}$$
$$+ (-\alpha\mathbf{k}) \times 0.5\mathbf{j} - 9^2\,(0.5\mathbf{j})$$
$$1.5\mathbf{i} - (a_A)_n\mathbf{j} = (0.5\alpha - 0.75)\mathbf{i} + \left[\,(a_C)_n - 40.5\right]\mathbf{j}$$
$$1.5 = 0.5\alpha - 0.75$$
$$\alpha = 4.5\ \text{rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Análisis escalar

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{A/C}$$
$$\begin{bmatrix} 1.5 \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (a_A)_n \\ \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ \leftarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (a_C)_n \\ \uparrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha(0.5) \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (9)^2(0.5) \\ \downarrow \end{bmatrix}$$
$$\overset{+}{\rightarrow} \quad 1.5 = -0.75 + \alpha(0.5)$$
$$\alpha = 4.5\ \text{rad/s}^2$$

F16-23. $$v_B = \omega r_{B/A} = 12(0.3) = 3.6\ \text{m/s}$$

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{r_{B/CI}} = \frac{3.6}{1.2} = 3\ \text{rad/s}$$

Análisis vectorial

$$\mathbf{a}_B = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$
$$= (-6\mathbf{k}) \times (0.3\mathbf{i}) - 12^2(0.3\mathbf{i})$$
$$= \{-43.2\mathbf{i} - 1.8\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2$$
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B} - \omega_{BC}^2 \mathbf{r}_{C/B}$$
$$a_C\mathbf{i} = (-43.2\mathbf{i} - 1.8\mathbf{j})$$
$$+ (\alpha_{BC}\mathbf{k}) \times (1.2\mathbf{i}) - 3^2(1.2\mathbf{i})$$
$$a_C\mathbf{i} = -54\mathbf{i} + (1.2\alpha_{BC} - 1.8)\mathbf{j}$$
$$a_C = -54\ \text{m/s}^2 = 54\ \text{m/s}^2 \leftarrow \qquad \textit{Resp.}$$
$$0 = 1.2\alpha_{BC} - 1.8 \quad \alpha_{BC} = 1.5\ \text{rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Análisis escalar

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{C/B}$$
$$\begin{bmatrix} a_C \\ \leftarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(0.3) \\ \downarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (12)^2(0.3) \\ \leftarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{BC}(1.2) \\ \uparrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (3)^2(1.2) \\ \leftarrow \end{bmatrix}$$
$$\overset{+}{\leftarrow} \quad a_C = 43.2 + 10.8 = 54\ \text{m/s}^2 \leftarrow$$
$$+\uparrow \quad 0 = -6(0.3) + 1.2\alpha_{BC}$$
$$\alpha_{BC} = 1.5\ \text{rad/s}^2$$

F16-24. $$v_B = \omega\, r_{B/A} = 6(0.2) = 1.2\ \text{m/s} \rightarrow$$

$$r_{B/CI} = 0.8 \tan 60^\circ = 1.3856\ \text{m}$$

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{r_{B/CI}} = \frac{1.2}{1.3856} = 0.8660\ \text{rad/s}$$

Análisis vectorial

$$\mathbf{a}_B = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$
$$= (-3\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{j}) - 6^2\,(0.2\mathbf{j})$$
$$= [0.6\mathbf{i} - 7.2\mathbf{j}]\ \text{m/s}$$
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B} - \omega^2 \mathbf{r}_{C/B}$$
$$a_C \cos 30^\circ\mathbf{i} + a_C \operatorname{sen} 30^\circ\mathbf{j}$$
$$= (0.6\mathbf{i} - 7.2\mathbf{j}) + (\alpha_{BC}\mathbf{k} \times 0.8\mathbf{i}) - 0.8660^2(0.8\mathbf{i})$$

$0.8660a_C\,\mathbf{i} + 0.5a_C\,\mathbf{j} = (0.8\alpha_{BC} - 7.2)\mathbf{j}$

$0.8660a_C = 0$ (1)

$0.5a_C = 0.8\alpha_{BC} - 7.2$ (2)

$a_C = 0 \qquad \alpha_{BC} = 9 \text{ rad/s}^2$ *Resp.*

Análisis escalar

$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{C/B}$

$$\begin{bmatrix} a_C \\ \measuredangle 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(0.2) \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (6)^2(0.2) \\ \downarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{BC}(0.8) \\ \uparrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (0.8660)^2(0.8) \\ \leftarrow \end{bmatrix}$$

Esto conduce a las ecuaciones (1) y (2).

Capítulo 17

F17-1. $\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x;\ 100\left(\frac{4}{5}\right) = 100a$

$a = 0.8 \text{ m/s}^2 \rightarrow$ *Resp.*

$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y;$

$N_A + N_B - 100\left(\frac{3}{5}\right) - 100(9.81) = 0$ (1)

$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0;$

$N_A(0.6) + 100\left(\frac{3}{5}\right)(0.7) - N_B(0.4) - 100\left(\frac{4}{5}\right)(0.7) = 0$ (2)

$N_A = 430.4 \text{ N} = 430 \text{ N}$ *Resp.*

$N_B = 610.6 \text{ N} = 611 \text{ N}$ *Resp.*

F17-2. $\Sigma F_{x'} = m(a_G)_{x'};\quad 80(9.81)\operatorname{sen} 15° = 80a$

$a = 2.54 \text{ m/s}^2$ *Resp.*

$\Sigma F_{y'} = m(a_G)_{y'};$

$N_A + N_B - 80(9.81)\cos 15° = 0$ (1)

$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0;$

$N_A(0.5) - N_B(0.5) = 0$ (2)

$N_A = N_B = 379 \text{ N}$ *Resp.*

F17-3. $\circlearrowleft + \Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A;\quad 10\left(\frac{3}{5}\right)(7) = \frac{20}{32.2}a(3.5)$

$a = 19.3 \text{ ft/s}^2$ *Resp.*

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x;\quad A_x + 10\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{20}{32.2}(19.32)$

$A_x = 6 \text{ lb}$ *Resp.*

$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y;\quad A_y - 20 + 10\left(\frac{4}{5}\right) = 0$

$A_y = 12 \text{ lb}$ *Resp.*

F17-4. $F_A = \mu_s N_A = 0.2N_A \quad F_B = \mu_s N_B = 0.2N_B$

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x;$

$0.2N_A + 0.2N_B = 100a$ (1)

$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y;$

$N_A + N_B - 100(9.81) = 0$ (2)

$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0;$

$0.2N_A(0.75) + N_A(0.9) + 0.2N_B(0.75) - N_B(0.6) = 0$ (3)

Al resolver las ecuaciones (1), (2) y (3),

$N_A = 294.3 \text{ N} = 294 \text{ N}$

$N_B = 686.7 \text{ N} = 687 \text{ N}$

$a = 1.96 \text{ m/s}^2$ *Resp.*

Como N_A es positiva, la mesa se deslizará antes de volcarse.

F17-5. $(a_G)_t = \alpha r = \alpha(1.5 \text{ m})$

$(a_G)_n = \omega^2 r = (5 \text{ rad/s})^2(1.5 \text{ m}) = 37.5 \text{ m/s}^2$

$\Sigma F_t = m(a_G)_t;\quad 100 \text{ N} = 50 \text{ kg}[\alpha(1.5 \text{ m})]$

$\alpha = 1.33 \text{ rad/s}^2$ *Resp.*

$\Sigma F_n = m(a_G)_n;\quad T_{AB} + T_{CD} - 50(9.81) \text{ N} = 50 \text{ kg}(37.5 \text{ m/s}^2)$

$T_{AB} + T_{CD} = 2365.5$

$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0;\quad T_{CD}(1 \text{ m}) - T_{AB}(1 \text{ m}) = 0$

$T_{AB} = T_{CD} = 1182.75 \text{ N} = 1.18 \text{ kN}$ *Resp.*

F17-6. $\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0;$

$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_D = \mathbf{a}_B$

$D_y(0.6) - 450 = 0 \quad D_y = 750 \text{ N}$ *Resp.*

$(a_G)_n = \omega^2 r = 6^2(0.6) = 21.6 \text{ m/s}^2$

$(a_G)_t = \alpha r = \alpha(0.6)$

$+\uparrow \Sigma F_t = m(a_G)_t;$

$750 - 50(9.81) = 50[\alpha(0.6)]$

$\alpha = 8.65 \text{ rad/s}^2$ *Resp.*

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_n = m(a_G)_n;$

$F_{AB} + D_x = 50(21.6)$ (1)

$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0;$

$D_x(0.4) + 750(0.1) - F_{AB}(0.4) = 0$ (2)

$D_x = 446.25 \text{ N} = 446 \text{ N}$ *Resp.*

$F_{AB} = 633.75 \text{ N} = 634 \text{ N}$ *Resp.*

F17-7. $I_O = mk_O^2 = 100(0.5^2) = 25\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha; \quad -100(0.6) = -25\alpha$

$\alpha = 2.4\ \text{rad/s}^2$

$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$

$\omega = 0 + 2.4(3) = 7.2\ \text{rad/s}$ *Resp.*

F17-8. $I_O = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(50)(0.3^2) = 2.25\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha;$

$-9t = -2.25\alpha \quad \alpha = (4t)\ \text{rad/s}^2$

$d\omega = \alpha\, dt$

$\int_0^\omega d\omega = \int_0^t 4t\, dt$

$\omega = (2t^2)\ \text{rad/s}$

$\omega = 2(4^2) = 32\ \text{rad/s}$ *Resp.*

F17-9. $(a_G)_t = \alpha r_G = \alpha(0.15)$

$(a_G)_n = \omega^2 r_G = 6^2(0.15) = 5.4\ \text{m/s}^2$

$I_O = I_G + md^2 = \frac{1}{12}(30)(0.9^2) + 30(0.15^2)$

$= 2.7\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha; \quad 60 - 30(9.81)(0.15) = 2.7\alpha$

$\alpha = 5.872\ \text{rad/s}^2 = 5.87\ \text{rad/s}^2$ *Resp.*

$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_n = m(a_G)_n; \quad O_n = 30(5.4) = 162\ \text{N}$ *Resp.*

$+\uparrow \Sigma F_t = m(a_G)_t;$

$O_t - 30(9.81) = 30[5.872(0.15)]$

$O_t = 320.725\ \text{N} = 321\ \text{N}$ *Resp.*

F17-10. $(a_G)_t = \alpha r_G = \alpha(0.3)$

$(a_G)_n = \omega^2 r_G = 10^2(0.3) = 30\ \text{m/s}^2$

$I_O = I_G + md^2 = \frac{1}{2}(30)(0.3^2) + 30(0.3^2)$

$= 4.05\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha;$

$50\left(\frac{3}{5}\right)(0.3) + 50\left(\frac{4}{5}\right)(0.3) = 4.05\alpha$

$\alpha = 5.185\ \text{rad/s}^2 = 5.19\ \text{rad/s}^2$ *Resp.*

$+\uparrow \Sigma F_n = m(a_G)_n;$

$O_n + 50\left(\frac{3}{5}\right) - 30(9.81) = 30(30)$

$O_n = 1164.3\ \text{N} = 1.16\text{kN}$ *Resp.*

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_t = m(a_G)_t;$

$O_t + 50\left(\frac{4}{5}\right) = 30[5.185(0.3)]$

$O_t = 6.67\ \text{N}$ *Resp.*

F17-11. $I_G = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12}(15\ \text{kg})(0.9\ \text{m})^2 = 1.0125\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$(a_G)_n = \omega^2 r_G = 0$

$(a_G)_t = \alpha(0.15\ \text{m})$

$I_O = I_G + md_{OG}^2$

$= 1.0125\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 15\ \text{kg}(0.15\ \text{m})^2$

$= 1.35\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha;$

$[15(9.81)\ \text{N}](0.15\ \text{m}) = (1.35\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\alpha$

$\alpha = 16.35\ \text{rad/s}^2$ *Resp.*

$+\downarrow \Sigma F_t = m(a_G)_t; \quad -O_t + 15(9.81)\text{N}$

$= (15\ \text{kg})[16.35\ \text{rad/s}^2(0.15\ \text{m})]$

$O_t = 110.36\ \text{N} = 110\ \text{N}$ *Resp.*

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_n = m(a_G)_n; \quad O_n = 0$ *Resp.*

F17-12. $(a_G)_t = \alpha r_G = \alpha(0.45)$

$(a_G)_n = \omega^2 r_G = 6^2(0.45) = 16.2\ \text{m/s}^2$

$I_O = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}(30)(0.9^2) = 8.1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha;$

$300\left(\frac{4}{5}\right)(0.6) - 30(9.81)(0.45) = 8.1\alpha$

$\alpha = 1.428\ \text{rad/s}^2 = 1.43\ \text{rad/s}^2$ *Resp.*

$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_n = m(a_G)_n; \quad O_n + 300\left(\frac{3}{5}\right) = 30(16.2)$

$O_n = 306\ \text{N}$ *Resp.*

$+\uparrow \Sigma F_t = m(a_G)_t; \quad O_t + 300\left(\frac{4}{5}\right) - 30(9.81)$

$= 30[1.428(0.45)]$

$O_t = 73.58\ \text{N} = 73.6\ \text{N}$ *Resp.*

F17-13. $I_G = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12}(60)(3^2) = 45\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y;$

$80 - 20 = 60a_G \quad a_G = 1\ \text{m/s}^2\uparrow$

$\circlearrowleft + \Sigma M_G = I_G\alpha; \quad 80(1) + 20(0.75) = 45\alpha$

$\alpha = 2.11\ \text{rad/s}^2$ *Resp.*

F17-14. $\circlearrowleft + \Sigma M_A = (\mathcal{M}_k)_A;$

$-200(0.3) = -100a_G(0.3) - 4.5\alpha$

$30a_G + 4.5\alpha = 60 \quad (1)$

$a_G = \alpha r = \alpha(0.3) \quad (2)$

$\alpha = 4.44\ \text{rad/s}^2 \quad a_G = 1.33\ \text{m/s}^2 \rightarrow$ *Resp.*

F17-15. $+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y;$

$N - 20(9.81) = 0 \quad N = 196.2\ \text{N}$

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \quad 0.5(196.2) = 20a_O$

$a_O = 4.905\ \text{m/s}^2 \rightarrow$ *Resp.*

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha;$

$0.5(196.2)(0.4) - 100 = -1.8\alpha$

$\alpha = 33.8 \text{ rad/s}^2$ *Resp.*

F17-16. Esfera $I_G = \frac{2}{5}(20)(0.15)^2 = 0.18 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$\circlearrowleft + \Sigma M_{CI} = (\mathcal{M}_k)_{CI};$

$20(9.81)\text{sen}30°(0.15) = 0.18\alpha + (20a_G)(0.15)$

$0.18\alpha + 3a_G = 14.715$

$a_G = \alpha r = \alpha(0.15)$

$\alpha = 23.36 \text{ rad/s}^2 = 23.4 \text{ rad/s}^2$ *Resp.*

$a_G = 3.504 \text{ m/s}^2 = 3.50 \text{ m/s}^2$ *Resp.*

F17-17. $+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y;$

$N - 200(9.81) = 0 \quad N = 1962 \text{ N}$

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x;$

$T - 0.2(1962) = 200a_G \quad (1)$

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = (\mathcal{M}_k)_A; \quad 450 - 0.2(1962)(1)$

$= 18\alpha + 200a_G(0.4) \quad (2)$

$(a_A)_t = 0 \quad a_A = (a_A)_n$

$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{G/A} - \omega^2\mathbf{r}_{G/A}$

$a_G\mathbf{i} = -a_A\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k} \times (-0.4\mathbf{j}) - \omega^2(-0.4\mathbf{j})$

$a_G\mathbf{i} = 0.4\alpha\mathbf{i} + (0.4\omega^2 - a_A)\mathbf{j}$

$a_G = 0.4\alpha \quad (3)$

Al resolver las ecuaciones (1), (2) y (3),

$\alpha = 1.15 \text{ rad/s}^2 \quad a_G = 0.461 \text{ m/s}^2$

$T = 485 \text{ N}$ *Resp.*

F17-18. $\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \quad 0 = 12(a_G)_x \quad (a_G)_x = 0$

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = (\mathcal{M}_k)_A$

$-12(9.81)(0.3) = 12(a_G)_y(0.3) - \frac{1}{12}(12)(0.6)^2\alpha$

$0.36\alpha - 3.6(a_G)_y = 35.316 \quad (1)$

$\omega = 0$

$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \alpha \times \mathbf{r}_{G/A} - \omega^2\mathbf{r}_{G/A}$

$(a_G)_y\,\mathbf{j} = a_A\mathbf{i} + (-\alpha\mathbf{k}) \times (0.3\mathbf{i}) - \mathbf{0}$

$(a_G)_y\,\mathbf{j} = (a_A)\mathbf{i} - 0.3\,\mathbf{j}$

$a_A = 0$ *Resp.*

$(a_G)_y = -0.3\alpha \quad (2)$

Al resolver las ecuaciones (1) y (2),

$\alpha = 24.5 \text{ rad/s}^2$

$(a_G)_y = -7.36 \text{ m/s}^2 = 7.36 \text{ m/s}^2\downarrow$ *Resp.*

Capítulo 18

F18-1. $I_O = mk_O^2 = 80(0.4^2) = 12.8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$T_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}(12.8)\omega^2 = 6.4\omega^2$

$s = \theta r = 20(2\pi)(0.6) = 24\pi \text{ m}$

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$0 + 50(24\pi) = 6.4\omega^2$

$\omega = 24.3 \text{ rad/s}$ *Resp.*

F18-2. $T_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_2^2$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{50}{32.2}\text{ slug}\right)(2.5\omega_2)^2$

$+ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}\left(\frac{50}{32.2}\text{ slug}\right)(5 \text{ ft})^2\right]\omega_2^2$

$T_2 = 6.4700\omega_2^2$

O bien,

$I_O = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{50}{32.2}\text{ slug}\right)(5 \text{ ft})^2$

$= 12.9400 \text{ slug}\cdot\text{ft}^2$

De este modo,

$T_2 = \frac{1}{2}I_O\omega_2^2 = \frac{1}{2}(12.9400 \text{ slug}\cdot\text{ft}^2)\omega_2^2$

$= 6.4700\omega_2^2$

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$T_1 + [-Wy_G + M\theta] = T_2$

$0 + \left[-(50 \text{ lb})(2.5 \text{ ft}) + (100 \text{ lb}\cdot\text{ft})\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$= 6.4700{\omega_2}^2$

$\omega_2 = 2.23 \text{ rad/s}$ *Resp.*

F18-3. $(v_G)_2 = \omega_2 r_{G/CI} = \omega_2(2.5)$

$I_G = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12}(50)(5^2) = 104.17 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$T_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_2^2$

$= \frac{1}{2}(50)\left[\omega_2(2.5)\right]^2 + \frac{1}{2}(104.17)\omega_2^2 = 208.33\omega_2^2$

$U_P = Ps_P = 600(3) = 1800 \text{ J}$

$U_W = -Wh = -50(9.81)(2.5 - 2) = -245.25 \text{ J}$

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$0 + 1800 + (-245.25) = 208.33\omega_2^2$

$\omega_2 = 2.732 \text{ rad/s} = 2.73 \text{ rad/s}$ *Resp.*

F18-4. $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$
$= \frac{1}{2}(50\text{ kg})(0.4\omega)^2 + \frac{1}{2}[50\text{ kg}(0.3\text{ m})^2]\omega^2$
$= 6.25\omega^2\text{ J}$
O bien,
$T = \frac{1}{2}I_{IC}\omega^2$
$= \frac{1}{2}[50\text{ kg}(0.3\text{ m})^2 + 50\text{ kg}(0.4\text{ m})^2]\omega^2$
$= 6.25\omega^2\text{ J}$
$s_G = \theta r = 10(2\pi\text{ rad})(0.4\text{ m}) = 8\pi\text{ m}$
$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$
$T_1 + P\cos 30^\circ s_G = T_2$
$0 + (50\text{ N})\cos 30^\circ(8\pi\text{ m}) = 6.25\omega^2\text{ J}$
$\omega = 13.2\text{ rad/s}$ *Resp.*

F18-5. $I_G = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12}(30)(3^2) = 22.5\text{ kg}\cdot\text{m}^2$
$T_1 = 0$
$T_2 = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$
$= \frac{1}{2}(30)[\omega(0.5)]^2 + \frac{1}{2}(22.5)\omega^2 = 15\omega^2$
O bien,
$I_O = I_G + md^2 = \frac{1}{12}(30)(3^2) + 30(0.5^2)$
$= 30\text{ kg}\cdot\text{m}^2$
$T_2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}(30)\omega^2 = 15\omega^2$
$s_1 = \theta r_1 = 8\pi(0.5) = 4\pi\text{ m}$
$s_2 = \theta r_2 = 8\pi(1.5) = 12\pi\text{ m}$
$U_{P_1} = P_1 s_1 = 30(4\pi) = 120\pi\text{ J}$
$U_{P_2} = P_2 s_2 = 20(12\pi) = 240\pi\text{ J}$
$U_M = M\theta = 20[4(2\pi)] = 160\pi\text{ J}$
$U_W =$ (0 barra regresa a la misma posición)
$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$
$0 + 120\pi + 240\pi + 160\pi = 15\omega^2$
$\omega = 10.44\text{ rad/s} = 10.4\text{ rad/s}$ *Resp.*

F18-6. $v_G = \omega r = \omega(0.4)$
$I_G = mk_G^2 = 20(0.3^2) = 1.8\text{ kg}\cdot\text{m}^2$
$T_1 = 0$
$T_2 = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$
$= \frac{1}{2}(20)[\omega(0.4)]^2 + \frac{1}{2}(1.8)\omega^2$
$= 2.5\omega^2$
$U_M = M\theta = M\left(\frac{s_O}{r}\right) = 50\left(\frac{20}{0.4}\right) = 2500\text{ J}$
$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$
$0 + 2500 = 2.5\omega^2$
$\omega = 31.62\text{ rad/s} = 31.6\text{ rad/s}$ *Resp.*

F18-7. $v_G = \omega r = \omega(0.3)$
$I_G = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(30)(0.3^2) = 1.35\text{ kg}\cdot\text{m}^2$
$T_1 = 0$
$T_2 = \frac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_2^2$
$= \frac{1}{2}(30)[\omega_2(0.3)]^2 + \frac{1}{2}(1.35)\omega_2^2 = 2.025\omega_2^2$
$(V_g)_1 = Wy_1 = 0$
$(V_g)_2 = -Wy_2 = -30(9.81)(0.3) = -88.29\text{ J}$
$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$
$0 + 0 = 2.025\omega_2^2 + (-88.29)$
$\omega_2 = 6.603\text{ rad/s} = 6.60\text{ rad/s}$ *Resp.*

F18-8. $v_O = \omega r_{O/CI} = \omega(0.2)$
$I_O = mk_O^2 = 50(0.3^2) = 4.5\text{ kg}\cdot\text{m}^2$
$T_1 = 0$
$T_2 = \frac{1}{2}m(v_O)_2^2 + \frac{1}{2}I_O\omega_2^2$
$= \frac{1}{2}(50)[\omega_2(0.2)]^2 + \frac{1}{2}(4.5)\omega_2^2$
$= 3.25\omega_2^2$
$(V_g)_1 = Wy_1 = 0$
$(V_g)_2 = -Wy_2 = -50(9.81)(6\text{ sen }30^\circ)$
$= -1471.5\text{J}$
$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$
$0 + 0 = 3.25\omega_2^2 + (-1471.5)$
$\omega_2 = 21.28\text{ rad/s} = 21.3\text{ rad/s}$ *Resp.*

F18-9. $v_G = \omega r_G = \omega(1.5)$
$I_G = \frac{1}{12}(60)(3^2) = 45\text{ kg}\cdot\text{m}^2$
$T_1 = 0$
$T_2 = \frac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_2^2$
$= \frac{1}{2}(60)[\omega_2(1.5)]^2 + \frac{1}{2}(45)\omega_2^2$
$= 90\omega_2^2$
O bien,
$T_2 = \frac{1}{2}I_O\omega_2^2 = \frac{1}{2}[45 + 60(1.5^2)]\omega_2^2 = 90\omega_2^2$
$(V_g)_1 = Wy_1 = 0$
$(V_g)_2 = -Wy_2 = -60(9.81)(1.5\text{ sen }45^\circ)$
$= -624.30\text{ J}$
$(V_e)_1 = \frac{1}{2}ks_1^2 = 0$
$(V_e)_2 = \frac{1}{2}ks_2^2 = \frac{1}{2}(150)(3\text{ sen }45^\circ)^2 = 337.5\text{ J}$
$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$
$0 + 0 = 90\omega_2^2 + [-624.30 + 337.5]$
$\omega_2 = 1.785\text{ rad/s} = 1.79\text{ rad/s}$ *Resp.*

F18-10. $v_G = \omega r_G = \omega(0.75)$
$I_G = \frac{1}{12}(30)(1.5^2) = 5.625\text{ kg}\cdot\text{m}^2$
$T_1 = 0$

$T_2 = \frac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_2^2$
$= \frac{1}{2}(30)[\omega(0.75)]^2 + \frac{1}{2}(5.625)\omega_2^2 = 11.25\omega_2^2$
O bien,
$T_2 = \frac{1}{2}I_O\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left[5.625 + 30(0.75^2)\right]\omega_2^2$
$= 11.25\omega_2^2$
$(V_g)_1 = Wy_1 = 0$
$(V_g)_2 = -Wy_2 = -30(9.81)(0.75)$
$= -220.725\ \text{J}$
$(V_e)_1 = \frac{1}{2}ks_1^2 = 0$
$(V_e)_2 = \frac{1}{2}ks_2^2 = \frac{1}{2}(80)\left(\sqrt{2^2 + 1.5^2} - 0.5\right)^2 = 160\ \text{J}$
$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$
$0 + 0 = 11.25\omega_2^2 + (-220.725 + 160)$
$\omega_2 = 2.323\ \text{rad/s} = 2.32\ \text{rad/s}$ *Resp.*

F18-11. $(v_G)_2 = \omega_2 r_{G/CI} = \omega_2(0.75)$
$I_G = \frac{1}{12}(30)(1.5^2) = 5.625\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
$T_1 = 0$
$T_2 = \frac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_2^2$
$= \frac{1}{2}(30)[\omega_2(0.75)]^2 + \frac{1}{2}(5.625)\omega_2^2 = 11.25\omega_2^2$
$(V_g)_1 = Wy_1 = 30(9.81)(0.75\ \text{sen}\ 45°) = 156.08\ \text{J}$
$(V_g)_2 = -Wy_2 = 0$
$(V_e)_1 = \frac{1}{2}ks_1^2 = 0$
$(V_e)_2 = \frac{1}{2}ks_2^2 = \frac{1}{2}(300)(1.5 - 1.5\cos 45°)^2$
$= 28.95\ \text{J}$
$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$
$0 + (156.08 + 0) = 11.25\omega_2^2 + (0 + 28.95)$
$\omega_2 = 3.362\ \text{rad/s} = 3.36\ \text{rad/s}$ *Resp.*

F18-12. $(V_g)_1 = -Wy_1 = -[20(9.81)\ \text{N}](1\ \text{m}) = -196.2\ \text{J}$
$(V_g)_2 = 0$
$(V_e)_1 = \frac{1}{2}ks_1^2$
$= \frac{1}{2}(100\ \text{N/m})\left(\sqrt{(3\ \text{m})^2 + (2\ \text{m})^2} - 0.5\ \text{m}\right)^2$
$= 482.22\ \text{J}$
$(V_e)_2 = \frac{1}{2}ks_2^2 = \frac{1}{2}(100\ \text{N/m})(1\ \text{m} - 0.5\ \text{m})^2$
$= 12.5\ \text{J}$
$T_1 = 0$
$T_2 = \frac{1}{2}I_A\omega^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(20\ \text{kg})(2\ \text{m})^2\right]\omega^2$
$= 13.3333\omega^2$
$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$
$0 + [-196.2\ \text{J} + 482.22\ \text{J}]$
$= 13.3333\omega_2^2 + [0 + 12.5\ \text{J}]$
$\omega_2 = 4.53\ \text{rad/s}$ *Resp.*

Capítulo 19

F19-1. $\circlearrowleft + I_O\omega_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} M_O\,dt = I_O\omega_2$
$0 + \int_0^{4\ \text{s}} 3t^2\,dt = \left[60(0.3)^2\right]\omega_2$
$\omega_2 = 11.85\ \text{rad/s} = 11.9\ \text{rad/s}$ *Resp.*

F19-2. $\circlearrowleft + (H_A)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} M_A dt = (H_A)_2$
$0 + 300(6) = 300(0.4^2)\omega_2 + 300[\omega(0.6)](0.6)$
$\omega_2 = 11.54\ \text{rad/s} = 11.5\ \text{rad/s}$ *Resp.*
$\pm\rightarrow\quad m(v_1)_x + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_x dt = m(v_2)_x$
$0 + F_f(6) = 300[11.54(0.6)]$
$F_f = 346\ \text{N}$ *Resp.*

F19-3. $v_A = \omega_A r_{A/IC} = \omega_A(0.15)$
$\circlearrowright + \Sigma M_O = 0;\quad 9 - A_t(0.45) = 0\quad A_t = 20\ \text{N}$
$\circlearrowright + (H_C)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} M_C\,dt = (H_C)_2$
$0 + [20(5)](0.15)$
$= 10[\omega_A(0.15)](0.15)$
$+ \left[10(0.1^2)\right]\omega_A$
$\omega_A = 46.2\ \text{rad/s}$ *Resp.*

F19-4. $I_A = mk_A^2 = 10(0.08^2) = 0.064\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
$I_B = mk_B^2 = 50(0.15^2) = 1.125\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
$\omega_A = \left(\frac{r_B}{r_A}\right)\omega_B = \left(\frac{0.2}{0.1}\right)\omega_B = 2\omega_B$
$\circlearrowleft + I_A(\omega_A)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} M_A\,dt = I_A(\omega_A)_2$
$0 + 10(5) - \int_0^{5\ \text{s}} F(0.1)dt = 0.064[2(\omega_B)_2]$
$\int_0^{5\ \text{s}} F dt = 500 - 1.28(\omega_B)_2 \qquad (1)$
$\circlearrowright + I_B(\omega_B)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} M_B\,dt = I_B(\omega_B)_2$
$0 + \int_0^{5\ \text{s}} F(0.2)dt = 1.125(\omega_B)_2$
$\int_0^{5\ \text{s}} F dt = 5.625(\omega_B)_2 \qquad (2)$
Al igualar las ecuaciones (1) y (2),
$500 - 1.28(\omega_B)_2 = 5.625(\omega_B)_2$
$(\omega_B)_2 = 72.41\ \text{rad/s} = 72.4\ \text{rad/s}$ *Resp.*

F19-5. $(\stackrel{+}{\rightarrow})\quad m[(v_O)_x]_1 + \Sigma \int F_x\,dt = m[(v_O)_x]_2$

$$0 + (150\text{ N})(3\text{ s}) + F_A(3\text{ s}) = (50\text{ kg})(0.3\omega_2)$$

$$\circlearrowright + I_G\omega_1 + \Sigma \int M_G\,dt = I_G\omega_2$$

$$0 + (150\text{ N})(0.2\text{ m})(3\text{ s}) - F_A(0.3\text{ m})(3\text{ s}) = [(50\text{ kg})(0.175\text{ m})^2]\,\omega_2$$

$$\omega_2 = 37.3\text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$F_A = 36.53\text{ N}$$

Además,

$$I_{CI}\omega_1 + \Sigma \int M_{CI}\,dt = I_{CI}\omega_2$$

$$0 + [(150\text{ N})(0.2 + 0.3)\text{ m}](3\text{ s}) = [(50\text{ kg})(0.175\text{ m})^2 + (50\text{ kg})(0.3\text{ m})^2]\omega_2$$

$$\omega_2 = 37.3\text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

F19-6. $(+\uparrow)\ m[(v_G)_1]_y + \Sigma \int F_y\,dt = m[(v_G)_2]_y$

$$0 + N_A(3\text{ s}) - (150\text{ lb})(3\text{ s}) = 0$$

$$N_A = 150\text{ lb}$$

$$\circlearrowright + (H_{CI})_1 + \Sigma \int M_{CI}\,dt = (H_{CI})_2$$

$$0 + (25\text{ lb}\cdot\text{ft})(3\text{ s}) - [0.15(150\text{ lb})(3\text{ s})](0.5\text{ ft}) = \left[\tfrac{150}{32.2}\text{ slug}(1.25\text{ ft})^2\right]\omega_2 + \left(\tfrac{150}{32.2}\text{ slug}\right)[\omega_2(1\text{ ft})](1\text{ ft})$$

$$\omega_2 = 3.46\text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Soluciones a los problemas preliminares de dinámica

Capítulo 12

P12-1. a) $v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d}{dt}(2t^3) = 6t^2\Big|_{t=2\text{ s}} = 24\text{ m/s}$

b) $a\,ds = v\,dv, \quad v = 5s, \quad dv = 5\,ds$

$a\,ds = (5s)\,5\,ds$

$a = 25s\Big|_{s=1\text{ m}} = 25\text{ m/s}^2$

c) $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(4t + 5) = 4\text{ m/s}^2$

d) $v = v_0 + a_c t$

$v = 0 + 2(2) = 4\text{ m/s}$

e) $v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$

$v^2 = (3)^2 + 2(2)(4 - 0)$

$v = 5\text{ m/s}$

f) $a\,ds = v\,dv$

$\displaystyle\int_{s_1}^{s_2} s\,ds = \int_0^v v\,dv$

$s^2\Big|_4^5 = v^2\Big|_0^v$

$25 - 16 = v^2$

$v = 3\text{ m/s}$

g) $s = s_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}a_c t^2$

$s = 2 + 2(3) + \dfrac{1}{2}(4)(3)^2 = 26\text{ m}$

h) $dv = a\,dt$

$\displaystyle\int_0^v dv = \int_0^1 (8t^2)\,dt$

$v = 2.67t^3\Big|_0^1 = 2.67\text{ m/s}$

i) $v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d}{dt}(3t^2 + 2) = 6t\Big|_{t=2\text{ s}} = 12\text{ m/s}$

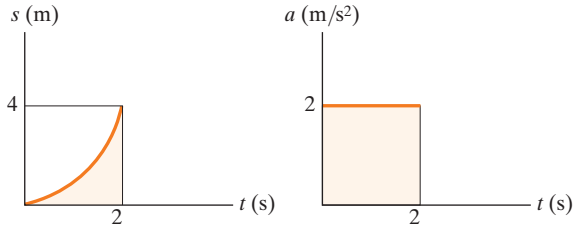
j) $v_{\text{prom}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{6\text{ m} - (-1\text{ m})}{10\text{ s} - 0} = 0.7\text{ m/s}\rightarrow$

$(v_{\text{sp}})_{\text{prom}} = \dfrac{s_T}{\Delta t} = \dfrac{7\text{ m} + 14\text{ m}}{10\text{ s} - 0} = 2.1\text{ m/s}$

P12-2. a) $v = 2t$

$s = t^2$

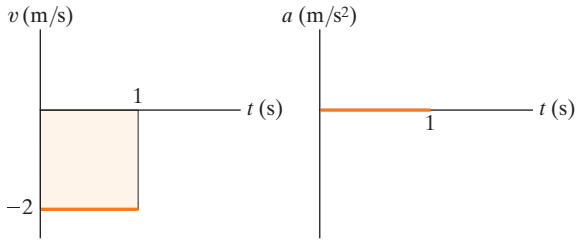
$a = 2$



b) $s = -2t + 2$

$v = -2$

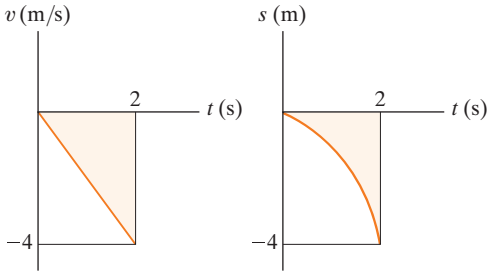
$a = 0$



c) $a = -2$

$v = -2t$

$s = -t^2$



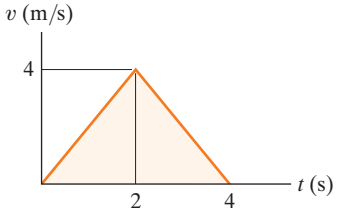
d)

$\Delta s = \displaystyle\int_0^3 v\,dt = \text{Área} = \frac{1}{2}(2)(2) + 2(3 - 2) = 4\text{ m}$

$s - 0 = 4\text{ m}, \qquad s = 4\text{ m}$

$a = \dfrac{dv}{dt} = \text{pendiente en } t = 3\text{ s}, \; a = 0$

e) Para $a = 2$,
$v = 2t$
Cuando $t = 2$ s, $v = 4$ m/s.
Para $a = -2$,
$$\int_4^v dv = \int_2^t -2\,dt$$
$$v - 4 = -2t + 4$$
$$v = -2t + 8$$



f) $$\int_1^v v\,dv = \int_0^2 a\,ds = \text{Área}$$
$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}(1)^2 = \frac{1}{2}(2)(4)$$
$$v = 3 \text{ m/s}$$

g) $v\,dv = a\,ds$ En $s = 1$ m, $v = 2$ m/s.
$$a = v\frac{dv}{ds} = v(\text{pendiente}) = 2(-2) = -4 \text{ m/s}$$

P12-3. a) $y = 4x^2$
$\dot{y} = 8x\dot{x}$
$\ddot{y} = (8\dot{x})\dot{x} + 8x(\ddot{x})$

b) $y = 3e^x$
$\dot{y} = 3e^x\dot{x}$
$\ddot{y} = (3e^x\dot{x})\dot{x} + 3e^x(\ddot{x})$

c) $y = 6 \text{ sen } x$
$\dot{y} = (6\cos x)\dot{x}$
$\ddot{y} = [(-6 \text{ sen } x)\dot{x}]\,\dot{x} + (6\cos x)(\ddot{x})$

P12-4. $y_A, t_{AB}, (v_B)_y$
$$20 = 0 + 40t_{AB}$$
$$0 = y_A + 0 + \frac{1}{2}(-9.81)(t_{AB})^2$$
$$(v_B)_y^2 = 0^2 + 2(-9.81)(0 - y_A)$$

P12-5. $x_B, t_{AB}, (v_B)_y$
$$x_B = 0 + (10\cos 30°)(t_{AB})$$
$$0 = 8 + (10 \text{ sen } 30°)t_{AB} + \frac{1}{2}(-9.81)t_{AB}^2$$
$$(v_B)_y^2 = 0^2 + 2(-9.81)(0 - 8)$$

P12-6. $x_B, y_B, (v_B)_y$
$$x_B = 0 + (60\cos 20°)(5)$$
$$y_B = 0 + (60 \text{ sen } 20°)(5) + \frac{1}{2}(-9.81)(5)^2$$
$$(v_B)_y = 60 \text{ sen } 20° + (-9.81)(5)$$

P12-7. a) $a_t = \dot{v} = 3 \text{ m/s}^2$
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(2)^2}{1} = 4 \text{ m/s}^2$$
$$a = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5 \text{ m/s}^2$$

b) $a_t = \dot{v} = 4 \text{ m/s}^2$
$$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$$
$$v^2 = 0 + 2(4)(2 - 0)$$
$$v = 4 \text{ m/s}$$
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(4)^2}{2} = 8 \text{ m/s}^2$$

c) $a_t = 0$
$$\rho = \left.\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right|_{x=0} = \frac{1 + 0}{4} = \frac{1}{4}$$
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(2)^2}{\frac{1}{4}} = 16 \text{ m/s}^2$$
$$a = \sqrt{(0)^2 + (16)^2} = 16 \text{ m/s}^2$$

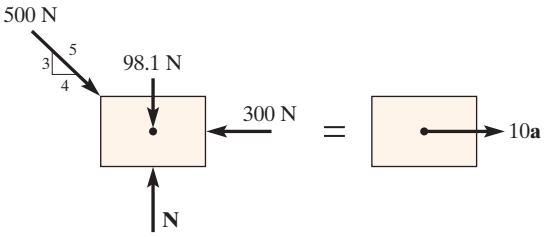
d) $a_t\,ds = v\,dv$
$$a_t\,ds = (4s + 1)(4\,ds)$$
$$a_t = (16s + 4)|_{s=0} = 4 \text{ m/s}^2$$
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(4(0) + 1)^2}{2} = 0.5 \text{ m/s}^2$$

e) $a_t\,ds = v\,dv$
$$\int_0^s 2s\,ds = \int_1^v v\,dv$$
$$s^2 = \frac{1}{2}(v^2 - 1)$$
$$v = \left.\sqrt{2s^2 + 1}\right|_{s = 2 \text{ m}} = 3 \text{ m/s}$$
$$a_t = \dot{v} = 2(2) = 4 \text{ m/s}^2$$
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(3)^2}{3} = 3 \text{ m/s}^2$$
$$a = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5 \text{ m/s}^2$$

f) $a_t = \dot{v} = 8t\Big|_{t=1} = 8 \text{ m/s}^2$
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(4(1)^2 + 2)^2}{6} = 6 \text{ m/s}^2$$
$$a = \sqrt{(8)^2 + (6)^2} = 10 \text{ m/s}^2$$

Capítulo 13

P13-1. a)

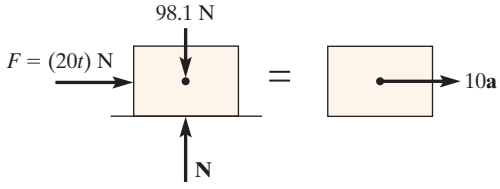


$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = ma_x; \quad \left(\frac{4}{5}\right)(500\text{ N}) - 300\text{ N} = 10a$$

$$a = 10\text{ m/s}^2$$

$$\pm\rightarrow v = v_0 + a_c t; \quad v = 0 + 10(2) = 20\text{ m/s}$$

b)



$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = ma_x; \quad 20t = 10a$$

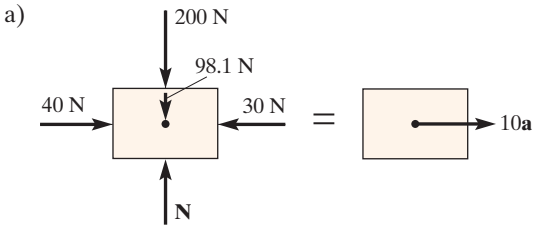
$$a = 2t$$

$$dv = a\,dt; \quad \int_0^v dv = \int_0^2 2t\,dt$$

$$v = 4\text{ m/s}$$

P13-2.

a)



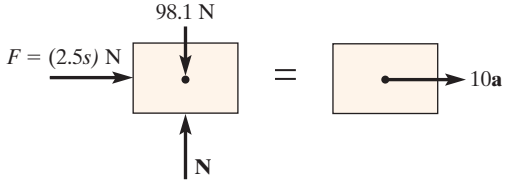
$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = ma_x; \quad 40\text{ N} - 30\text{ N} = 10a$$

$$a = 1\text{ m/s}^2$$

$$\pm\rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0); \quad v^2 = (3)^2 + 2(1)\,(8 - 0)$$

$$v = 5\text{ m/s}$$

b)



$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = ma_x; \quad 2.5s = 10a$$

$$a = 2.5s$$

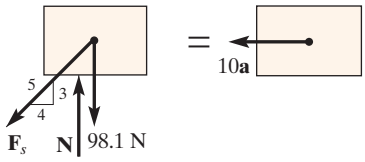
$$v\,dv = a\,ds$$

$$\int_3^v v\,dv = \int_0^8 2.5s\,ds$$

$$v^2 - (3)^2 = 2.5(8 - 0)^2$$

$$v = 13\text{ m/s}$$

P13-3.

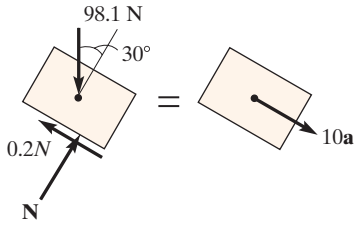


$$F_s = kx = (10\text{ N/m})\,(5\text{ m} - 1\text{ m}) = 40\text{ N}$$

$$\pm\leftarrow \Sigma F_x = ma_x; \quad \frac{4}{5}(40\text{ N}) = 10a$$

$$a = 3.2\text{ m/s}^2$$

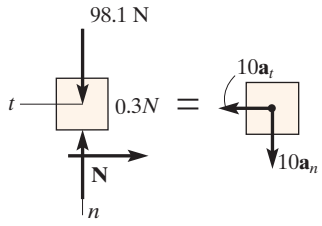
P13-4.



$$\searrow^{+} \Sigma F_x = ma_x; \quad 98.1 \text{ sen } 30° - 0.2N = 10a$$

$$^{+}\nearrow \Sigma F_y = ma_y; \quad N - 98.1 \cos 30° = 0$$

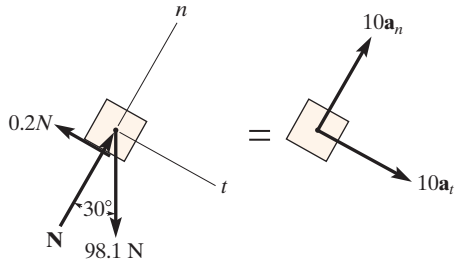
P13-5. a)



$$\pm\leftarrow \Sigma F_t = ma_t; \quad -0.3N = 10a_t$$

$$+\downarrow \Sigma F_n = ma_n; \quad 98.1 - N = 10\left(\frac{(6)^2}{10}\right)$$

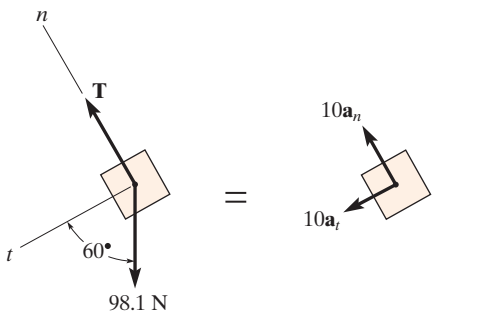
b)



$\searrow^{+}\Sigma F_t = ma_t$; 98.1 si $30° - 0.2N = 10a_t$

$\nearrow^{+}\Sigma F_n = ma_n$; $N - 98.1\cos 30° = 10\left(\frac{(4)^2}{5}\right)$

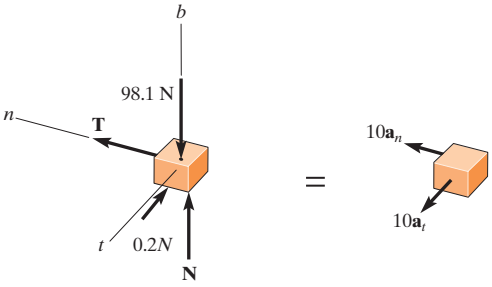
c)



$\swarrow^{+}\Sigma F_t = ma_t$; $98.1\cos 60° = 10a_t$

$\nwarrow^{+}\Sigma F_n = ma_n$; $T - 98.1\,\text{sen}\,60° = 10\left(\frac{8^2}{6}\right)$

P13-6. a)

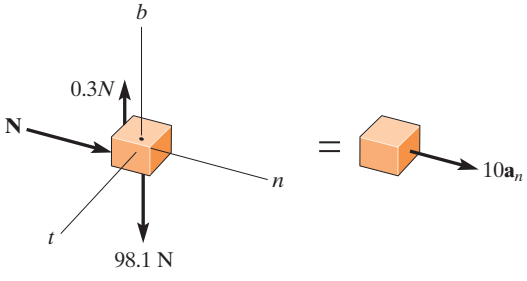


$\Sigma F_b = 0$; $N - 98.1 = 0$

$\Sigma F_t = ma_t$; $-0.2N = 10a_t$

$\Sigma F_n = ma_n$; $T = 10\frac{(8)^2}{4}$

b)



$\Sigma F_b = 0$; $0.3N - 98.1 = 0$

$\Sigma F_t = ma_t$; $0 = 0$

$\Sigma F_n = ma_n$; $N = 10\frac{v^2}{2}$

Capítulo 14

P14-1. a) $U = \frac{3}{5}(500\text{ N})(2\text{ m}) = 600\text{ J}$

b) $U = 0$

c) $U = \int_0^2 6s^2\,ds = 2(2)^3 = 16\text{ J}$

d) $U = 100\text{ N}\left(\frac{3}{5}(2\text{ m})\right) = \frac{3}{5}(100\text{ N})(2\text{ m}) = 120\text{ J}$

e) $U = \frac{4}{5}(\text{Área}) = \frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}(1)(20) + (1)(20)\right] = 24\text{ J}$

f) $U = \frac{1}{2}(10\text{ N/m})((3\text{ m})^2 - (1\text{ m})^2) = 40\text{ J}$

g) $U = -\left(\frac{4}{5}\right)(100\text{ N})(2\text{ m}) = -160\text{ J}$

P14-2. a) $T = \frac{1}{2}(10\text{ kg})(2\text{ m/s})^2 = 20\text{ J}$

b) $T = \frac{1}{2}(10\text{ kg})(6\text{ m/s})^2 = 180\text{ J}$

P14-3. a) $V = (100\text{ N})(2\text{ m}) = 200\text{ J}$

b) $V = (100\text{ N})(3\text{ m}) = 300\text{ J}$

c) $V = 0$

P14-4. a) $V = \frac{1}{2}(10\text{ N/m})(5\text{ m} - 4\text{ m})^2 = 5\text{ J}$

b) $V = \frac{1}{2}(10\text{ N/m})(10\text{ m} - 4\text{ m})^2 = 180\text{ J}$

c) $V = \frac{1}{2}(10\text{ N/m})(5\text{ m} - 4\text{ m})^2 = 5\text{ J}$

Capítulo 15

P15-1. a) $I = (100\text{ N})(2\text{ s}) = 200\text{ N}\cdot\text{s}\,\swarrow$

b) $I = (200\text{ N})(2\text{ s}) = 400\text{ N}\cdot\text{s}\downarrow$

c) $I = \int_0^2 6t\,dt = 3(2)^2 = 12\text{ N}\cdot\text{s}\,\searrow$

d) $I = \text{Área} = \frac{1}{2}(1)(20) + (2)(20) = 50\text{ N}\cdot\text{s}\,\nearrow$

e) $I = (80\text{ N})(2\text{ s}) = 160\text{ N}\cdot\text{s}\rightarrow$

f) $I = (60\text{ N})(2\text{ s}) = 120\text{ N}\cdot\text{s}\,\nearrow$

P15-2. a) $L = (10\text{ kg})(10\text{ m/s}) = 100\text{ kg}\cdot\text{m/s}\,\searrow$

b) $L = (10\text{ kg})(2\text{ m/s}) = 20\text{ kg}\cdot\text{m/s}\,\swarrow$

c) $L = (10\text{ kg})(3\text{ m/s}) = 30\text{ kg}\cdot\text{m/s}\rightarrow$

Capítulo 16

P16-1. a) $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A\,(\text{pasador})}$

$v_B = 18\ \text{m/s} + 2\omega$ (60°)

Además,

$-v_B\mathbf{j} = -18\mathbf{j} + (-\omega\mathbf{k}) \times (-2\cos 60°\mathbf{i} - 2\,\text{sen}\,60°\mathbf{j})$

b) $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A\,(\text{pasador})}$

$(v_B)_x + (v_B)_y = 4(0.5)\ \text{m/s} + 4(0.5)\ \text{m/s}$ (30°)

Además,

$(v_B)_x\mathbf{i} + (v_B)_y\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + (-4\mathbf{k}) \times (-0.5\cos 30°\mathbf{i} + \mathbf{0.5}\,\text{sen}\,30°\mathbf{j})$

c) $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A\,(\text{pasador})}$

$v_B = 6\ \text{m/s} + \omega(5)$ (45°, 30°)

Además,

$v_B\cos 45°\mathbf{i} + v_B\,\text{sen}\,45°\mathbf{j} = 6\mathbf{i} + (\omega\mathbf{k}) \times (4\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$

d) $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A\,(\text{pasador})}$

$v_B = 6\ \text{m/s} + \omega(3)$ (30°)

Además,

$v_B\mathbf{i} = 6\cos 30°\mathbf{i} + 6\,\text{sen}\,30°\mathbf{j} + (\omega\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i})$

e) $v_A = 12\ \text{m/s} = \omega(0.5\ \text{m})\quad \omega = 24\ \text{rad/s}$

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A\,(\text{pasador})}$

$(v_B)_X + (v_B)_y = 12\,\text{m/s} + (24)(0.5)$

Además,

$(v_B)_x\mathbf{i} + (v_B)_y\mathbf{j} = 12\mathbf{j} + (24\mathbf{k}) \times (0.5\mathbf{j})$

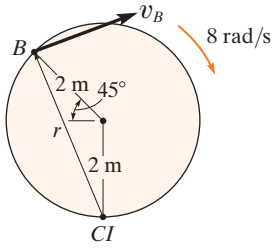
f) $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A\,(\text{pasador})}$

$v_B = 6\ \text{m/s} + \omega(5)$ (4, 5, 3)

Además,

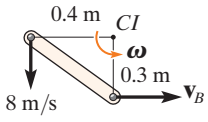
$v_B\mathbf{i} = 6\mathbf{i} + (\omega\mathbf{k}) \times (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$

P16-2. a)

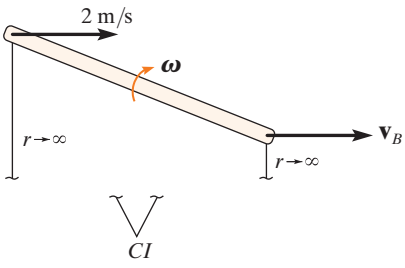


$r = 2\sqrt{(2\cos 45°)^2 + (2 + 2\,\text{sen}\,45°)^2}$

b)

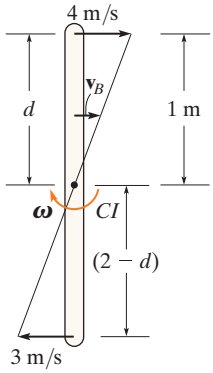


c)

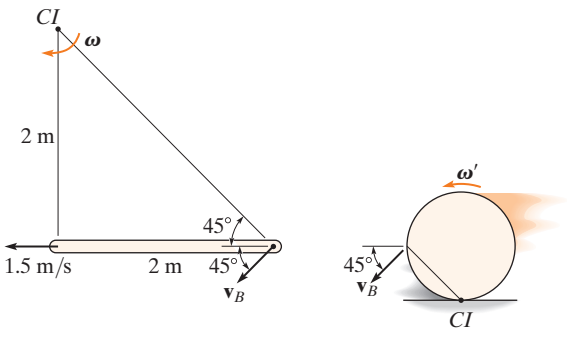


$v_B = 2\ \text{m/s}, \omega = 0$

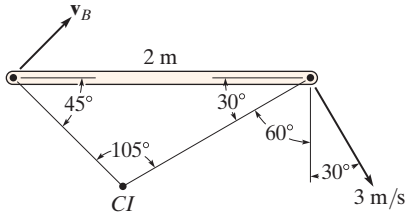
d)



e)



f)



P16–3. a)

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A\ (\text{pasador})}$$

$$a_B = 2\ \text{m/s}^2 + \frac{(3)^2}{3} + 2\alpha + (2.12)^2(2)$$

45° 45°

O bien,

$$-a_B\mathbf{j} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + (-\alpha\mathbf{k}) \times (2\ \text{sen}\,45°\mathbf{i} + 2\ \cos 45°\mathbf{j}) - (2.12)^2(2\ \text{sen}\,45°\mathbf{i} + 2\ \cos 45°\mathbf{j})$$

b)

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A\ (\text{pasador})}$$

$$(a_B)_x + (a_B)_y = (2)(2)\ \text{m/s}^2 + \alpha(2) + (4)^2(2)$$

45° 45°

O bien,

$$(a_B)_x\mathbf{i} + (a_B)_y\mathbf{j} = 4\mathbf{i} + (-\alpha\mathbf{k}) \times (-2\ \cos 45°\mathbf{i} + 2\ \text{sen}\,45°\mathbf{j}) - (4)^2(-2\ \cos 45°\mathbf{i} + 2\ \text{sen}\,45°\mathbf{j})$$

c)

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A\ (\text{pasador})}$$

$$(a_B)_x + (6)^2(1) = 2(2) + (3)^2(2) + \alpha(4)$$

O bien,

$$(a_B)_x\mathbf{i} - 36\mathbf{j} = 4\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + (-\alpha\mathbf{k}) \times (4\mathbf{i})$$

d)

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A\ (\text{pasador})}$$

$$a_B = 6 + \alpha(2) + (3)^2(2)$$

60°

O bien,

$$a_B\mathbf{i} = -6\ \cos 60°\mathbf{i} - 6\ \text{sen}\,60°\mathbf{j} + (-\alpha\mathbf{k}) \times (-2\mathbf{i}) - (3)^2(-2\mathbf{i})$$

e)

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A\ (\text{pasador})}$$

$$a_B = 8(0.5) + (4)^2(0.5) + \alpha(2) + (1.15)^2(2)$$

30° 30°

O bien,

$$-a_B\mathbf{i} = -4\mathbf{j} + 8\mathbf{i} + (-\alpha\mathbf{k}) \times (-2\ \cos 30°\mathbf{i} - 2\ \text{sen}\,30°\mathbf{j}) - (1.15)^2(-2\ \cos 30°\mathbf{i} - 2\ \text{sen}\,30°\mathbf{j})$$

f)

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A\ (\text{pasador})}$$

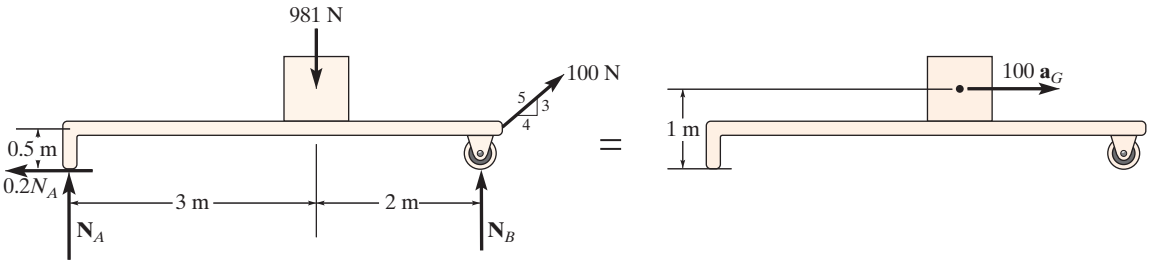
$$(a_B)_x + (a_B)_y = 2(0.5) + 2(0.5) + (4)^2(0.5)$$

O bien,

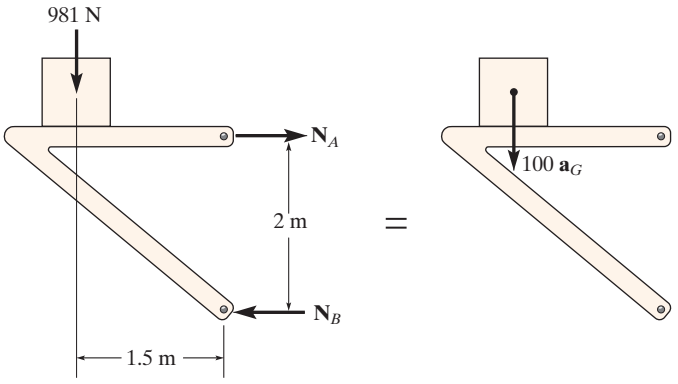
$$(a_B)_x\mathbf{i} + (a_B)_y\mathbf{j} = -1\mathbf{j} + (-2\mathbf{k}) \times (0.5\mathbf{j}) - (4)^2(0.5\mathbf{j})$$

Capítulo 17

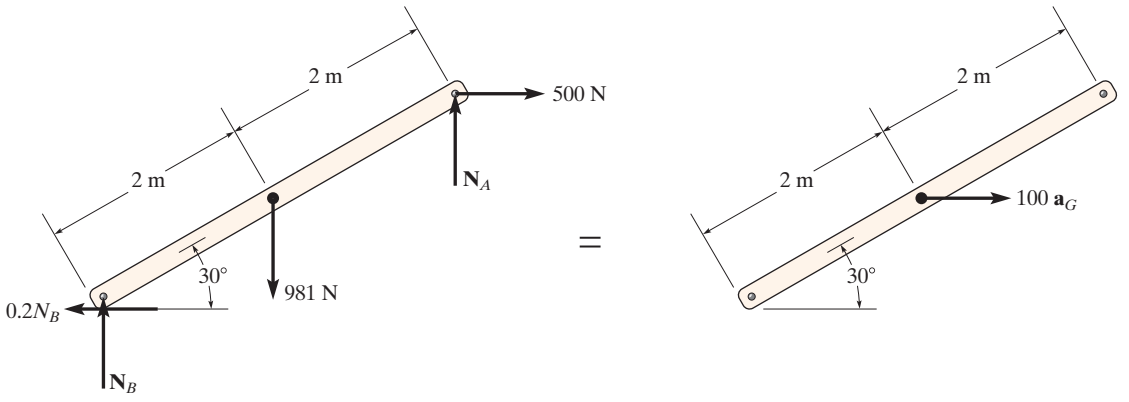
P17-1. a)



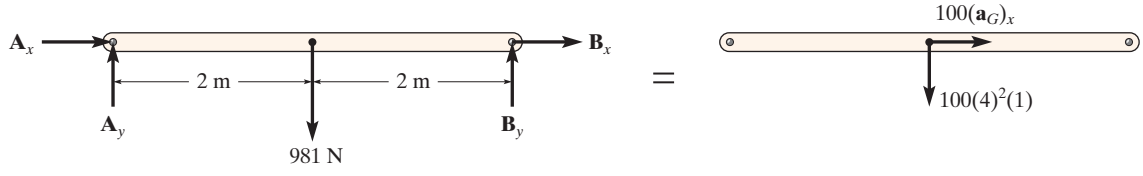
b)



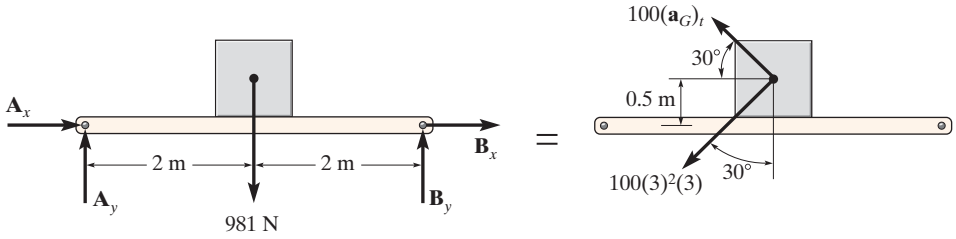
c)



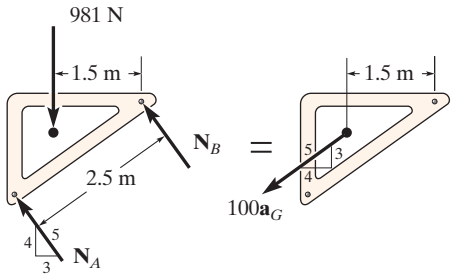
d)



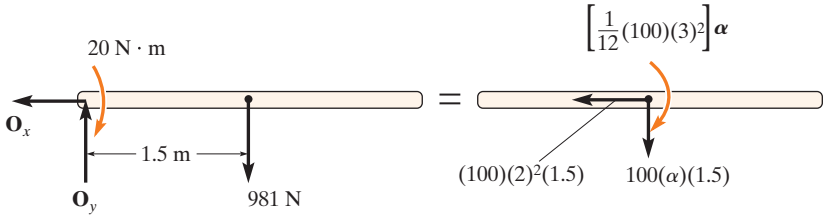
e)


$\mathbf{A}_x$
$\mathbf{A}_y$
2 m
2 m
$\mathbf{B}_x$
$\mathbf{B}_y$
981 N
=
$100(\mathbf{a}_G)_t$
30°
0.5 m
$100(3)^2(3)$
30°

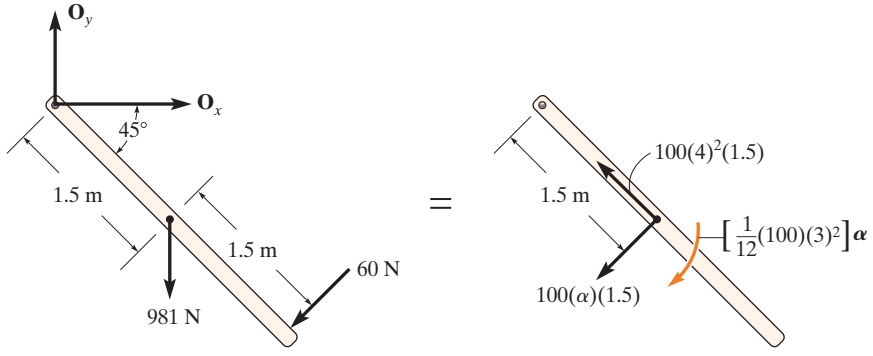
f)


981 N
1.5 m
$\mathbf{N}_B$
2.5 m
5
4
3
$\mathbf{N}_A$
=
1.5 m
5
3
4
$100\mathbf{a}_G$

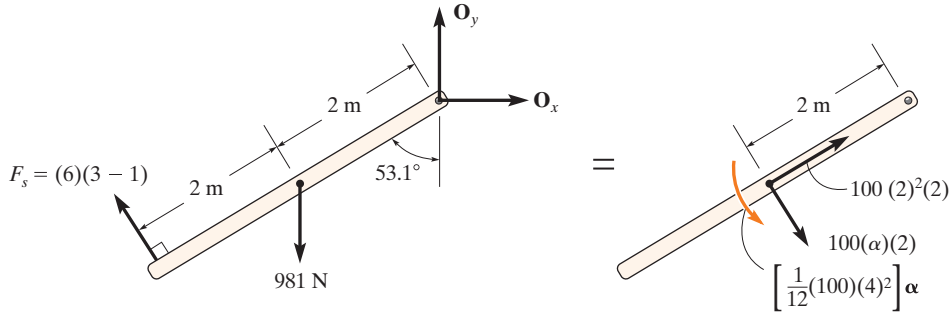
P17-2. a)


20 N · m
$\mathbf{O}_x$
$\mathbf{O}_y$
1.5 m
981 N
=
$\left[\frac{1}{12}(100)(3)^2\right]\boldsymbol{\alpha}$
$(100)(2)^2(1.5)$
$100(\alpha)(1.5)$

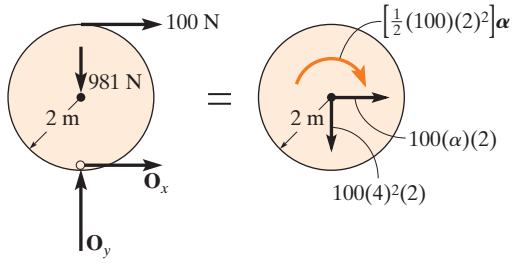
b)


$\mathbf{O}_y$
$\mathbf{O}_x$
45°
1.5 m
1.5 m
981 N
60 N
=
$100(4)^2(1.5)$
1.5 m
$\left[\frac{1}{12}(100)(3)^2\right]\boldsymbol{\alpha}$
$100(\alpha)(1.5)$

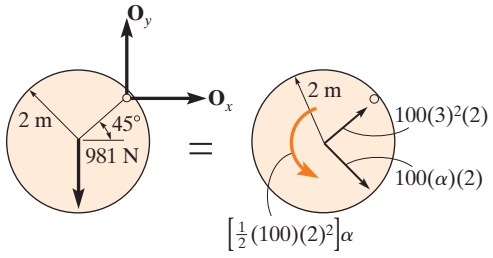
c)


$\mathbf{O}_y$
$\mathbf{O}_x$
2 m
$F_s = (6)(3-1)$
2 m
53.1°
981 N
=
2 m
$100\ (2)^2(2)$
$100(\alpha)(2)$
$\left[\frac{1}{12}(100)(4)^2\right]\boldsymbol{\alpha}$

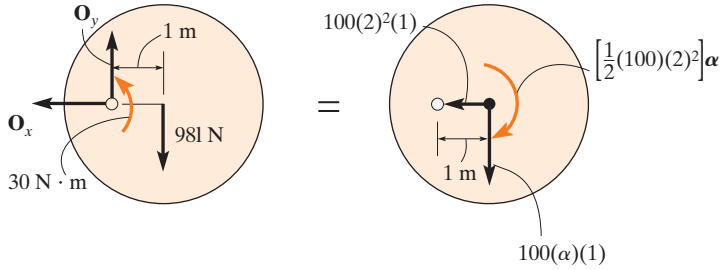
d)



e)



f)



Capítulo 18

P18-1. a) $T = \frac{1}{2}\left[\frac{100(2)^2}{2}\right](3)^2 = 900 \text{ J}$

b) $T = \frac{1}{2}(100)[2(1)]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}(100)(6)^2\right](2)^2$

$= 800 \text{ J}$

Además,

$T = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}(100)(6)^2 + 100(1)^2\right](2)^2 = 800 \text{ J}$

c) $T = \frac{1}{2}(100)[2(2)]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(100)(2)^2\right](2)^2$

$= 1200 \text{ J}$

Además,

$T = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(100)(2)^2 + 100(2)^2\right](2)^2$

$= 1200 \text{ J}$

d) $T = \frac{1}{2}(100)[2(1.5)]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}(100)(3)^2\right](2)^2$

$= 600 \text{ J}$

Además,

$T = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}(100)(3)^2 + 100(1.5)^2\right](2)^2$

$= 600 \text{ J}$

e) $T = \frac{1}{2}(100)[4(2)]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(100)(2)^2\right](4)^2$

$= 4800 \text{ J}$

Además,

$T = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(100)(2)^2 + 100(2)^2\right](4)^2$

$= 4800 \text{ J}$

f) $T = \frac{1}{2}(100)[(4)(2)]^2 = 3200 \text{ J}$

Capítulo 19

P19-1. a) $H_G = \left[\frac{1}{2}(100)(2)^2\right](3) = 600 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \circlearrowright$

$H_O = \left[\frac{1}{2}(100)(2)^2 + 100(2)^2\right](3)$

$= 1800 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \circlearrowright$

b) $H_G = \left[\frac{1}{12}(100)(3)^2\right](4) = 300 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \curvearrowright$

$H_O = \left[\frac{1}{12}(100)(3)^2 + (100)(1.5)^2\right](4)$

$= 1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \curvearrowright$

c) $H_G = \left[\frac{1}{2}(100)(2)^2\right](4) = 800 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \curvearrowright$

$H_O = \left[\frac{1}{2}(100)(2)^2 + (100)(2)^2\right](4)$

$= 2400 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \curvearrowright$

d) $H_G = \left[\frac{1}{12}(100)(4)^2\right]3 = 400 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \curvearrowleft$

$H_O = \left[\frac{1}{12}(100)(4)^2 + (100)(1)^2\right] 3$

$= 700 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \curvearrowleft$

P19-2. a) $\int M_O dt = \left(\frac{4}{5}\right)(500)(2)(3) = 2400 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m} \curvearrowright$

b) $\int M_O dt = \left[2(20) + \frac{1}{2}(3 - 2)(20)\right]4$

$= 200 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m} \curvearrowright$

c) $\int M_O dt = \frac{3}{5}\int_0^3 4(2t + 2)dt = 36 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m} \curvearrowright$

d) $\int M_O dt = \int_0^3 (30t^2)dt = 270 \curvearrowright$

Soluciones a los problemas de repaso

Capítulo 12

R12-1. $s = t^3 - 9t^2 + 15t$

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 15$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 18$$

$a_{máx}$ ocurre en $t = 10$ s.

$a_{máx} = 6(10) - 18 = 42$ ft/s^2 *Resp.*

$v_{máx}$ por lo tanto, en $t = 10$ s

$v_{máx} = 3(10)^2 - 18(10) + 15 = 135$ ft/s *Resp.*

R12-2. $(+\rightarrow)$ $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$

$s = 0 + 12(10) + \frac{1}{2}(-2)(10)^2$

$s = 20.0$ ft *Resp.*

R12-3. $v = \frac{ds}{dt} = 1800(1 - e^{-0.3t})$

$$\int_0^x ds = \int_0^t 1800(1 - e^{-0.3t})\, dt$$

$$s = 1800\left(t + \frac{1}{0.3} e^{-0.3t}\right) - 6000$$

En $t = 3$ s

$$s = 1800\left(3 + \frac{1}{0.3} e^{-0.3(3)}\right) - 6000$$

$s = 1839.4$ mm $= 1.84$ m *Resp.*

R12-4. $0 \le t \le 5$ $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20}{5} = 4$ m/s^2 *Resp.*

$5 \le t \le 20$ $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20 - 20}{20 - 5} = 0$ m/s^2 *Resp.*

$20 \le t \le 30$ $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 20}{30 - 20} = -2$ m/s^2 *Resp.*

At $t_1 = 5$ s, $t_2 = 20$ s, y $t_3 = 30$ s,

$s_1 = A_1 = \frac{1}{2}(5)(20) = 50$ m *Resp.*

$s_2 = A_1 + A_2 = 50 + 20(20 - 5) = 350$ m *Resp.*

$s_3 = A_1 + A_2 + A_3 = 350$

$+ \frac{1}{2}(30 - 20)(20) = 450$ m *Resp.*

R12-5. $v_A = 20\mathbf{i}$

$v_B = 21.21\mathbf{i} + 21.21\mathbf{j}$

$v_C = 40\mathbf{i}$

$$\mathbf{a}_{AB} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{21.21\mathbf{i} + 21.21\mathbf{j} - 20\mathbf{i}}{3}$$

$\mathbf{a}_{AB} = \{0.404\mathbf{i} + 7.07\mathbf{j}\}$ m/s^2 *Resp.*

$$\mathbf{a}_{AC} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{40\mathbf{i} - 20\mathbf{i}}{8}$$

$\mathbf{a}_{AC} = \{2.50\mathbf{i}\}$ m/s^2 *Resp.*

R12-6. $(+\rightarrow)$ $s = s_0 + v_0 t$

$126 = 0 + (v_0)_x (3.6)$

$(v_0)_x = 35$ ft/s

$(+\uparrow)$ $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$

$O = 0 + (v_0)_y (3.6) + \frac{1}{2}(-32.2)(3.6)^2$

$(v_0)_y = 57.96$ ft/s

$v_0 = \sqrt{(35)^2 + (57.96)^2} = 67.7$ ft/s *Resp.*

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{57.96}{35}\right) = 58.9°$ *Resp.*

R12-7. $v\, dv = a_t\, ds$

$$\int_4^v v\, dv = \int_0^{10} 0.05s\, ds$$

$0.5v^2 - 8 = \frac{0.05}{2}(10)^2$

$v = 4.583 = 4.58$ m/s *Resp.*

$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(4.583)^2}{50} = 0.420$ m/s^2

$a_t = 0.05(10) = 0.5$ m/s^2

$a = \sqrt{(0.420)^2 + (0.5)^2} = 0.653$ m/s^2 *Resp.*

R12-8. $dv = a\, dt$

$$\int_0^v dv = \int_0^t 0.5e^t\, dt$$

$v = 0.5(e^t - 1)$

Cuando $t = 2$ s, $v = 0.5(e^2 - 1) = 3.195$ m/s

$= 3.19$ m/s *Resp.*

Cuando $t = 2$ s $a_t = 0.5e^2 = 3.695$ m/s^2

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{3.195^2}{5} = 2.041 \text{ m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{3.695^2 + 2.041^2} = 4.22 \text{ m/s}^2 \quad \textit{Resp.}$$

R12-9. $r = 2$ m $\quad \theta = 5t^2$

$\dot{r} = 0 \quad \dot{\theta} = 10t$

$\ddot{r} = 0 \quad \ddot{\theta} = 10$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta$$
$$= \left[0 - 2(10t)^2\right]\mathbf{u}_r + [2(10) + 0]\mathbf{u}_\theta$$
$$= \{-200t^2\mathbf{u}_r + 20\mathbf{u}_\theta\} \text{ m/s}^2$$

Cuando $\theta = 30° = 30\left(\frac{\pi}{180}\right) = 0.524$ rad

$$0.524 = 5t^2$$
$$t = 0.324 \text{ s}$$

$$\mathbf{a} = \left[-200(0.324)^2\right]\mathbf{u}_r + 20\mathbf{u}_\theta$$
$$= \{-20.9\mathbf{u}_r + 20\mathbf{u}_\theta\} \text{ m/s}^2$$
$$a = \sqrt{(-20.9)^2 + (20)^2} = 29.0 \text{ m/s}^2 \quad \textit{Resp.}$$

R12-10. $4s_B + s_A = l$

$$4v_B = -v_A$$
$$4a_B = -a_A$$
$$4a_B = -0.2$$
$$a_B = -0.05 \text{ m/s}^2$$
$$(+\downarrow) \quad v_B = (v_B)_0 + a_B t$$
$$-8 = 0 - (0.05)(t)$$
$$t = 160 \text{ s} \quad \textit{Resp.}$$

R12-11. $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$

$$[500 \leftarrow] = [600 \overset{75°}{\measuredangle \theta}] + v_{B/A}$$
$$(\pm) \quad 500 = -600\cos 75° + (v_{B/A})_x$$
$$(v_{B/A})_x = 655.29 \leftarrow$$
$$(+\uparrow) \quad 0 = -600 \text{ sen } 75° + (v_{B/A})_y$$
$$(v_{B/A})_y = 579.56 \uparrow$$
$$(v_{B/A}) = \sqrt{(655.29)^2 + (579.56)^2}$$
$$v_{B/A} = 875 \text{ km/h} \quad \textit{Resp.}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{579.56}{655.29}\right) = 41.5° \measuredangle \quad \textit{Resp.}$$

Capítulo 13

R13-1. $20 \text{ km/h} = \frac{20(10)^3}{3600} = 5.556$ m/s

$$(\pm) \quad v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$$
$$a = -0.3429 \text{ m/s}^2 = 0.3429 \text{ m/s}^2 \rightarrow$$
$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = ma_x; \quad F = 250(0.3429) = 85.7 \text{ N} \quad \textit{Resp.}$$

R13-2. $\nwarrow + \Sigma F_y = ma_y; \quad N_C - 50(9.81)\cos 30° = 0$

$$N_C = 424.79$$

$$\nearrow + \Sigma F_x = ma_x; \quad 3T - 0.3(424.79) - 50(9.81) \text{ sen } 30° = 50a_C \quad \textbf{(1)}$$

Cinemática, $2s_C + (s_C - s_p) = l$

Al obtener dos derivadas con respecto al tiempo, resulta $3a_C = a_p$

Por lo tanto, $a_C = \frac{6}{3} = 2$

Si se sustituye en la ecuación (1) y se resuelve,

$$T = 158 \text{ N} \quad \textit{Resp.}$$

R13-3. Suponga que los dos bloques se mueven juntos. Entonces,

$$50 \text{ lb} = \frac{50 + 20}{32.2}a$$
$$a = 23 \text{ m/s}^2$$

Así, la fuerza de fricción sobre el bloque B es

$$F_B = \frac{50}{32.2}(23) = 35.7 \text{ lb}$$

La fuerza de fricción máxima entre los bloques A y B es

$$F_{\text{máx}} = 0.4(20) = 8 \text{ lb} < 35.7 \text{ 1b}$$

Los bloques tienen aceleraciones diferentes.

Bloque A:

$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = ma_x; \quad 20(0.3) = \frac{20}{32.2}a_A$$
$$a_A = 70.8 \text{ ft/s}^2 \quad \textit{Resp.}$$

Bloque B:

$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = ma_x; \quad 20(0.3) = \frac{50}{32.2}a_B$$
$$a_B = 3.86 \text{ ft/s}^2 \quad \textit{Resp.}$$

R13-4. ***Cinemática:*** Dado que se conoce el movimiento de la caja, primero se determinará su aceleración **a**.

$$a = v\frac{dv}{ds} = (0.05s^{3/2})\left[(0.05)\left(\frac{3}{2}\right)s^{1/2}\right]$$
$$= 0.00375s^2 \text{ m/s}^2$$

Cuando $s = 10$ m,

$$a = 0.00375(10^2) = 0.375 \text{ m/s}^2 \rightarrow$$

Diagrama de cuerpo libre: La fricción cinética $F_f = \mu_k N = 0.2N$ debe actuar hacia la izquierda para oponerse al movimiento de la caja que está a la derecha.

Ecuaciones de movimiento: Aquí, $a_y = 0$. Por lo tanto,

$$+\uparrow \Sigma F_y = ma_y; \quad N - 20(9.81) = 20(0)$$
$$N = 196.2 \text{ N}$$

Si se utilizan los resultados de **N** y **a**,

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \quad T - 0.2(196.2) = 20(0.375)$$
$$T = 46.7 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

R13-5. $+\nwarrow \Sigma F_n = ma_n; \quad T - 30(9.81)\cos\theta = 30\left(\frac{v^2}{4}\right)$

$+\nearrow \Sigma F_t = ma_t; \quad -30(9.81)\operatorname{sen}\theta = 30a_t$

$$a_t = -9.81 \operatorname{sen}\theta$$

$a_t\, ds = v\, dv$ Como $ds = 4\, d\theta$, entonces

$$-9.81\int_0^\theta \operatorname{sen}\theta\,(4\, d\theta) = \int_4^v v dv$$

$$9.81(4)\cos\theta\Big|_0^\theta = \frac{1}{2}(v)^2 - \frac{1}{2}(4)^2$$

$$39.24(\cos\theta - 1) + 8 = \frac{1}{2}v^2$$

En $\theta = 20°$

$v = 3.357$ m/s

$a_t = -3.36 \text{ m/s}^2 = 3.36 \text{ m/s}^2 \ \swarrow$ *Resp.*

$T = 361$ N *Resp.*

R13-6. $\Sigma F_z = ma_z; \quad N_z - mg = 0 \quad N_z = mg$

$$\Sigma F_x = ma_n; \quad 0.3(mg) = m\left(\frac{v^2}{r}\right)$$

$$v = \sqrt{0.3gr} = \sqrt{0.3(32.2)(3)} = 5.38 \text{ ft/s} \qquad \textit{Resp.}$$

R13-7. $v = \frac{1}{8}x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta = \frac{1}{4}x\Big|_{x=-6} = -1.5 \quad \theta = -56.31°$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{4}$$

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} = \frac{\left[1 + (-1.5)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{1}{4}\right|} = 23.436 \text{ ft}$$

$$+\nearrow \Sigma F_n = ma_n; \quad N - 10\cos 56.31° = \left(\frac{10}{32.2}\right)\left(\frac{(5)^2}{23.436}\right)$$
$$N = 5.8783 = 5.88 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

$$+\searrow \Sigma F_t = ma_t; \quad -0.2(5.8783) + 10 \operatorname{sen} 56.31° = \left(\frac{10}{32.2}\right)a_t$$
$$a_t = 23.0 \text{ ft/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

R13-8. $r = 0.5$ m

$\dot{r} = 3$ m/s $\quad \dot{\theta} = 6$ rad/s

$\ddot{r} = 1 \text{ m/s}^2 \quad \ddot{\theta} = 2$ rad/s

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 1 - 0.5(6)^2 = -17$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0.5(2) + 2(3)(6) = 37$$

$\Sigma F_r = ma_r; \quad F_r = 4(-17) = -68$ N

$\Sigma F_\theta = ma_\theta; \quad N_\theta = 4(37) = 148$ N

$\Sigma F_z = ma_z; \quad N_z = 4(9.81) = 0$

$N_z = 39.24$ N

$F_r = -68$ N *Resp.*

$N = \sqrt{(148)^2 + (39.24)^2} = 153$ N *Resp.*

Capítulo 14

R14-1. $+\nwarrow \Sigma F_y = 0; \quad N_C - 150\cos 30° = 0$

$N_C = 129.9$ lb

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$0 + 150 \operatorname{sen} 30°(30) - (0.3)129.9(30) = \frac{1}{2}\left(\frac{150}{32.2}\right)v_2^2$$

$v_2 = 21.5$ ft/s *Resp.*

R14-2. $r_{AB} = r_B - r_A = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$

$$T_1 + \Sigma\int F ds = T_2$$

$$0 + 2(10 - 1) + \int_4^0 10 dx + \int_0^8 6y\, dy + \int_{10}^1 2z\, dz = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{32.2}\right)v^2 n$$

$v_B = 47.8$ ft/s *Resp.*

R14-3. $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$$0 + 1.5(10) = \frac{1}{2}\left(\frac{1.5}{32.2}\right)v_B^2$$

$v_B = 25.4$ ft/s *Resp.*

R14-4. El trabajo realizado por F depende de la diferencia en la longitud de la cuerda $AC–BC$.

$$T_A + \Sigma U_{A-B} = T_B$$

$$0 + F\left[\sqrt{(0.3)^2 + (0.3)^2} - \sqrt{(0.3)^2 + (0.3 - 0.15)^2}\right] - 0.5(9.81)(0.15)$$

$$-\frac{1}{2}(100)(0.15)^2 = \frac{1}{2}(0.5)(2.5)^2$$

$$F(0.0889) = 3.423$$

$$F = 38.5 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

R14-5. $(+\uparrow)$ $\quad v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$

$$(12)^2 = 0 + 2a_c(10 - 0)$$

$$a_c = 7.20 \text{ ft/s}^2$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = ma_y; \quad 2T - 50 = \frac{50}{32.2}(7.20)$$

$$T = 30.6 \text{ lb}$$

$$s_C + (s_C - s_M) = l$$

$$v_M = 2v_C$$

$$v_M = 2(12) = 24 \text{ ft/s}$$

$$P_0 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = 30.6(24) = 734.2 \text{ lb} \cdot \text{ft/s}$$

$$P_i = \frac{734.2}{0.74} = 992.1 \text{ lb} \cdot \text{ft/s} = 1.80 \text{ hp} \qquad \textit{Resp.}$$

R14-6. $+\uparrow \Sigma F_y = ma_y; \quad 2(30) - 50 = \frac{50}{32.2}a_B$

$$a_B = 6.44 \text{ m/s}^2$$

$(+\uparrow)$ $\quad v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$

$$v_B^2 = 0 + 2(6.44)(10 - 0)$$

$$v_B = 11.349 \text{ ft/s}$$

$$2s_B + s_M = l$$

$$2v_B = -v_M$$

$$v_M = -2(11.349) = 22.698 \text{ ft/s}$$

$$P_o = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 30(22.698) = 680.94 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$$

$$P_i = \frac{680.94}{0.76} = 895.97 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$$

$$P_i = 1.63 \text{ hp} \qquad \textit{Resp.}$$

R14-7. $T_A + V_A = T_B + V_B$

$$0 + (0.25)(9.81)(0.6) + \frac{1}{2}(150)(0.6 - 0.1)^2 = \frac{1}{2}(0.25)(v_B)^2 + \frac{1}{2}(150)(0.4 - 0.1)^2$$

$$v_B = 10.4 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

R14-8. $\dfrac{6}{z} = \dfrac{\sqrt{15^2 + 2^2}}{15}$

$$z = 5.95 \text{ ft}$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{32.2}\right)v_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{30}{32.2}\right)v_2^2 + 10(5.95) - 30(5.95)$$

$$v_2 = 13.8 \text{ ft/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Chapter 15

R15-1. $(+\uparrow)$ $\quad m(v_1)_y + \Sigma \int F_y\, dt = m(v_2)_y$

$$0 + N_p(t) - 58.86(t) = 0$$

$$N_p = 58.86 \text{ N}$$

$(\overset{+}{\rightarrow})$ $\quad m(v_1)_x + \Sigma \int F_x\, dt = m(v_2)_x$

$$6(3) - 0.2(58.86)(t) = 6(1)$$

$$t = 1.02 \text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

R15-2. $+\nwarrow \Sigma F_x = 0; \quad N_B - 50(9.81)\cos 30° = 0$

$$N_B = 424.79 \text{ N}$$

$(+\nearrow)$ $\quad m(v_x)_1 + \Sigma \int F_x\, dt = m(v_x)_2$

$$50(2) + \int_0^2 \left(300 + 120\sqrt{t}\right) dt - 0.4(424.79)(2) - 50(9.81)\,\text{sen}\,30°(2) = 50v_2$$

$$v_2 = 1.92 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

R15-3. La caja empieza a moverse cuando

$$F = F_r = 0.6(196.2) = 117.72 \text{ N}$$

A partir de la gráfica, ya que

$$F = \frac{200}{5}t. \quad 0 \le t \le 5 \text{ s}$$

El tiempo requerido para que la caja empiece a moverse es

$$t = \frac{5}{200}(117.72) = 2.943 \text{ s}$$

Por consiguiente, el impulso debido a F es igual al área bajo la curva desde $2.943 \text{ s} \le t \le 10 \text{ s}$

$\overset{+}{\rightarrow}$ $\quad m(v_x)_1 + \Sigma \int F_x\, dt = m(v_x)_2$

$$0 + \int_{2.943}^{5} \frac{200}{5}t\, dt + \int_5^{10} 200\, dt - (0.5)196.2(10 - 2.943) = 20v_2$$

$$40\left(\frac{1}{2}t^2\right)\Big|_{2.943}^{5} + 200(10-5) - 692.292 = 20v_2$$
$$634.483 = 20v_2$$
$$v_2 = 31.7 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

R15-4. $(v_A)_1 = \left[20(10^3)\frac{\text{m}}{\text{h}}\right]\left(\frac{1\,\text{h}}{3600\,\text{s}}\right) = 5.556 \text{ m/s}$

$(v_B)_1 = \left[5(10^3)\frac{\text{m}}{\text{h}}\right]\left(\frac{1\,\text{h}}{3600\,\text{s}}\right) = 1.389 \text{ m/s},$

y $(v_C)_1 = \left[25(10^3)\frac{\text{m}}{\text{h}}\right]\left(\frac{1\,\text{h}}{3600\,\text{s}}\right) = 6.944 \text{ m/s}$

Para el primer caso,

$(\pm\rightarrow)$ $m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = (m_A + m_B)v_2$

$10000(5.556) + 5000(1.389) = (10000 + 5000)v_{AB}$

$v_{AB} = 4.167 \text{ m/s} \rightarrow$

Con base en el resultado de v_{AB} y al considerar el segundo caso,

$(\pm\rightarrow)$ $(m_A + m_B)v_{AB} + m_C(v_C)_1 = (m_A + m_B + m_C)v_{ABC}$

$(10000 + 5000)(4.167) + [-20000(6.944)] = (10000 + 5000 + 20000)v_{ABC}$

$v_{ABC} = -2.183 \text{ m/s} = 2.18 \text{ m/s} \leftarrow \textit{Resp.}$

R15-5. $(\pm\rightarrow)$ $m_P(v_P)_1 + m_B(v_B)_1 = m_P(v_p)_2 + m_B(v_B)_2$

$0.2(900) + 15(0) = 0.2(300) + 15(v_B)_2$

$(v_B)_2 = 8 \text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$

$(+\uparrow)$ $m(v_1)_y + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_2)_y$

$15(0) + N(t) - 15(9.81)(t) = 15(0)$

$N = 147.15 \text{ N}$

$(\pm\rightarrow)$ $m(v_1)_x + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m(v_2)_x$

$15(8) + [-0.2(147.15)(t)] = 15(0)$

$t = 4.077 \text{ s} = 4.08 \text{ s} \qquad \textit{Resp.}$

R15-6. $(\pm\rightarrow)$ $\Sigma mv_1 = \Sigma mv_2$

$3(2) + 0 = 3(v_A)_2 + 2(v_B)_2$

$(\pm\rightarrow)$ $e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

$1 = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{2 - 0}$

Al resolver

$(v_A)_2 = 0.400 \text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$

$(v_B)_2 = 2.40 \text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$

Bloque A:

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$\frac{1}{2}(3)(0.400)^2 - 3(9.81)(0.3)d_A = 0$

$d_A = 0.0272 \text{ m}$

Bloque B:

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$\frac{1}{2}(2)(2.40)^2 - 2(9.81)(0.3)d_B = 0$

$d_B = 0.9786 \text{ m}$

$d = d_B - d_A = 0.951 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$

R15-7. $(v_A)_{x_1} = -2\cos 40° = -1.532 \text{ m/s}$

$(v_A)_{y_1} = -2 \operatorname{sen} 40° = -1.285 \text{ m/s}$

$(\pm\rightarrow)$ $m_A(v_A)_{x_1} + m_B(v_B)_{x_1} = m_A(v_A)_{x_2} + m_B(v_B)_{x_2}$

$-2(1.532) + 0 = 0.2(v_A)_{x_2} + 0.2(v_B)_{x_2}$ **(1)**

$(\pm\rightarrow)$ $e = \dfrac{(v_{ref})_2}{(v_{ref})_1}$

$0.75 = \dfrac{(v_A)_{x_2} - (v_B)_{x_1}}{1.532}$ **(2)**

Al resolver las ecuaciones (1) y (2)

$(v_A)_{x_2} = -0.1915 \text{ m/s}$

$(v_B)_{x_2} = -1.3405 \text{ m/s}$

Para A:

$(+\downarrow)$ $m_A(v_A)_{y_1} = m_A(v_A)_{y_2}$

$(v_A)_{y_2} = 1.285 \text{ m/s}$

Para B:

$(+\uparrow)$ $m_B(v_B)_{y_1} = m_B(v_B)_{y_2}$

$(v_B)_{y_2} = 0$

Por lo tanto, $(v_B)_2 = (v_B)_{x_2} = 1.34 \text{ m/s} \leftarrow \textit{Resp.}$

$(v_A)_2 = \sqrt{(-0.1915)^2 + (1.285)^2} = 1.30 \text{ m/s} \textit{Resp.}$

$(\theta_A)_2 = \tan^{-1}\left(\dfrac{0.1915}{1.285}\right) = 8.47°\measuredangle \qquad \textit{Resp.}$

R15-8. $(H_z)_1 + \Sigma\int M_z\,dt = (H_z)_2$

$(10)(2)(0.75) + 60(2)\left(\frac{3}{5}\right)(0.75) + \int_0^2 (8t^2 + 5)\,dt = 10v(0.75)$

$69 + \left[\frac{8}{3}t^3 + 5t\right]_0^2 = 7.5v$

$v = 13.4 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$

Capítulo 16

R16-1. $(\omega_A)_O = 60 \text{ rad/s}$

$\alpha_A = -1 \text{ rad/s}^2$

$\omega_A = (\omega_A)_O + \alpha_A t$

$\omega_A = 60 + (-1)(3) = 57 \text{ rad/s}$

$v_A = r\omega_A = (1)(57) = 57 \text{ ft/s} = v_B$

$\omega_B = \dfrac{v_B}{r} = 57/2 = 28.5 \text{ rad/s}$

$v_W = r_C\omega_C = (0.5)(28.5) = 14.2 \text{ ft/s}$ *Resp.*

$\alpha_A = 1$

$a_{A_t} = l(1) = 1 \text{ ft/s}^2$

$\alpha_B = \dfrac{1}{2} = 0.5 \text{ rad/s}^2$

$a_W = r\alpha_B = (0.5)(0.5) = 0.25 \text{ ft/s}^2$ *Resp.*

R16-2. $\alpha_a = 0.6\theta_A$

$\theta_C = \dfrac{0.5}{0.075} = 6.667 \text{ rad}$

$\theta_A(0.05) = (6.667)(0.15)$

$\theta_A = 20 \text{ rad}$

$\alpha d\theta = \omega d\omega$

$$\int_0^{20} 0.6\theta_A d\theta_A = \int_3^{\omega_A} \omega_A d\omega_A$$

$$0.3\theta_A^2\Big|_0^{20} = \frac{1}{2}\omega_A^2\Big|_3^{\omega_A}$$

$120 = \dfrac{1}{2}\omega_A^2 - 4.5$

$\omega_A = 15.780 \text{ rad/s}$

$15.780(0.05) = \omega_C(0.15)$

$\omega_C = 5.260 \text{ rad/s}$

$v_B = 5.260(0.075) = 0.394 \text{ m/s}$ *Resp.*

R16-3. Un punto sobre el tambor que está en contacto con la tabla tiene una aceleración tangencial de

$a_t = 0.5 \text{ m/s}^2$

$a^2 = a_t^2 + a_n^2$

$(3)^2 = (0.5)^2 + a_n^2$

$a_n = 2.96 \text{ m/s}^2$

$a_n = \omega^2 r, \qquad \omega = \sqrt{\dfrac{2.96}{0.25}} = 3.44 \text{ rad/s}$

$v_B = \omega r = 3.44(0.25) = 0.860 \text{ m/s}$ *Resp.*

R16-4. $\mathbf{v}_B = \omega_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A}$

$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r}_{C/B}$

$v_C\mathbf{i} = (6\mathbf{k}) \times (0.2\cos 45°\mathbf{i} + 0.2 \operatorname{sen} 45°\mathbf{j}) + (\omega\mathbf{k}) \times (0.5\cos 30°\mathbf{i} - 0.5 \operatorname{sen} 30°\mathbf{j})$

$v_C = -0.8485 + \omega(0.25)$

$0 = 0.8485 + 0.433\,\omega$

Al resolver,

$\omega = 1.96 \text{ rad/s}\,\circlearrowleft$

$v_C = 1.34 \text{ m/s}$ *Resp.*

R16-5. $\omega = \dfrac{2}{0.08} = 25 \text{ rad/s}$

$\alpha = \dfrac{4}{0.08} = 50 \text{ rad/s}^2$

$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{C/A})_n + (\mathbf{a}_{C/A})_t$

$\mathbf{a}_C = 4\mathbf{j} + (25)^2(0.08)\mathbf{i} + 50(0.08)\mathbf{j}$

$\overset{+}{\rightarrow} \quad a_C\cos\theta = 0 + 50$

$+\uparrow \quad a_C \operatorname{sen}\theta = 4 + 0 + 4$

Al resolver, $a_C = 50.6 \text{ m/s}^2$ *Resp.*

$\theta = 9.09° \measuredangle\theta$ *Resp.*

El cilindro se mueve hacia arriba con una aceleración

$a_B = (a_C)_t = 50.6 \operatorname{sen} 9.09° = 8.00 \text{ m/s}^2\uparrow$ *Resp.*

R16-6. $\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{C/B}$

$2.057 + (a_C)_t = 1.8 + 1.2 + \alpha_{CB}(0.5)$

$\rightarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \leftarrow \quad \measuredangle\theta\ 30°$

$(\overset{+}{\rightarrow}) \quad 2.057 = -1.2 + \alpha_{CB}(0.5)\cos 30°$

$(+\downarrow) \quad (a_C)_t = 1.8 + \alpha_{CB}(0.5) \operatorname{sen} 30°$

$\alpha_{CB} = 7.52 \text{ rad/s}^2$ *Resp.*

$(a_C)_t = 3.68 \text{ m/s}^2$

$a_C = \sqrt{(3.68)^2 + (2.057)^2} = 4.22 \text{ m/s}^2$ *Resp.*

$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{3.68}{2.057}\right) = 60.8° \measuredangle$ *Resp.*

Además,

$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \alpha_{CB} \times \mathbf{r}_{C/B} - \omega^2\mathbf{r}_{C/B}$

$-(a_C)_t\mathbf{j} + \dfrac{(0.6)^2}{0.175}\mathbf{i} = -(2)^2(0.3)\mathbf{i} - 6(0.3)\mathbf{j} + (\alpha_{CB}\mathbf{k}) \times (-0.5\cos 60°\mathbf{i} - 0.5 \operatorname{sen} 60°\mathbf{j}) - \mathbf{0}$

$2.057 = -1.20 + \alpha_{CB}(0.433)$

$-(a_C)_t = -1.8 - \alpha_{CB}(0.250)$

$\alpha_{CB} = 7.52 \text{ rad/s}^2$ *Resp.*

$a_t = 3.68 \text{ m/s}^2$

$a_C = \sqrt{(3.68)^2 + (2.057)^2} = 4.22 \text{ m/s}^2$ *Resp.*

$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{3.68}{2.057}\right) = 60.8° \measuredangle\theta$ *Resp.*

R16-7. $a_C = 0.5(8) = 4\ \text{m/s}^2$

$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{B/C}$

$$\mathbf{a}_B = \begin{bmatrix} 4 \\ \leftarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (3)^2(0.5) \\ \measuredangle 30^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (0.5)(8) \\ \measuredangle 30^\circ \end{bmatrix}$$

$(\pm\rightarrow)$ $(a_B)_x = -4 + 4.5\cos 30^\circ + 4\,\text{sen}\,30^\circ$

$= 1.897\ \text{m/s}^2$

$(+\uparrow)$ $(a_B)_y = 0 + 4.5\,\text{sen}\,30^\circ - 4\cos 30^\circ$

$= -1.214\ \text{m/s}^2$

$a_B = \sqrt{(1.897)^2 + (-1.214)^2}$

$= 2.25\ \text{m/s}^2$ *Resp.*

$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{1.214}{1.897}\right) = 32.6^\circ \measuredangle$ *Resp.*

Además,

$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_C + \alpha \times \mathbf{r}_{B/C} - \omega^2\mathbf{r}_{B/C}$

$(a_B)_x\mathbf{i} + (a_B)_y\mathbf{j} = -4\mathbf{i} + (8\mathbf{k}) \times (-0.5\cos 30^\circ\mathbf{i}$

$-0.5\,\text{sen}\,30^\circ\mathbf{j}) - (3)^2(-0.5\cos 30^\circ\mathbf{i} - 0.5\,\text{sen}\,30^\circ\mathbf{j})$

$(\pm\rightarrow)$ $(a_B)_x = -4 + 8(0.5\,\text{sen}\,30^\circ) + (3)^2(0.5\cos 30^\circ)$

$= 1.897\ \text{m/s}^2$

$(+\uparrow)$ $(a_B)_y = 0 - 8(0.5\cos 30^\circ) + (3)^2(0.5\,\text{sen}\,30^\circ)$

$= -1.214\ \text{m/s}^2$

$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{1.214}{1.897}\right) = 32.6^\circ \measuredangle$ *Resp.*

$a_B = \sqrt{(1.897)^2 + (-1.214)^2} = 2.25\ \text{m/s}^2$ *Resp.*

R16-8. $v_B = 3(7) = 21\ \text{in/s} \leftarrow$

$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r}_{C/B}$

$$-v_C\left(\frac{4}{5}\right)\mathbf{i} - v_C\left(\frac{3}{5}\right)\mathbf{j} = -21\mathbf{i} + \omega\mathbf{k} \times (-5\mathbf{i} - 12\mathbf{j})$$

$(\pm\rightarrow)$ $-0.8v_C = -21 + 12\omega$

$(+\uparrow)$ $-0.6v_C = -5\omega$

Al resolver,

$\omega = 1.125\ \text{rad/s}$

$v_C = 9.375\ \text{in/s} = 9.38\ \text{in/s}\ \measuredangle$ *Resp.*

$(a_B)_n = (3)^2(7) = 63\ \text{in/s}^2\downarrow$

$(a_B)_t = (2)(7) = 14\ \text{in/s}^2 \leftarrow$

$\mathbf{a}_C = a_B + \alpha \times \mathbf{r}_{C/B} - \omega^2\mathbf{r}_{C/B}$

$$-a_C\left(\frac{4}{5}\right)\mathbf{i} - a_C\left(\frac{3}{5}\right)\mathbf{j} = -14\mathbf{i} - 63\mathbf{j} + (\alpha\mathbf{k}) \times (-5\mathbf{i} - 12\mathbf{j}) - (1.125)^2(-5\mathbf{i} - 12\mathbf{j})$$

$(\pm\rightarrow)$ $-0.8a_C = -14 + 12\alpha + 6.328$

$(+\uparrow)$ $-0.6a_C = -63 - 5\alpha + 15.1875$

$a_C = 54.7\ \text{in/s}^2\ \measuredangle$ *Resp.*

$\alpha = -3.00\ \text{rad/s}^2$

Capítulo 17

R17-1. $\pm\rightarrow \Sigma F_x = ma_x;$ $50\cos 60^\circ = 200a_G$ **(1)**

$+\uparrow \Sigma F_y = ma_y;$ $N_A + N_B - 200(9.81) - 50\,\text{sen}\,60^\circ = 0$ **(2)**

$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0;$ $-N_A(0.3) + N_B(0.2) + 50\cos 60^\circ(0.3) - 50\,\text{sen}\,60^\circ(0.6) = 0$ **(3)**

Además,

$a_G = 0.125\ \text{m/s}^2$

$N_A = 765.2\ \text{N}$

$N_B = 1240\ \text{N}$

En cada rueda

$N'_A = \dfrac{N_A}{2} = 383\ \text{N}$ *Resp.*

$N'_B = \dfrac{N_B}{2} = 620\ \text{N}$ *Resp.*

R17-2. ***Traslación curvilínea:***

$(a_G)_t = 8(3) = 24\ \text{ft/s}^2$

$(a_G)_n = (5)^2(3) = 75\ \text{ft/s}^2$

$\bar{x} = \dfrac{\Sigma \bar{x}m}{\Sigma m} = \dfrac{1(3) + 2(3)}{6} = 1.5\ \text{ft}$

$+\downarrow \Sigma F_y = m(a_G)_y;$ $E_y + 6 = \dfrac{6}{32.2}(24)\cos 30^\circ + \dfrac{6}{32.2}(75)\,\text{sen}\,30^\circ$

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = m(a_G)_x;$ $E_x = \dfrac{6}{32.2}(75)\cos 30^\circ - \dfrac{6}{32.2}(24)\,\text{sen}\,30^\circ$

$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0;$ $M_E - E_y(1.5) = 0$

$E_x = 9.87\ \text{lb}$ *Resp.*

$E_y = 4.86\ \text{lb}$ *Resp.*

$M_E = 7.29\ \text{lb}\cdot\text{ft}$ *Resp.*

R17-3. (a) Rueda trasera con potencia

Ecuaciones de movimiento:

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = m(a_G)_x;$ $0.3N_B = 1.5(10)^3a_G$ **(1)**

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = \Sigma(M_k)_A;$ $1.5(10)^3(9.81)(1.3)$

$$-N_B(2.9) = -1.5(10)^3 a_G(0.4) \qquad \textbf{(2)}$$

Al resolver las ecuaciones (1) y (2) se obtiene:

$$N_B = 6881 \text{ N} = 6.88 \text{ kN}$$
$$a_G = 1.38 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

R17-4. $\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = m(a_G)_x;\ 40 \operatorname{sen} 60° + N_C - \left(\frac{5}{13}\right)T = 0$

$+\uparrow\Sigma F_y = m(a_G)_y;\ -40\cos 60° + 0.3N_C - 20(9.81) + \frac{12}{13}T = 0$

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = I_A\alpha;\ 40(0.120) - 0.3N_C(0.120) = \left[\frac{1}{2}(20)(0.120)^2\right]\alpha$

Al resolver,

$T = 218 \text{ N}$ *Resp.*

$N_C = 49.28 \text{ N}$

$\alpha = 21.0 \text{ rad/s}^2$ *Resp.*

R17-5. $(a_G)_t = 4\alpha$

$\stackrel{+}{\leftarrow}\Sigma F_t = m(a_G)_x;\ F + 20 - 5 = \frac{30}{32.2}(4\alpha)$

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha;\ 20(3) + F(6) = \frac{1}{3}\left(\frac{30}{32.2}\right)(8)^2\alpha$

Al resolver,

$\alpha = 12.1 \text{ rad/s}^2$ *Resp.*

$F = 30.0 \text{ lb}$ *Resp.*

R17-6. $I_O = \frac{2}{5}\left(\frac{30}{32.2}\right)(1)^2 + \left(\frac{30}{32.2}\right)(3)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{10}{32.2}\right)(2)^2 = 9.17 \text{ slug}\cdot\text{ft}^2$

$\bar{x} = \frac{30(3) + 10(1)}{30 + 10} = 2.5 \text{ ft}$

$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_n = ma_n;\ O_x = 0$

$+\downarrow\Sigma F_t = ma_t;\ 40 - O_y = \frac{40}{32.2}a_G$

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha;\ 40(2.5) = 9.17\alpha$

Cinemática

$a_G = 2.5\alpha$

Por lo tanto:

$\alpha = 10.90 \text{ rad/s}^2$

$a_G = 27.3 \text{ ft/s}^2$

$O_x = 0$

$O_y = 6.14 \text{ lb}$

Por lo tanto:

$F_o = 6.14 \text{ lb} \rightarrow$ *Resp.*

R17-7. $+\uparrow\Sigma F_y = m(a_G)_y;\ N_B - 20(9.81) = 0$

$N_B = 196.2 \text{ N}$

$F_B = 0.1(196.2) = 19.62 \text{ N}$

$\circlearrowleft + \Sigma M_{CI} = \Sigma(M_k)_{CI};\ 30 - 19.62(0.6) = 20(0.2\alpha)(0.2) + [20(0.25)^2]\alpha$

$\alpha = 8.89 \text{ rad/s}^2$ *Resp.*

R17-8. $\stackrel{+}{\leftarrow}\Sigma F_x = m(a_G)_x;\ 0.3N_A = \frac{20}{32.2}a_G$

$+\uparrow\Sigma F_y = m(a_G)_y;\ N_A - 20 = 0$

$\circlearrowleft + \Sigma M_G = I_G\alpha;\ 0.3N_A(0.5) = \left[\frac{2}{5}\left(\frac{20}{32.2}\right)(0.5)^2\right]\alpha$

Por lo tanto:

$N_A = 20 \text{ lb}$

$a_G = 9.66 \text{ ft/s}^2$

$\alpha = 48.3 \text{ rad/s}^2$

$(\circlearrowleft +)\quad \omega = \omega_0 + \alpha_c t$

$0 = \omega_1 - 48.3t$

$\omega_1 = 48.3t$

$(\stackrel{+}{\rightarrow})\quad v = v_0 + a_c t$

$0 = 20 - 9.66\left(\frac{\omega}{48.3}\right)$

$\omega = 100 \text{ rad/s}$ *Resp.*

Capítulo 18

R18-1. $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$0 + (50)(9.81)(1.25) = \frac{1}{2}\left[(50)(1.75)^2\right]\omega_2^2$

$\omega_2 = 2.83 \text{ rad/s}$ *Resp.*

R18-2. ***Energía cinética y trabajo:*** El momento de inercia de masa del volante con respecto a su centro de $I_O = mk_O^2 = 50(0.2^2) = 2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Por lo tanto,

$$T = \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}(2)\omega^2 = \omega^2$$

Dado que la rueda está inicialmente en reposo, $T_1 = 0$, $\mathbf{W}$, $\mathbf{O}_x$ y $\mathbf{O}_y$ no realizan trabajo, mientras que $\mathbf{M}$ hace trabajo positivo. Cuando la rueda gira $\theta = (5 \text{ rev})\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right) = 10\pi$, el trabajo realizado por M es

$$U_M = \int M d\theta = \int_0^{10\pi} (9\theta^{1/2} + 1) d\theta$$
$$= (6\theta^{3/2} + \theta)\Big|_0^{10\pi}$$
$$= 1087.93 \text{ J}$$

Principio del trabajo y la energía:

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$
$$0 + 1087.93 = \omega^2$$
$$\omega = 33.0 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

R18-3. Antes de frenar:

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$
$$0 + 15(9.81)(3) = \frac{1}{2}(15)v_B^2 + \frac{1}{2}\left[\,50(0.23)^2\right]\left(\frac{v_B}{0.15}\right)^2$$
$$v_B = 2.58 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$
$$\frac{s_B}{0.15} = \frac{s_C}{0.25}$$

Considere que $s_B = 3$ m, entonces $s_C = 5$ m.

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$
$$0 - F(5) + 15(9.81)(6) = 0$$
$$F = 176.6 \text{ N}$$
$$N = \frac{176.6}{0.5} = 353.2 \text{ N}$$

Palanca del freno:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \qquad -353.2(0.5) + P(1.25) = 0$$
$$P = 141 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

R18-4.

$$\frac{s_G}{0.3} = \frac{s_A}{(0.5 - 0.3)}$$
$$s_A = 0.6667 s_G$$
$$+\nwarrow \Sigma F_y = 0; \qquad N_A - 60(9.81)\cos 30° = 0$$
$$N_A = 509.7 \text{ N}$$
$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$
$$0 + 60(9.81)\,\text{sen}\,30°(s_G) - 0.2(509.7)(0.6667 s_G) = \frac{1}{2}\left[\,60(0.3)^2\right](6)^2 + \frac{1}{2}(60)\left[\,(0.3)(6)\right]^2$$
$$s_G = 0.859 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

R18-5. ***Conservación de la energía:*** En un inicio, ambos engranes circulares giran con una velocidad angular de $\omega_1 = \frac{2}{0.05} = 40$ rad/s. Después de que el engrane recto se ha desplazado $s = 600$ mm, los dos engranes circulares giran con una velocidad angular de $\omega_2 = \frac{v_2}{0.05}$, donde v_2 es la rapidez del engrane recto en ese momento.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$\frac{1}{2}(6)(2)^2 + 2\left\{\frac{1}{2}\left[\,4(0.03)^2\right](40)^2\right\} + 0 = \left\{\frac{1}{2}\left[\,4(0.03)^2\right]\left(\frac{v_2}{0.05}\right)^2\right\} - 6(9.81)(0.6)$$
$$v_2 = 3.46 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

R18-6. Plano de referencia a través de A.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{50}{32.2}\right)(6)^2\right](2)^2 + \frac{1}{2}(6)(4-2)^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{50}{32.2}\right)(6)^2\right]\omega^2 + \frac{1}{2}(6)(7-2)^2 - 50(1.5)$$
$$\omega = 2.30 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

R18-7.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$0 + 4(1.5\,\text{sen}\,45°) + 1(3\,\text{sen}\,45°) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{4}{32.2}\right)(3)^2\right]\left(\frac{v_C}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{32.2}\right)(v_C)^2 + 0$$
$$v_C = 13.3 \text{ ft/s} \qquad \textit{Resp.}$$

R18-8. Plano de referencia en el punto más bajo.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(40)(0.3)^2\right]\left(\frac{4}{0.3}\right)^2 + \frac{1}{2}(40)(4)^2 + 40(9.81)d\,\text{sen}\,30° = 0 + \frac{1}{2}(200)d^2$$
$$100d^2 - 196.2d - 480 = 0$$

Al despejar la raíz positiva,

$$d = 3.38 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

Capítulo 19

R19-1. $I_O = mk_O^2 = \frac{150}{32.2}(1.25)^2 = 7.279 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$

$$I_O\omega_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_O dt = I_O\omega_2$$
$$0 - \int_0^{3\text{ s}} 10t^2(1)\,dt = 7.279\omega_2$$
$$\frac{10t^3}{3}\Big|_0^{3\text{ s}} = 7.279\omega_2$$
$$\omega_2 = 12.4 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

R19-3. $+\swarrow m(v_G)_1 + \Sigma \int F\,dt = m(v_G)_2$

$$0 + 9(9.81)(\text{sen } 30°)(3) - \int_0^3 F\,dt = 9(v_G)_2 \quad \textbf{(1)}$$

$$\circlearrowright +(H_G)_1 + \Sigma \int M_G dt = (H_G)_2$$

$$0 + \left(\int_0^3 F\,dt\right)(0.3) = \left[9(0.225)^2\right]\omega_2 \qquad \textbf{(2)}$$

Como $(v_G)_2 = 0.3\omega_2$,

Al eliminar $\int_0^3 F\,dt$ de las ecuaciones (1) y (2), y al despejar $(v_G)_2$ se obtiene

$$(v_G)_2 = 9.42 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Además,

$$\circlearrowright +(H_A)_1 + \Sigma \int M_A dt = (H_A)_2$$

$$0 + 9(9.81)\,\text{sen } 30°(3)(0.3) = \left[9(0.225)^2 + 9(0.3)^2\right]\omega$$

$$\omega = 31.39 \text{ rad/s}$$

$$v = 0.3(31.39) = 9.42 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

R19-4. $\pm \quad m(v_x)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = m(v_x)_2$

$$0 + 200(3) = 100(v_O)_2$$

$$(v_O)_2 = 6 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

y

$$I_z\omega_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_z dt = I_z\omega_2$$

$$0 - [200(0.4)(3)] = -9\omega_2$$

$$\omega_2 = 26.7 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

R19-5. $(+\uparrow) \quad mv_1 + \Sigma \int F dt = mv_2$

$$0 + T(3) - 30(3) + 40(3) = \frac{30}{32.2}v_o$$

$$(\circlearrowright +) \quad (H_O)_1 + \Sigma \int M_O dt = (H_O)_2$$

$$-T(0.5)3 + 40(1)3 = \left[\frac{30}{32.2}(0.65)^2\right]\omega$$

Cinemática,

$$v_o = 0.5\omega$$

Al resolver,

$$T = 23.5 \text{ lb}$$

$$\omega = 215 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$v_O = 108 \text{ ft/s}$$

Por lo tanto,

$$(\circlearrowright +) \quad (H_{CI})_1 + \Sigma \int M_{CI} dt = (H_{CI})_2$$

$$0 - 30(0.5)(3) + 40(1.5)(3) = \left[\frac{30}{32.2}(0.65)^2 + \frac{30}{32.2}(0.5)^2\right]\omega$$

$$\omega = 215 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

R19-6. $\circlearrowleft + \quad (H_A)_1 + \Sigma \int M_A dt = (H_A)_2$

$$\left[\frac{30}{32.2}(0.8)^2\right](6) - \int T\,dt(1.2) = \left[\frac{30}{32.2}(0.8)^2\right]\omega_A$$

$$\circlearrowleft + \quad (H_B)_1 + \Sigma \int M_B dt = (H_B)_2$$

$$0 + \int T\,dt(0.4) = \left[\frac{15}{32.2}(0.6)^2\right]\omega_B$$

Cinemática:

$$1.2\omega_A = 0.4\omega_B$$

$$\omega_B = 3\omega_A$$

Por lo tanto,

$$\omega_A = 1.70 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\omega_B = 5.10 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

R19-7. $H_1 = H_2$

$$\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\omega_1 = \left[\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right]\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{1}{3}\omega_1 \qquad \textit{Resp.}$$

R19-8. $H_1 = H_2$

$$(0.940)(0.5) + (4)\left[\frac{1}{12}(20)\left((0.75)^2 + (0.2)^2\right) + (20)(0.375 + 0.2)^2\right](0.5)$$

$$= (0.940)(\omega) + 4\left[\frac{1}{12}(20)(0.2)^2 + (20)(0.2)^2\right]\omega$$

$$\omega = 3.56 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Respuestas a problemas seleccionados

Capítulo 12

12-1. $s = 80.7$ m

12-2. $s = 20$ ft

12-3. $a = -24\ \text{m/s}^2$, $\Delta s = -880$ m, $s_T = 912$ m

12-5. $s_T = 8$ m, $v_{\text{prom}} = 2.67$ m/s

12-6. $s\big|_{t=6\,\text{s}} = -27.0$ ft, $s_{\text{tot}} = 69.0$ ft

12-7. $v_{\text{prom}} = 0$, $(v_{\text{sp}})_{\text{prom}} = 3$ m/s, $a\Big|_{t=6\,\text{s}} = 2\ \text{m/s}^2$

12-9. $v = 32$ m/s, $s = 67$ m, $d = 66$ m

12-10. $v = 1.29$ m/s

12-11. $v_{\text{prom}} = 0.222$ m/s, $(v_{\text{sp}})_{\text{prom}} = 2.22$ m/s

12-13. Normal: $d = 517$ ft, bebido: $d = 616$ ft

12-14. $v = 165\ \text{ft/s}$, $a = 48\ \text{ft/s}^2$, $s_T = 450$ ft, $v_{\text{prom}} = 25.0\ \text{ft/s}$, $(v_{\text{sp}})_{\text{prom}} = 45.0\ \text{ft/s}$

12-15. $v = \left(2kt + \frac{1}{v_0^2}\right)^{-1/2}$, $s = \frac{1}{k}\left[\left(2kt + \frac{1}{v_0^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{v_0}\right]$

12-17. $d = 16.9$ ft

12-18. $t = 5.62$ s

12-19. $s = 28.4$ km

12-21. $s = 123$ ft, $a = 2.99\ \text{ft/s}^2$

12-22. $h = 314$ m, $v = 72.5$ m/s

12-23. $v = \left(20e^{-2t}\right)\text{m/s}$, $a = \left(-40e^{-2t}\right)\text{m/s}^2$, $s = 10\left(1 - e^{-2t}\right)\text{m}$

12-25. (a) $v = 45.5$ m/s, (b) $v_{\text{máx}} = 100$ m/s

12-26. (a) $s = -30.5$ m,
(b) $s_{\text{Tot}} = 56.0$ m,
(c) $v = 10$ m/s

12-27. $t = 0.549\left(\frac{v_f}{g}\right)$

12-29. $h = 20.4$ m, $t = 2$ s

12-30. $s = 54.0$ m

12-31. $s = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$, $a = -kv_0e^{-kt}$

12-33. $v = 11.2$ km/s

12-34. $v = -R\sqrt{\frac{2g_0(y_0 - y)}{(R + y)(R + y_0)}}$, $v_{\text{imp}} = 3.02$ km/s

12-35. $t' = 27.3$ s.
Cuando $t = 27.3$ s, $v = 13.7\ \text{ft/s}$

12-37. $\Delta s = 1.11$ km

12-38. $a\big|_{t=0} = -4\ \text{m/s}^2$, $a\big|_{t=2\,\text{s}} = 0$, $a\big|_{t=4\,\text{s}} = 4\ \text{m/s}^2$, $v\big|_{t=0} = 3$ m/s, $v\big|_{t=2\,\text{s}} = -1$ m/s, $v\big|_{t=4\,\text{s}} = 3$ m/s

12-39. $s = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}t\right) + 4$, $v = \frac{2\pi}{5}\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right)$, $a = -\frac{2\pi^2}{25}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}t\right)$

12-41. $t = 7.48$ s. Cuando $t = 2.14$ s, $v = v_{\text{máx}} = 10.7\ \text{ft/s}$, $h = 11.4$ ft

12-42. $s = 600$ m. Para $0 \le t < 40$ s, $a = 0$.
Para $40\ \text{s} < t \le 80$ s, $a = -0.250\ \text{m/s}^2$

12-43. $t' = 35$ s
Para $0 \le t < 10$ s, $s = \{300t\}$ ft, $v = 300\ \text{ft/s}$
Para $10\ \text{s} < t < 20$ s,
$s = \left\{\frac{1}{6}t^3 - 15t^2 + 550t - 1167\right\}$ ft
$v = \left\{\frac{1}{2}t^2 - 30t + 550\right\}\text{ft/s}$
Para $20\ \text{s} < t \le 35$ s,
$s = \left\{-5t^2 + 350t + 167\right\}$ ft
$v = (-10t + 350)\,\text{ft/s}$

12-45. Cuando $t = 0.1$ s, $s = 0.5$ m y a cambia de $100\ \text{m/s}^2$ a $-100\ \text{m/s}^2$. Cuando $t = 0.2$ s, $s = 1$ m

12-46. $v\Big|_{s=75\,\text{ft}} = 27.4\ \text{ft/s}$, $v\Big|_{s=125\,\text{ft}} = 37.4\ \text{ft/s}$

12-47. Para $0 \le t < 30$ s, $v = \left\{\frac{1}{5}t^2\right\}\text{m/s}$, $s = \left\{\frac{1}{15}t^3\right\}\text{m}$
Para $30 \le t \le 60$ s, $v = \{24t - 540\}\ \text{m/s}$,
$s = \left\{12t^2 - 540t + 7200\right\}$ m

12-49. $v_{\text{máx}} = 100\ \text{m/s}$, $t' = 40$ s

12-50. Para $0 \le s < 300$ ft, $v = \left\{4.90\,s^{1/2}\right\}\text{m/s}$
Para $300\ \text{ft} < s \le 450$ ft,
$v = \left\{(-0.04s^2 + 48s - 3600)^{1/2}\right\}\text{m/s}$
$s = 200$ ft Cuando $t = 5.77$ s

12-51. Para $0 \le t < 60$ s, $s = \left\{\frac{1}{20}t^2\right\}\text{m}$, $a = 0.1\ \text{m/s}^2$.
Para $60\ \text{s} < t < 120$ s, $s = \{6t - 180\}$ m, $a = 0$.
Para $120\ \text{s} < t \le 180$ s, $s = \left\{\frac{1}{30}t^2 - 2t + 300\right\}\text{m}$,
$a = 0.0667\ \text{m/s}^2$

12-53. En $t = 8$ s, $a = 0$ y $s = 30$ m
En $t = 12$ s, $a = -1\ \text{m/s}^2$ y $s = 48$ m

12-54. Para $0 \le t < 5$ s, $s = \left\{0.2t^3\right\}$ m,
$a = \{1.2t\}\ \text{m/s}^2$
Para $5\ \text{s} < t \le 15$ s, $s = \left\{\frac{1}{4}\left(90t - 3t^2 - 275\right)\right\}\text{m}$
$a = -1.5\ \text{m/s}^2$
En $t = 15$ s, $s = 100$ m, $v_{\text{prom}} = 6.67$ m/s

12-55. $t' = 33.3$ s, $s\big|_{t=5\,\text{s}} = 550$ ft, $s\big|_{t=15\,\text{s}} = 1500$ ft, $s\big|_{t=20\,\text{s}} = 1800$ ft, $s\big|_{t=33.3\,\text{s}} = 2067$ ft

12-57. Para $0 \le s < 100$ ft, $v = \left\{\sqrt{\frac{1}{50}\left(800s - s^2\right)}\right\}\text{ft/s}$
Para $100\ \text{ft} < s \le 150$ ft,
$v = \left\{\frac{1}{5}\sqrt{-3s^2 + 900s - 25\,000}\right\}\text{ft/s}$

12-58. Para $0 \le t < 15$ s, $v = \left\{\frac{1}{2}t^2\right\}$ m/s, $s = \left\{\frac{1}{6}t^3\right\}$ m.
Para 15 s $< t \le 40$ s,
$v = \{20t - 187.5 \text{ m/s}\}$,
$s = \{10t^2 - 187.5t + 1125\}$ m
12-59. $s_T = 980$ m
12-61. Cuando $t = 5$ s, $s_B = 62.5$ m.
Cuando $t = 10$ s, $v_A = (v_A)_{\text{máx}} = 40$ m/s y $s_A = 200$ m.
Cuando $t = 15$ s, $s_A = 400$ m y $s_B = 312.5$ m.
$\Delta s = s_A - s_B = 87.5$ m
12-62. $v = \{5 - 6t\}$ ft/s, $a = -6$ ft/s^2
12-63. Para $0 \le t < 5$ s, $s = \left\{2t^2\right\}$ m y $a = 4$ m/s^2.
Para 5 s $< t < 20$ s, $s = \{20t - 50\}$ m y $a = 0$.
Para 20 s $< t \le 30$ s, $s = \left\{2t^2 - 60t + 750\right\}$ m y $a = 4$ m/s^2
12-65. $v = 354$ ft/s, $t = 5.32$ s
12-66. Cuando $s = 100$ m, $t = 10$ s.
Cuando $s = 400$ m, $t = 16.9$ s
$a|_{s=100\text{ m}} = 4$ m/s^2, $a|_{s=400\text{ m}} = 16$ m/s^2
12-67. En $s = 100$ s, a cambia de $a_{\text{máx}} = 1.5$ ft/s^2 en $a_{\text{mín}} = -0.6$ ft/s^2
12-69. $a = 5.31$ m/s^2, $\alpha = 53.0°$
$\beta = 37.0°$, $\gamma = 90.0°$
12-70. $\Delta\mathbf{r} = \left\{6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}\right\}$ m
12-71. (4 ft, 2 ft, 6 ft)
12-73. (5.15 ft, 1.33 ft)
12-74. $\mathbf{r} = \{11\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 21\mathbf{k}\}$ ft
12-75. $(v_{\text{sp}})_{\text{prom}} = 4.28$ m/s
12-77. $v = 8.55$ ft/s, $a = 5.82$ m/s^2
12-78. $v = 1003$ m/s, $a = 103$ m/s^2
12-79. $d = 4.00$ ft, $a = 37.8$ ft/s^2
12-81. $(\mathbf{v}_{BC})_{\text{prom}} = \{3.88\mathbf{i} + 6.72\mathbf{j}\}$ m/s
12-82. $v = \sqrt{c^2k^2 + b^2}$, $a = ck^2$
12-83. $v = 10.4$ m/s, $a = 38.5$ m/s^2
12-85. $d = 204$ m, $v = 41.8$ m/s $a = 4.66$ m/s^2
12-86. $\theta = 58.3°$, $(v_0)_{\text{mín}} = 9.76$ m/s
12-87. $\theta = 76.0°$, $v_A = 49.8$ ft/s, $h = 39.7$ ft
12-89. $R_{\text{máx}} = 10.2$ m, $\theta = 45°$
12-90. $R = 8.83$ m
12-91. (13.3 ft, −7.09 ft)
12-93. $d = 166$ ft
12-94. $t = 3.57$ s, $v_B = 67.4$ ft/s
12-95. $v_A = 36.7$ ft/s, $h = 11.5$ ft
12-97. $v_A = 19.4$ m/s, $v_B = 40.4$ m/s
12-98. $v_A = 39.7$ ft/s, $s = 6.11$ ft
12-99. $v_B = 160$ m/s, $h_B = 427$ m,
$h_C = 1.08$ km, $R = 2.98$ km
12-101. $v_{\text{mín}} = 0.838$ m/s, $v_{\text{máx}} = 1.76$ m/s
12-102. $\theta_A = 11.6°$, $t = 0.408$ s, $\theta_B = 11.6°$ ◁
12-103. $\theta_A = 78.4°$, $t = 2.00$ s, $\theta_B = 78.4°$ ◁
12-105. $t_A = 0.553$ s, $x = 3.46$ m
12-106. $R = 19.0$ m, $t = 2.48$ s
12-107. $\theta_1 = 24.9°$ ◹, $\theta_2 = 85.2°$ ◿
12-109. $\theta = 76.0°$, $v_A = 49.8$ ft/s, $h = 39.7$ ft
12-110. $v = 63.2$ ft/s
12-111. $v = 38.7$ m/s
12-113. $v = 4.40$ m/s, $a_t = 5.04$ m/s^2, $a_n = 1.39$ m/s^2
12-114. $a_t = 8.66$ ft/s^2, $\rho = 1280$ ft
12-115. $v = 97.2$ ft/s, $a = 42.6$ ft/s^2
12-117. Cuando los automóviles A y B están lado a lado, $t = 55.7$ s.
Cuando los automóviles A y B están separados a 90°, $t = 27.8$ s.
12-118. $t = 66.4$ s
12-119. $h = 5.99$ Mm
12-121. $a = 2.75$ m/s^2
12-122. $a = 1.68$ m/s^2
12-123. $v = 1.5$ m/s, $a = 0.117$ m/s^2
12-125. $v = 43.0$ m/s, $a = 6.52$ m/s^2
12-126. $v = 105$ ft/s, $a = 22.7$ ft/s^2
12-127. $a_t = 3.62$ m/s^2, $\rho = 29.6$ m
12-129. $t = 7.00$ s, $s = 98.0$ m
12-130. $a = 7.42$ ft/s^2
12-131. $a = 2.36$ m/s^2
12-133. $a = 3.05$ m/s^2
12-134. $a = 0.763$ m/s^2
12-135. $a = 0.952$ m/s^2
12-137. $y = -0.0766x^2$, $v = 8.37$ m/s,
$a_n = 9.38$ m/s^2, $a_t = 2.88$ m/s^2
12-138. $v_B = 19.1$ m/s, $a = 8.22$ m/s^2, $\phi = 17.3°$ desde el eje negativo $-t$
12-139. $a_{\text{mín}} = 3.09$ m/s^2
12-141. $(a_n)_A = g = 32.2$ ft/s^2, $(a_t)_A = 0$,
$\rho_A = 699$ ft, $(a_n)_B = 14.0$ ft/s^2,
$(a_t)_B = 29.0$ ft/s^2, $\rho_B = 8.51(10^3)$ ft
12-142. $t = 1.21$ s
12-143. $a_{\text{máx}} = \dfrac{v^2a}{b^2}$
12-145. $d = 11.0$ m, $a_A = 19.0$ m/s^2, $a_B = 12.8$ m/s^2
12-146. $t = 2.51$ s, $a_A = 22.2$ m/s^2, $a_B = 65.1$ m/s^2
12-147. $\theta = 10.6°$
12-149. $a = 0.511$ m/s^2
12-150. $a = 0.309$ m/s^2
12-151. $a = 322$ mm/s^2, $\theta = 26.6°$ ◸
12-153. $v_n = 0$, $v_t = 7.21$ m/s,
$a_n = 0.555$ m/s^2, $a_t = 2.77$ m/s^2
12-154. $a = 7.48$ ft/s^2
12-155. $a = 14.3$ in/s^2
12-157. $v_r = 5.44$ ft/s, $v_\theta = 87.0$ ft/s,
$a_r = -1386$ ft/s^2, $a_\theta = 261$ ft/s^2
12-158. $v = 464$ ft/s, $a = 43.2(10^3)$ ft/s^2
12-159. $\mathbf{v} = \left\{-14.2\mathbf{u}_r - 24.0\mathbf{u}_z\right\}$ m/s
$\mathbf{a} = \left\{-3.61\mathbf{u}_r - 6.00\mathbf{u}_z\right\}$ m/s^2

12-161. $v_r = -2 \operatorname{sen} t,\ v_\theta = \cos t,$
$a_r = -\frac{5}{2}\cos t,\ a_\theta = -2 \operatorname{sen} t$
12-162. $v_r = ae^{at},\ v_\theta = e^{at},$
$a_r = e^{at}(a^2 - 1),\ a_\theta = 2ae^{at}$
12-163. $v_r = 0,\ v_\theta = 10 \text{ ft/s},$
$a_r = -0.25 \text{ ft/s}^2,\ a_\theta = -3.20 \text{ ft/s}^2$
12-165. $\mathbf{a} = (\dddot{r} - 3\dot{r}\dot{\theta}^2 - 3r\dot{\theta}\ddot{\theta})\mathbf{u}_r$
$+ (3\dot{r}\ddot{\theta} + r\ddot{\theta} + 3\ddot{r}\dot{\theta} - r\dot{\theta}^3)\mathbf{u}_\theta + (\dddot{z})\mathbf{u}_z$
12-166. $a = 48.3 \text{ in/s}^2$
12-167. $v_r = 1.20 \text{ m/s},\ v_\theta = 1.26 \text{ m/s},$
$a_r = -3.77 \text{ m/s}^2,\ a_\theta = 7.20 \text{ m/s}^2$
12-169. $v_r = 1.20 \text{ m/s},\ v_\theta = 1.50 \text{ m/s},$
$a_r = -4.50 \text{ m/s}^2,\ a_\theta = 7.20 \text{ m/s}^2$
12-170. $v_r = 16.0 \text{ ft/s},\ v_\theta = 1.94 \text{ ft/s},$
$a_r = 7.76 \text{ ft/s}^2,\ a_\theta = 1.94 \text{ ft/s}^2$
12-171. $v = 4.24 \text{ m/s},\ a = 17.6 \text{ m/s}^2$
12-173. $a = 27.8 \text{ m/s}^2$
12-174. $v_r = 0,\ v_\theta = 12 \text{ ft/s},$
$a_r = -216 \text{ ft/s}^2,\ a_\theta = 0$
12-175. $v = 12.6 \text{ m/s},\ a = 83.2 \text{ m/s}^2$
12-177. $v_r = -1.84 \text{ m/s},\ v_\theta = 19.1 \text{ m/s},$
$a_r = -2.29 \text{ m/s}^2,\ a_\theta = 4.60 \text{ m/s}^2$
12-178. $v_r = -24.2 \text{ ft/s},\ v_\theta = 25.3 \text{ ft/s}$
12-179. $v_r = 0,\ v_\theta = 4.80 \text{ ft/s},$
$v_z = -0.664 \text{ ft/s},\ a_r = -2.88 \text{ ft/s}^2$
$a_\theta = 0,\ a_z = -0.365 \text{ ft/s}^2$
12-181. $v = 10.7 \text{ ft/s},\ a = 24.6 \text{ ft/s}^2$
12-182. $v = 10.7 \text{ ft/s},\ a = 40.6 \text{ ft/s}^2$
12-183. $\dot{\theta} = 0.333 \text{ rad/s},\ a = 6.67 \text{ m/s}^2$
12-185. $v = 1.32 \text{ m/s}$
12-186. $a = 8.66 \text{ m/s}^2$
12-187. $\dot{\theta} = 0.0178 \text{ rad/s}$
12-189. $v_r = 32.0 \text{ ft/s},\ v_\theta = 50.3 \text{ ft/s},$
$a_r = -201 \text{ ft/s}^2,\ a_\theta = 256 \text{ ft/s}^2$
12-190. $v_r = 32.0 \text{ ft/s},\ v_\theta = 50.3 \text{ ft/s},$
$a_r = -161 \text{ ft/s}^2,\ a_\theta = 319 \text{ ft/s}^2$
12-191. $v = 5.95 \text{ ft/s},\ a = 3.44 \text{ ft/s}^2$
12-193. $v_r = 0.242 \text{ m/s},\ v_\theta = 0.943 \text{ m/s},$
$a_r = -2.33 \text{ m/s}^2,\ a_\theta = 1.74 \text{ m/s}^2$
12-194. $\dot{\theta} = 10.0 \text{ rad/s}$
12-195. $v_B = 0.5 \text{ m/s}$
12-197. $v = 24 \text{ ft/s}$
12-198. $v_B = 1.67 \text{ m/s}$
12-199. $\Delta s_B = 1.33 \text{ ft} \rightarrow$
12-201. $t = 3.83 \text{ s}$
12-202. $v_B = 0.75 \text{ m/s}$
12-203. $t = 5.00 \text{ s}$
12-205. $v_{B/C} = 39 \text{ ft/s} \uparrow$
12-206. $v_B = 1.50 \text{ m/s}$
12-207. $v_A = 1.33 \text{ m/s}$
12-209. $v_B = 8 \text{ ft/s} \downarrow,\ a_B = 6.80 \text{ ft/s}^2 \uparrow$
12-210. $v_A = 2.5 \text{ ft/s} \uparrow,\ a_A = 2.44 \text{ ft/s}^2 \uparrow$
12-211. $v_B = 2.40 \text{ m/s} \uparrow,\ a_B = 3.25 \text{ m/s}^2 \uparrow$
12-213. $v_A = 4 \text{ ft/s}$
12-214. $v_{A/B} = 13.4 \text{ m/s},\ \theta_v = 31.7° \nearrow$
$a_{A/B} = 4.32 \text{ m/s}^2,\ \theta_a = 79.0° \nwarrow$
12-215. $v_A = 10.0 \text{ m/s} \leftarrow,\ a_A = 46.0 \text{ m/s}^2 \leftarrow$
12-217. $v_C = 1.2 \text{ m/s} \uparrow,\ a_C = 0.512 \text{ m/s}^2 \uparrow$
12-218. $v_{B/A} = 1044 \text{ km/h},\ \theta = 54.5° \measuredangle$
12-219. $v_{B/A} = 28.5 \text{ mi/h},\ \theta_v = 44.5° \measuredangle,$
$a_{B/A} = 3418 \text{ mi/h}^2,\ \theta_a = 80.6° \measuredangle$
12-221. $v_B = 13.5 \text{ ft/s},\ \theta = 84.8°,\ t = 1.85 \text{ mín}$
12-222. $v_w = 58.3 \text{ km/h},\ \theta = 59.0° \measuredangle$
12-223. $v_{A/B} = 15.7 \text{ m/s},\ \theta = 7.11° \nearrow,\ t = 38.1 \text{ s}$
12-225. $v_{A/B} = 98.4 \text{ ft/s},\ \theta_v = 67.6° \nearrow,$
$a_{A/B} = 19.8 \text{ ft/s}^2,\ \theta_a = 57.4° \measuredangle$
12-226. $v_{r/m} = 16.6 \text{ km/h},\ \theta = 25.0° \nwarrow$
12-227. $v_{B/A} = 20.5 \text{ m/s},\ \theta_v = 43.1° \nearrow$
$a_{B/A} = 4.92 \text{ m/s}^2,\ \theta_a = 6.04° \nearrow$
12-229. $v_r = 34.6 \text{ km/h} \downarrow$
12-230. $v_m = 4.87 \text{ ft/s},\ t = 10.3 \text{ s}$
12-231. $v_{w/s} = 19.9 \text{ m/s},\ \theta = 74.0° \nearrow$
12-233. Sí, puede atrapar el balón.
12-234. $v_B = 5.75 \text{ m/s},\ v_{C/B} = 17.8 \text{ m/s},$
$\theta = 76.2° \nwarrow,\ a_{C/B} = 9.81 \text{ m/s}^2 \downarrow$
12-235. $v_{B/A} = 11.2 \text{ m/s},\ \theta = 50.3°$

Capítulo 13

13-1. $s = 97.4 \text{ ft}$
13-2. $T = 5.98 \text{ kip}$
13-3. $v = 3.36 \text{ m/s},\ s = 5.04 \text{ m}$
13-5. $F = 6.37 \text{ N}$
13-6. $v = 59.8 \text{ ft/s}$
13-7. $v = 60.7 \text{ ft/s}$
13-9. $t = 2.04 \text{ s}$
13-10. $s = 8.49 \text{ m}$
13-11. $t = 0.249 \text{ s}$
13-13. $a_A = 9.66 \text{ ft/s}^2 \leftarrow,\ a_B = 15.0 \text{ ft/s}^2 \rightarrow$
13-14. $T = 11.25 \text{ kN},\ F = 33.75 \text{ kN}$
13-15. $A_x = 685 \text{ N},\ A_y = 1.19 \text{ kN},\ M_A = 4.74 \text{ kN} \cdot \text{m}$
13-17. $a = \frac{1}{2}(1 - \mu_k)\, g$
13-18. $R = 5.30 \text{ ft},\ t_{AC} = 1.82 \text{ s}$
13-19. $R = 5.08 \text{ ft},\ t_{AC} = 1.48 \text{ s}$
13-21. $\theta = 22.6°$
13-22. $v_B = 5.70 \text{ m/s} \uparrow$
13-23. $v = 3.62 \text{ m/s} \uparrow$
13-25. $R = 2.45 \text{ m},\ t_{AB} = 1.72 \text{ s}$
13-26. $R = \{150t\} \text{ N}$
13-27. $t = 2.11 \text{ s}$
13-29. $v = 2.01 \text{ ft/s}$

13-30. $v = 0.301$ m/s
13-31. $T = 1.63$ kN
13-33. $P = 2mg\left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\operatorname{sen}\theta}\right)$,
$a = \left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\operatorname{sen}\theta}\right)g$
13-34. $v = 2.19$ m/s
13-35. $t = 5.66$ s
13-37. $t = 0.519$ s
13-38. $s = 16.7$ m
13-39. $v = \dfrac{1}{m}\sqrt{1.09F_0^2t^2 + 2F_0tmv_0 + m^2v_0^2}$,
$x = \dfrac{y}{0.3} + v_0\left(\sqrt{\dfrac{2m}{0.3F_0}}\right)y^{1/2}$
13-41. $x = d$, $v = \sqrt{\dfrac{kd^2}{m_A + m_B}}$
13-42. $x = d$ para que se separen.
13-43. $v = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}\left[\dfrac{e^{2t\sqrt{mg/k}} - 1}{e^{2t\sqrt{mg/k}} + 1}\right]$,
$v_t = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$
13-45. $v = 32.2$ ft/s
13-46. $P = 2mg\tan\theta$
13-47. $P = 2mg\left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\operatorname{sen}\theta}\right)$
13-49. $a_B = 7.59$ ft/s^2
13-50. $v = 5.13$ m/s
13-51. $d = \dfrac{(m_A + m_B)g}{k}$
13-53. $r = 1.36$ m
13-54. $v = 10.5$ m/s
13-55. $N = 6.18$ kN
13-57. $v = 1.63$ m/s, $N = 7.36$ N
13-58. $v = 0.969$ m/s
13-59. $v = 1.48$ m/s
13-61. $v = 9.29$ ft/s, $T = 38.0$ lb
13-62. $v = 2.10$ m/s
13-63. $T = 0$, $T = 10.6$ lb
13-65. $v = 6.30$ m/s, $F_n = 283$ N, $F_t = 0$, $F_b = 490$ N
13-66. $v = 22.1$ m/s
13-67. $\theta = 26.7°$
13-69. $F_f = 1.11$ kN, $N = 6.73$ kN
13-70. $v_C = 19.9$ ft/s, $N_C = 7.91$ lb, $v_B = 21.0$ ft/s
13-71. $N = 277$ lb, $F = 13.4$ lb
13-73. $v = \sqrt{gr}$, $N = 2mg$
13-74. $v = 49.5$ m/s
13-75. $a_t = g\left(\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$, $v = \sqrt{v_0^2 + gx^2}$,
$N = \dfrac{m}{\sqrt{1 + x^2}}\left[g - \dfrac{v_0^2 + gx^2}{1 + x^2}\right]$

13-77. $F_s = 4.90$ lb
13-78. $v = 40.1$ ft/s
13-79. $N_P = 2.65$ kN, $\rho = 68.3$ m
13-81. $\theta = 37.7°$
13-82. $N_B = 80.4$ N, $a_t = 1.92$ m/s^2
13-85. $F_A = 4.46$ lb
13-86. $F = 210$ N
13-87. $F = 1.60$ lb
13-89. $F_r = -29.4$ N, $F_\theta = 0$, $F_z = 392$ N
13-90. $F_r = 102$ N, $F_z = 375$ N, $F_\theta = 79.7$ N
13-91. $N = 4.90$ N, $F = 4.17$ N
13-93. $F_{OA} = 12.0$ lb
13-94. $F = 5.07$ kN, $N = 2.74$ kN
13-95. $F = 17.0$ N
13-97. $(N)_{\text{máx}} = 36.0$ N, $(N)_{\text{mín}} = 4.00$ N
13-98. $N_s = 3.72$ N, $F_r = 7.44$ N
13-99. $F_r = -900$ N, $F_\theta = -200$ N, $F_z = 1.96$ kN
13-101. $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{4r_c\dot{\theta}_0^2}{g}\right)$
13-102. $N = 0.883$ N, $F = 3.92$ N
13-103. $N = 2.95$ N
13-105. $F_r = 1.78$ N, $N_s = 5.79$ N
13-106. $F_r = 2.93$ N, $N_s = 6.37$ N
13-107. $F = 0.163$ lb
13-109. $F_r = 25.6$ N, $F_{OA} = 0$
13-110. $F_r = 20.7$ N, $F_{OA} = 0$
13-111. $r = 0.198$ m
13-113. $v_o = 30.4$ km/s,
$\dfrac{1}{r} = 0.348\,(10^{-12})\cos\theta + 6.74\,(10^{-12})$
13-114. $h = 35.9$ mm, $v_s = 3.07$ km/s
13-115. $v_0 = 7.45$ km/s
13-118. $v_B = 7.71$ km/s, $v_A = 4.63$ km/s
13-119. $v_A = 6.67(10^3)$ m/s, $v_B = 2.77(10^3)$ m/s
13-121. $v_A = 7.47$ km/s
13-122. $r_0 = 11.1$ Mm, $\Delta v_A = 814$ m/s
13-123. $(v_A)_C = 5.27(10^3)$ m/s, $\Delta v = 684$ m/s
13-125. (a) $r = 194\,(10^3)$ mi
(b) $r = 392\,(10^3)$ mi
(c) $194\,(10^3)$ mi $< r < 392\,(10^3)$ mi
(d) $r > 392\,(10^3)$ mi
13-126. $v_A = 4.89(10^3)$ m/s, $v_B = 3.26(10^3)$ m/s
13-127. $v_A = 11.5$ Mm/h, $d = 27.3$ Mm
13-129. $v_A = 2.01(10^3)$ m/s
13-130. $v_{A'} = 521$ m/s, $t = 21.8$ h
13-131. $v_A = 7.01(10^3)$ m/s

Capítulo 14

14-1. $v = 10.7$ m/s
14-2. $x_{\text{máx}} = 3.24$ ft

14-3. $s = 1.35$ m
14-5. $h = 39.3$ m, $\rho = 26.2$ m
14-6. $d = 12$ m
14-7. Observador A: $v_2 = 6.08$ m/s,
Observador B: $v_2 = 4.08$ m/s
14-9. $x_{máx} = 0.173$ m
14-10. $s = 20.5$ m
14-11. $v = 4.08$ m/s
14-13. $v_B = 31.5$ ft/s, $d = 22.6$ ft, $v_C = 54.1$ ft/s
14-14. $v_A = 7.18$ ft/s
14-15. $v_A = 3.52$ ft/s
14-17. $v_B = 27.8$ ft/s
14-18. $y = 3.81$ ft
14-19. $v_B = 3.34$ m/s
14-21. $v_A = 0.771$ ft/s
14-22. $s_{Tot} = 3.88$ ft
14-23. $x = 0.688$ m
14-25. $s = 0.0735$ ft
14-26. $v_A = 28.3$ m/s
14-27. $v_B = 18.0$ m/s, $N_B = 12.5$ kN
14-29. $s = 0.730$ m
14-30. $s = 3.33$ ft
14-31. $R = 2.83$ m, $v_C = 7.67$ m/s
14-33. $d = 36.2$ ft
14-34. $s = 1.90$ ft
14-35. $v_B = 42.2$ ft/s, $N = 50.6$ lb, $a_t = 26.2$ ft/s^2
14-37. $h_A = 22.5$ m, $h_C = 12.5$ m
14-38. $v_B = 14.9$ m/s, $N = 1.25$ kN
14-39. $v_B = 5.42$ m/s
14-41. $l_0 = 2.77$ ft
14-42. $\theta = 47.2°$
14-43. $P_i = 4.20$ hp
14-45. $P = 8.32\,(10^3)$ hp
14-46. $t = 46.2$ min
14-47. $P = 12.6$ kW
14-49. $P_{máx} = 113$ kW, $P_{prom} = 56.5$ kW
14-50. $P_o = 4.36$ hp
14-51. $P = 92.2$ hp
14-53. $P_i = 483$ kW
14-54. $P_i = 622$ kW
14-55. $P_i = 22.2$ kW
14-57. $P = 0.0364$ hp
14-58. $P = 0.231$ hp
14-59. $P = 12.6$ kW
14-61. $P = \{400(10^3)t\}$ W
14-62. $P = \{160\,t - 533t^2\}$ kW, $U = 1.69$ kJ
14-63. $P_{máx} = 10.7$ kW
14-65. $P = 58.1$ kW
14-66. $F = 227$ N
14-67. $h = 133$ in
14-69. $N = 694$ N
14-70. $\theta = 48.2°$
14-71. $v_C = 17.7$ ft/s
14-73. $N_B = 0$, $h = 18.75$ m, $N_C = 17.2$ kN
14-74. $v_A = 1.54$ m/s, $v_B = 4.62$ m/s
14-75. $s_B = 5.70$ m
14-77. $h = 23.75$ m, $v_C = 21.6$ m/s
14-78. $v_B = 15.5$ m/s
14-79. $l = 2.77$ ft
14-81. $\theta = 118°$
14-83. $F = GM_e m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$
14-85. $v_B = 34.8$ Mm/h
14-86. $s = 130$ m
14-87. $s_B = 0.638$ m, $s_A = 1.02$ m
14-89. $\theta = 22.3°$, $s = 0.587$ m
14-90. $N = 78.6$ N
14-91. $y = 5.10$ m, $N = 15.3$ N, $a = 9.32$ m/s^2 ↘
14-93. $v = 1.68$ m/s
14-94. $v_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}(\pi - 2)gr}$
14-95. $v = 6.97$ m/s
14-97. $d = 1.34$ m

Capítulo 15

15-1. $v = 1.75$ N·s
15-2. $v = 29.4$ ft/s
15-3. $F = 24.8$ kN
15-5. $I = 5.68$ N·s
15-6. $F = 19.4$ kN, $T = 12.5$ kN
15-7. $F_{AB} = 16.7$ lb, $v = 13.4$ ft/s
15-9. $v = 6.62$ m/s
15-10. $P = 205$ N
15-11. $v = 60.0$ m/s
15-13. $\mu_k = 0.340$
15-14. $I = 15$ kN·s en ambos casos
15-15. $v = 4.05$ m/s
15-17. $v = 8.81$ m/s, $s = 24.8$ m
15-18. $v|_{t=3\,s} = 5.68$ m/s ↓, $v|_{t=6\,s} = 21.1$ m/s ↑
15-19. $v = 4.00$ m/s
15-21. $T = 14.9$ kN, $F = 24.8$ kN
15-22. $v_{máx} = 108$ m/s, $s = 1.83$ km
15-23. $v = 10.1$ ft/s
15-25. $v = 7.21$ m/s ↑
15-26. Observador A: $v = 7.40$ m/s,
Observador B: $v = 5.40$ m/s
15-27. $v = 5.07$ m/s
15-29. $t = 1.02$ s, $I = 162$ N·s
15-30. $v = 16.1$ m/s
15-31. $(v_A)_2 = 10.5$ ft/s →
15-33. $v = 7.65$ m/s
15-34. $v = 0.6$ ft/s ←
15-35. $v = 18.6$ m/s →

15-37. $v = 5.21\ \text{m/s} \leftarrow,\ \Delta T = -32.6\ \text{kJ}$
15-38. $v = 0.5\ \text{m/s},\ \Delta T = -16.9\ \text{kJ}$
15-39. $v = 733\ \text{m/s}$
15-41. $v_B = 3.48\ \text{ft/s},\ d = 0.376\ \text{ft}$
15-42. $v_B = 3.48\ \text{ft/s},\ N_{\text{prom}} = 504\ \text{lb},\ t = 0.216\ \text{s}$
15-43. $s = 4.00\ \text{m}$
15-45. $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh},\ \theta_2 = \text{sen}^{-1}\left(\dfrac{v_1 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{v_1^2 + 2gh}}\right)$
15-46. $\theta = \phi = 9.52°$
15-47. $s_{\text{máx}} = 481\ \text{mm}$
15-49. $x = 0.364\ \text{ft} \leftarrow$
15-50. $x = 1.58\ \text{ft} \rightarrow$
15-51. $s_B = 6.67\ \text{m} \rightarrow$
15-53. $s_B = 71.4\ \text{mm} \rightarrow$
15-54. $s_B = 71.4\ \text{mm} \rightarrow$
15-55. $v_c = 5.04\ \text{m/s} \leftarrow$
15-57. $d = 6.87\ \text{mm}$
15-59. $e = 0.75,\ \Delta T = -9.65\ \text{kJ}$
15-61. $x_{\text{máx}} = 0.839\ \text{m}$
15-63. $v_C = 0.1875v \rightarrow,\ v_D = 0.5625v \rightarrow,$
$v_B = 0.8125v \rightarrow,\ v_A = 0.4375v \rightarrow$
15-65. $t = 0.226\ \text{s}$
15-66. $(v_B)_2 = \dfrac{1}{3}\sqrt{2gh}(1 + e)$
15-67. $(v_A)_2 = 1.04\ \text{ft/s},\ (v_B)_3 = 0.964\ \text{ft/s},$
$(v_C)_3 = 11.9\ \text{ft/s}$
15-69. $v'_B = 22.2\ \text{m/s},\ \theta = 13.0°$
15-70. $(v_B)_2 = \dfrac{e(1 + e)}{2}v_0$
15-71. $v_A = 29.3\ \text{ft/s},\ v_{B2} = 33.1\ \text{ft/s},\ \theta = 27.7°\ \measuredangle$
15-73. $v_A = 1.35\ \text{m/s} \rightarrow,\ v_B = 5.89\ \text{m/s},\ \theta = 32.9°\ \measuredangle$
15-74. $e = 0.0113$
15-75. $h = 1.57\ \text{m}$
15-77. $(v_B)_3 = 3.24\ \text{m/s},\ \theta = 43.9°$
15-78. $v'_B = 31.8\ \text{ft/s}$
15-79. $(v_A)_2 = 3.80\ \text{m/s} \leftarrow,$
$(v_B)_2 = 6.51\ \text{m/s},\ (\theta_B)_2 = 68.6°$
15-81. (a) $(v_B)_1 = 8.81\ \text{m/s},\ \theta = 10.5°\ \measuredangle$,
(b) $(v_B)_2 = 4.62\ \text{m/s},\ \phi = 20.3°\ \measuredangle$,
(c) $s = 3.96\ \text{m}$
15-82. $s = 0.456\ \text{ft}$
15-83. $(v_A)_2 = 42.8\ \text{ft/s} \leftarrow,\ F = 2.49\ \text{kip}$
15-85. $\mu_k = 0.25$
15-86. $(v_B)_2 = 1.06\ \text{m/s} \leftarrow,\ (v_A)_2 = 0.968\ \text{m/s},$
$(\theta_A)_2 = 5.11°\ \measuredangle$
15-87. $(v_A)_2 = 4.06\ \text{ft/s},\ (v_B)_2 = 6.24\ \text{ft/s}$
15-89. $(v_A)_2 = 12.1\ \text{m/s},\ (v_B)_2 = 12.4\ \text{m/s}$
15-90. $d = 1.15\ \text{ft},\ h = 0.770\ \text{ft}$
15-91. $(v_B)_3 = 1.50\ \text{m/s}$
15-93. $(v_A)_2 = 8.19\ \text{m/s},\ (v_B)_2 = 9.38\ \text{m/s}$
15-94. $\{-9.17\mathbf{i} - 6.12\mathbf{k}\}\ \text{slug} \cdot \text{ft}^2/\text{s}$
15-95. $\{-9.17\mathbf{i} + 4.08\mathbf{j} - 2.72\mathbf{k}\}\ \text{slug} \cdot \text{ft}^2/\text{s}$

15-97. $(H_A)_P = \{-52.8\mathbf{k}\}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s},$
$(H_B)_P = \{-118\mathbf{k}\}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$
15-98. $\{-21.5\mathbf{i} + 21.5\mathbf{j} + 37.6\}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$
15-99. $\{21.5\mathbf{i} + 21.5\mathbf{j} + 59.1\mathbf{k}\}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$
15-101. $v = 20.2\ \text{ft/s},\ h = 6.36\ \text{ft}$
15-102. $t = 11.9\ \text{s}$
15-103. $v_2 = 9.22\ \text{ft/s},\ \Sigma U_{1-2} = 3.04\ \text{ft} \cdot \text{lb}$
15-105. $v = 9.50\ \text{m/s}$
15-107. $v = 3.33\ \text{m/s}$
15-109. $v_C = 44.0\ \text{ft/s},\ H_A = 8.19\ \text{slug} \cdot \text{ft}^2/\text{s}.$
La cuerda no llegará a su longitud no estirada
15-110. $v_2 = 4.03\ \text{m/s},\ \Sigma U_{1-2} = 725\ \text{J}$
15-111. $v_B = 10.8\ \text{ft/s},\ U_{AB} = 11.3\ \text{ft} \cdot \text{lb}$
15-113. $v_B = 10.2\ \text{km/s},\ r_B = 13.8\ \text{Mm}$
15-114. $T = 40.1\ \text{kN}$
15-115. $C_x = 4.97\ \text{kN},\ D_x = 2.23\ \text{kN},\ D_y = 7.20\ \text{kN}$
15-117. $F = 303\ \text{lb}$
15-118. $F = 50.0\ \text{lb}$
15-119. $F_x = 9.87\ \text{lb},\ F_y = 4.93\ \text{lb}$
15-121. $F_x = 19.5\ \text{lb},\ F_y = 1.96\ \text{lb}$
15-122. $F = 20.0\ \text{lb}$
15-123. $F = 22.4\ \text{lb}$
15-125. $T = 82.8\ \text{N},\ N = 396\ \text{N}$
15-126. $F = 6.24\ \text{N},\ P = 3.12\ \text{N}$
15-127. $d = 2.56\ \text{ft}$
15-129. $C_x = 4.26\ \text{kN},\ C_y = 2.12\ \text{kN},\ M_C = 5.16\ \text{kN} \cdot \text{m}$
15-130. $v = \left\{\dfrac{8000}{2000 + 50t}\right\}\ \text{m/s}$
15-131. $A_y = 4.18\ \text{kN},\ B_x = 65.0\ \text{N} \rightarrow,$
$B_y = 3.72\ \text{kN} \uparrow$
15-133. $a = 0.125\ \text{m/s}^2,\ v = 4.05\ \text{m/s}$
15-134. $v_{\text{máx}} = 2.07\ (10^3)\ \text{ft/s}$
15-135. 452 Pa
15-137. $R = \{20t + 2.48\}\ \text{lb}$
15-138. $a_i = 133\ \text{ft/s}^2,\ a_f = 200\ \text{ft/s}^2$
15-139. $v_{\text{máx}} = 580\ \text{ft/s}$
15-141. $v = \sqrt{\dfrac{2}{3}g\left(\dfrac{y^3 - h^3}{y^2}\right)}$
15-142. $F_D = 11.5\ \text{kN}$
15-143. $a = 37.5\ \text{ft/s}^2$
15-145. $a = 0.0476\ \text{m/s}^2$
15-146. $v_{\text{máx}} = 2.07(10^3)\ \text{ft/s}$
15-147. $F = \{7.85t + 0.320\}\ \text{N}$
15-149. $F = m'v^2$

Capítulo 16

16-1. $v_A = 2.60\ \text{m/s},\ a_A = 9.35\ \text{m/s}^2$
16-2. $v_A = 22.0\ \text{m/s},$
$(a_A)_t = 12.0\ \text{m/s}^2,\ (a_A)_n = 968\ \text{m/s}^2$
16-3. $v_A = 26.0\ \text{m/s},$
$(a_A)_t = 10.0\ \text{m/s}^2,\ (a_A)_n = 1352\ \text{m/s}^2$

16-5. $\theta = 5443$ rev, $\omega = 740$ rad/s, $\alpha = 8$ rad/s^2
16-6. $\theta = 3.32$ rev, $t = 1.67$ s
16-7. $t = 6.98$ s, $\theta_D = 34.9$ rev
16-9. $a_B = 29.0$ m/s^2
16-10. $a_B = 16.5$ m/s^2
16-11. $\alpha = 60$ rad/s^2, $\omega = 90.0$ rad/s, $\theta = 90.0$ rad
16-13. $\omega_B = 180$ rad/s, $\omega_C = 360$ rad/s
16-14. $\omega = 42.7$ rad/s, $\theta = 42.7$ rad
16-15. $a_t = 2.83$ m/s^2, $a_n = 35.6$ m/s^2
16-17. $\omega_B = 21.9$ rad/s $\curvearrowright$
16-18. $\omega_B = 31.7$ rad/s $\curvearrowright$
16-19. $\omega_B = 156$ rad/s
16-21. $v_A = 8.10$ m/s,
$(a_A)_t = 4.95$ m/s^2, $(a_A)_n = 437$ m/s^2
16-22. $\omega_D = 4.00$ rad/s, $\alpha_D = 0.400$ rad/s^2
16-23. $\omega_D = 12.0$ rad/s, $\alpha_D = 0.600$ rad/s^2
16-25. $v_P = 2.42$ ft/s, $a_P = 34.4$ ft/s^2
16-26. $\omega_C = 1.68$ rad/s, $\theta_C = 1.68$ rad
16-27. $\omega = 148$ rad/s
16-29. $r_A = 31.8$ mm, $r_B = 31.8$ mm,
1.91 latas por minuto
16-30. $(\omega_B)_{\text{máx}} = 8.49$ rad/s, $(v_C)_{\text{máx}} = 0.6$ m/s
16-31. $s_W = 2.89$ m
16-33. $\omega_B = 312$ rad/s, $\alpha_B = 176$ rad/s^2
16-34. $v_E = 3$ m/s,
$(a_E)_t = 2.70$ m/s^2, $(a_E)_n = 600$ m/s^2
16-35. $\mathbf{v}_C = \{-4.8\mathbf{i} - 3.6\mathbf{j} - 1.2\mathbf{k}\}$ m/s,
$\mathbf{a}_C = \{38.4\mathbf{i} - 64.8\mathbf{j} + 40.8\mathbf{k}\}$ m/s^2
16-37. $v_C = 2.50$ m/s, $a_C = 13.1$ m/s^2
16-38. $v = 7.21$ ft/s, $a = 91.2$ ft/s^2
16-39. $\omega = \dfrac{rv_A}{y\sqrt{y^2 - r^2}}$, $\alpha = \dfrac{rv_A^2(2y^2 - r^2)}{y^2(y^2 - r^2)^{3/2}}$
16-41. $\omega = 8.70$ rad/s, $\alpha = -50.5$ rad/s^2
16-42. $\omega = -19.2$ rad/s, $\alpha = -183$ rad/s^2
16-43. $\omega_{AB} = 0$
16-45. $v = -\left(\dfrac{r_1^2\omega \operatorname{sen} 2\theta}{2\sqrt{r_1^2\cos^2\theta + r_2^2 + 2r_1r_2}} + r_1\omega \operatorname{sen}\theta\right)$
16-46. $v = \omega d\left(\operatorname{sen}\theta + \dfrac{d \operatorname{sen} 2\theta}{2\sqrt{(R + r)^2 - d^2\operatorname{sen}^2\theta}}\right)$
16-47. $v = -r\omega \operatorname{sen}\theta$
16-49. $v_C = L\omega\uparrow$, $a_C = 0.577L\omega^2\uparrow$
16-50. $\omega = \dfrac{2v_0}{r}\operatorname{sen}^2\theta/2$, $\alpha = \dfrac{2v_0^2}{r^2}(\operatorname{sen}\theta)(\operatorname{sen}^2\theta/2)$
16-51. $v_B = \left(\dfrac{h}{d}\right)v_A$
16-53. $\dot{\theta} = \dfrac{v \operatorname{sen}\phi}{L\cos(\phi - \theta)}$
16-54. $\omega = \dfrac{v}{2r}$
16-55. $\omega' = \dfrac{(R + r)\omega}{r}$, $\alpha' = \dfrac{(R + r)\alpha}{r}$

16-57. $v_B = 12.6$ in/s, $65.7^\circ \swarrow$
16-58. $\omega_{AB} = 2.00$ rad/s
16-59. $v_C = 1.06$ m/s $\leftarrow$, $\omega_{BC} = 0.707$ rad/s $\curvearrowleft$
16-61. $\omega_{BC} = 2.31$ rad/s $\curvearrowright$, $\omega_{AB} = 3.46$ rad/s $\curvearrowright$
16-62. $\omega_A = 32.0$ rad/s
16-63. $\omega_{CB} = 2.45$ rad/s $\curvearrowright$, $v_C = 2.20$ ft/s $\leftarrow$
16-65. $\omega = 20$ rad/s, $v_A = 2$ ft/s $\rightarrow$
16-66. $\omega = 3.11$ rad/s, $v_O = 0.667$ ft/s $\rightarrow$
16-67. $v_A = 5.16$ ft/s, $\theta = 39.8^\circ \nearrow$
16-69. $v_C = 24.6$ m/s $\downarrow$
16-70. $\omega_{BC} = 10.6$ rad/s $\curvearrowright$, $v_C = 29.0$ m/s $\rightarrow$
16-71. $v_P = 4.88$ m/s $\leftarrow$
16-73. $v_E = 4.00$ m/s, $\theta = 52.7^\circ \searrow$
16-74. $\omega_B = 90$ rad/s $\curvearrowleft$, $\omega_A = 180$ rad/s $\curvearrowright$
16-75. $\omega_{CD} = 4.03$ rad/s
16-77. $\omega_P = 5$ rad/s, $\omega_A = 1.67$ rad/s
16-78. $\omega_D = 105$ rad/s $\curvearrowleft$
16-79. $v_D = 7.07$ m/s
16-82. $\omega_{AB} = 1.24$ rad/s
16-83. $\omega_{BC} = 6.79$ rad/s
16-85. $v_A = 2$ ft/s $\rightarrow$, $v_B = 10$ ft/s $\leftarrow$.
El cilindro se desliza.
16-86. $v_B = 14$ in/s$\downarrow$,
$v_A = 10.8$ in/s, $\theta = 21.8^\circ \searrow$
16-87. $\omega_{BC} = 8.66$ rad/s $\curvearrowright$, $\omega_{AB} = 4.00$ rad/s $\curvearrowleft$
16-89. $v_A = \omega(r_2 - r_1)$
16-90. $v_C = 2.50$ ft/s $\leftarrow$,
$v_D = 9.43$ ft/s, $\theta = 55.8^\circ \nwarrow$
16-91. $v_C = 2.50$ ft/s $\leftarrow$,
$v_E = 7.91$ ft/s, $\theta = 18.4^\circ \nwarrow$
16-93. $\omega_{BPD} = 3.00$ rad/s $\curvearrowleft$, $v_P = 1.79$ m/s $\leftarrow$
16-94. $\omega_B = 6.67$ rad/s
16-95. $v_A = 60.0$ ft/s $\rightarrow$, $v_C = 220$ ft/s $\leftarrow$,
$v_B = 161$ ft/s, $\theta = 60.3^\circ \swarrow$
16-97. $\omega_S = 57.5$ rad/s $\curvearrowright$, $\omega_{OA} = 10.6$ rad/s $\curvearrowright$
16-98. $\omega_S = 15.0$ rad/s, $\omega_R = 3.00$ rad/s
16-99. $\omega_{CD} = 57.7$ rad/s $\curvearrowright$
16-101. $\omega_R = 4$ rad/s
16-102. $\omega_R = 4$ rad/s
16-103. $v_C = 3.86$ m/s $\leftarrow$, $a_C = 17.7$ m/s^2 $\leftarrow$
16-105. $\alpha = 0.0962$ rad/s^2 $\curvearrowleft$, $a_A = 0.385$ ft/s^2 $\rightarrow$
16-106. $a_C = 13.0$ m/s^2 $\swarrow$, $\alpha_{BC} = 12.4$ rad/s^2 $\curvearrowleft$
16-107. $\omega = 6.67$ rad/s $\curvearrowright$, $v_B = 4.00$ m/s $\searrow$
$\alpha = 15.7$ rad/s^2 $\curvearrowleft$, $a_B = 24.8$ m/s^2 $\nwarrow$
16-109. $\omega_{BC} = 0$, $\omega_{CD} = 4.00$ rad/s $\curvearrowleft$,
$\alpha_{BC} = 6.16$ rad/s^2 $\curvearrowleft$, $\alpha_{CD} = 21.9$ rad/s^2 $\curvearrowleft$
16-110. $\omega_C = 20.0$ rad/s $\curvearrowright$, $\alpha_C = 127$ rad/s $\curvearrowleft$
16-111. $\alpha_{AB} = 4.62$ rad/s^2 $\curvearrowright$,
$a_B = 13.3$ m/s^2, $\theta = 37.0^\circ \swarrow$
16-113. $v_A = 0.424$ m/s, $\theta_v = 45^\circ \swarrow$,
$a_A = 0.806$ m/s^2, $\theta_a = 7.13^\circ \nearrow$

16-114. $v_B = 0.6\ \text{m/s} \downarrow$,
$a_B = 1.84\ \text{m/s}^2, \theta = 60.6°$ ◺
16-115. $v_B = 4v \rightarrow$,
$v_A = 2\sqrt{2v}, \theta = 45°$ ◿,
$a_B = \dfrac{2v^2}{r}\downarrow, a_A = \dfrac{2v^2}{r}\rightarrow$
16-117. $a_C = 10.0\ \text{m/s}^2, \theta = 2.02°$ ◸
16-118. $\alpha = 40.0\ \text{rad/s}^2, a_A = 2.00\ \text{m/s}^2 \leftarrow$
16-119. $v_B = 1.58\omega a, a_B = 1.58\alpha a - 1.77\omega^2 a$
16-121. $\omega_{AC} = 0, \omega_F = 10.7\ \text{rad/s}$ ↷,
$\alpha_{AC} = 28.7\ \text{rad/s}^2$ ↷
16-122. $\omega_{CD} = 7.79\ \text{rad/s}$ ↶, $\alpha_{CD} = 136\ \text{rad/s}^2$ ↷
16-123. $v_C = 1.56\ \text{m/s} \leftarrow$,
$a_C = 29.7\ \text{m/s}^2, \theta = 24.1°$ ◺
16-125. $\omega = 4.73\ \text{rad/s}$ ↶, $\alpha = 131\ \text{rad/s}^2$ ↷
16-126. $\omega_{AB} = 7.17\ \text{rad/s}$ ↷, $\alpha_{AB} = 23.1\ \text{rad/s}^2$ ↶
16-127. $\alpha_{AB} = 3.70\ \text{rad/s}^2$ ↷
16-129. $\mathbf{v}_B = \{0.6\mathbf{i} + 2.4\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$,
$\mathbf{a}_B = \{-14.2\mathbf{i} + 8.40\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2$
16-130. $v_B = 1.30\ \text{ft/s}, a_B = 0.6204\ \text{ft/s}^2$
16-131. $\mathbf{v}_m = \{7.5\mathbf{i} - 5\mathbf{j}\}\ \text{ft/s}, \mathbf{a}_m = \{5\mathbf{i} + 3.75\mathbf{j}\}\ \text{ft/s}^2$
16-133. $\mathbf{v}_A = \{-17.2\mathbf{i} + 12.5\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$,
$\mathbf{a}_A = \{349\mathbf{i} + 597\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2$
16-134. $\mathbf{a}_A = \{-5.60\mathbf{i} - 16\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2$
16-135. $v_C = 2.40\ \text{m/s}, \theta = 60°$ ◺
16-137. $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} = \{31.0\mathbf{i}\}\ \text{m/s}$,
$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} = \{-14.0\mathbf{i} - 206\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2$
16-138. $v_B = 7.7\ \text{m/s}, a_B = 201\ \text{m/s}^2$
16-139. $\omega_{CB} = 1.33\ \text{rad/s}$ ↶, $\alpha_{CD} = 3.08\ \text{rad/s}^2$ ↷
16-141. $\omega_{CD} = 3.00\ \text{rad/s}$ ↷, $\alpha_{CD} = 12.0\ \text{rad/s}^2$ ↷
16-142. $\mathbf{v}_C = \{-0.944\mathbf{i} + 2.02\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$,
$\mathbf{a}_C = \{-11.2\mathbf{i} - 4.15\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2$
16-143. $\omega_{AB} = 5\ \text{rad/s}$ ↷, $\alpha_{AB} = 2.5\ \text{rad/s}^2$ ↷
16-145. $\mathbf{v}_C = \{-7.00\mathbf{i} + 17.3\mathbf{j}\}\ \text{ft/s}$,
$\mathbf{a}_C = \{-34.6\mathbf{i} - 15.5\mathbf{j}\}\ \text{ft/s}^2$
16-146. $\mathbf{v}_C = \{-7.00\mathbf{i} + 17.3\mathbf{j}\}\ \text{ft/s}$,
$\mathbf{a}_C = \{-38.8\mathbf{i} - 6.84\mathbf{j}\}\ \text{ft/s}^2$
16-147. $\omega_{AB} = 0.667\ \text{rad/s}$ ↶, $\alpha_{AB} = 3.08\ \text{rad/s}^2$ ↷
16-149. $(\mathbf{v}_{\text{rel}})_{xyz} = \mathbf{0}$, $(\mathbf{a}_{\text{rel}})_{xyz} = \{1\mathbf{i}\}\ \text{m/s}^2$
16-150. $\omega_{DC} = 2.96\ \text{rad/s}$ ↷
16-151. $\omega_{AC} = 0, \alpha_{AC} = 14.4\ \text{rad/s}^2$ ↷

Capítulo 17

17-1. $I_y = \dfrac{1}{3}ml^2$

17-2. $m = \pi hR^2\left(k + \dfrac{aR^2}{2}\right), I_z = \dfrac{\pi hR^4}{2}\left[k + \dfrac{2aR^2}{3}\right]$

17-3. $I_z = mR^2$
17-5. $k_x = 1.20\ \text{in}$
17-6. $I_x = \dfrac{2}{5}mr^2$
17-7. $I_x = \dfrac{93}{70}mb^2$
17-9. $I_y = \dfrac{m}{6}(a^2 + h^2)$
17-10. $k_O = 2.17\ \text{m}$
17-11. $I_O = 1.36\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
17-13. $I_A = 7.67\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
17-14. $I_A = 222\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2$
17-15. $I_O = 6.23\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
17-17. $I_G = 0.230\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
17-18. $I_O = 0.560\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
17-19. $I_G = 118\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2$
17-21. $\bar{y} = 1.78\ \text{m}, I_G = 4.45\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
17-22. $I_x = 3.25\ \text{g}\cdot\text{m}^2$
17-23. $I_{x'} = 7.19\ \text{g}\cdot\text{m}^2$
17-25. $F = 5.96\ \text{lb}, N_B = 99.0\ \text{lb}, N_A = 101\ \text{lb}$
17-26. $A_y = 72.6\ \text{kN}, B_y = 71.6\ \text{kN}, a_G = 0.250\ \text{m/s}^2$
17-27. $N_A = 1393\ \text{lb}, N_B = 857\ \text{lb}, t = 2.72\ \text{s}$
17-29. $a = 2.74\ \text{m/s}^2, T = 25.1\ \text{kN}$
17-30. $N = 29.6\ \text{kN}, V = 0, M = 51.2\ \text{kN}\cdot\text{m}$
17-31. $h = 3.12\ \text{ft}$
17-33. $P = 579\ \text{N}$
17-34. $a = 4\ \text{m/s}^2 \rightarrow, N_B = 1.14\ \text{kN}, N_A = 327\ \text{N}$
17-35. $a_G = 13.3\ \text{ft/s}^2$
17-37. $P = 785\ \text{N}$
17-38. $P = 314\ \text{N}$
17-39. $N = 0.433wx, V = 0.25wx, M = 0.125wx^2$
17-41. $B_x = 73.9\ \text{lb}, B_y = 69.7\ \text{lb}, N_A = 120\ \text{lb}$
17-42. $a = 2.01\ \text{m s}^2$.
La caja se desliza
17-43. $a = 2.68\ \text{ft/s}^2, N_A = 26.9\ \text{lb}, N_B = 123\ \text{lb}$
17-45. $T = 15.7\ \text{kN}, C_x = 8.92\ \text{kN}, C_y = 16.3\ \text{kN}$
17-46. $a = 9.81\ \text{m/s}^2, C_x = 12.3\ \text{kN}, C_y = 12.3\ \text{kN}$
17-47. $h_{\text{máx}} = 3.16\ \text{ft}, F_A = 248\ \text{lb}, N_A = 400\ \text{lb}$
17-49. $F_{AB} = 112\ \text{N}, C_x = 26.2\ \text{N}, C_y = 49.8\ \text{N}$
17-50. $P = 765\ \text{N}$
17-51. $T = 1.52\ \text{kN}, \theta = 18.6°$
17-53. $\alpha = 9.67\ \text{rad/s}^2$
17-54. $F_C = 16.1\ \text{lb}, N_C = 159\ \text{lb}$
17-55. $\alpha = 2.62\ \text{rad/s}^2$
17-57. $\omega = 56.2\ \text{rad/s}, A_x = 0, A_y = 98.1\ \text{N}$
17-58. $\alpha = 14.7\ \text{rad/s}^2, A_x = 88.3\ \text{N}, A_y = 147\ \text{N}$
17-59. $F_A = \dfrac{3}{2}mg$
17-61. $\alpha = 0.694\ \text{rad/s}^2$
17-62. $\omega = 10.9\ \text{rad/s}$
17-63. $\omega = 9.45\ \text{rad/s}$
17-65. $M = 0.233\ \text{lb}\cdot\text{ft}$
17-67. $\alpha = 8.68\ \text{rad/s}^2, A_n = 0, A_t = 106\ \text{N}$
17-69. $\alpha = 7.28\ \text{rad/s}^2$
17-70. $F = 22.1\ \text{N}$
17-71. $\omega = 0.474\ \text{rad/s}$

17-73. $t = 6.71$ s
17-74. $\alpha = 14.2$ rad/s^2
17-75. $A_x = 89.2$ N, $A_y = 66.9$ N, $t = 1.25$ s
17-77. $t = 1.09$ s
17-78. $v = 4.88$ ft/s
17-79. $a = 2.97$ m/s^2
17-81. $A_x = 0$, $A_y = 289$ N, $\alpha = 23.1$ rad/s^2
17-82. $N_A = 177$ kN, $V_A = 5.86$ kN, $M_A = 50.7$ kN · m
17-83. $M = 0.3gml$
17-85. $N = wx\left[\frac{\omega^2}{g}\left(L - \frac{x}{2}\right) + \cos\theta\right]$,
$V = wx \operatorname{sen}\theta$, $M = \frac{1}{2}wx^2 \operatorname{sen}\theta$
17-86. $\alpha = 12.5$ rad/s↻, $a_G = 18.75$ m/s^2 ↓
17-87. $N_B = 2.89$ kN,
$A_x = 0$, $A_y = 2.89$ kN
17-89. $\omega = 800$ rad/s
17-91. $\alpha = 5.62$ rad/s^2, $T = 196$ N
17-93. $\alpha = 2.45$ rad/s^2 ↻, $N_B = 2.23$ N, $N_A = 33.3$ N
17-94. $\alpha = 4.32$ rad/s^2
17-95. $\theta = 46.9°$
17-97. $\alpha = 0.500$ rad/s^2
17-98. $\alpha = 15.6$ rad/s^2
17-99. $a_A = 26.7$ m/s^2 →
17-101. $F = 42.3$ N
17-102. $\alpha = 4.01$ rad/s^2
17-103. $A_y = 15.0$ lb, $A_x = 0.776$ lb, $\alpha = 1.67$ rad/s^2
17-105. $\alpha = 18.9$ rad/s^2, $P = 76.4$ lb
17-106. $\alpha = \frac{6P}{mL}$, $a_B = \frac{2P}{m}$
17-107. $\alpha = \frac{6(P - \mu_k mg)}{mL}$, $a_B = \frac{2(P - \mu_k mg)}{m}$
17-109. $\alpha = 3$ rad/s^2
17-110. $\alpha = 14.5$ rad/s^2, $t = 0.406$ s
17-111. El disco no se desliza
17-113. $a_G = \mu_k g$ ←, $\alpha = \frac{2\mu_k g}{r}$ ↻
17-114. $\omega = \frac{1}{3}\omega_0$, $t = \frac{\omega_0 r}{3\mu_k g}$
17-115. $\alpha_A = 43.6$ rad/s^2↻, $\alpha_B = 43.6$ rad/s^2 ↻, $T = 19.6$ N
17-117. $T_A = \frac{4}{7}W$
17-118. $\alpha = 23.4$ rrad/s^2, $B_y = 9.62$ lb
17-119. $\alpha = \frac{10g}{13\sqrt{2}\,r}$

Capítulo 18

18-2. $\omega = 14.0$ rad/s
18-3. $\omega = 14.1$ rad/s
18-5. $\omega = 2.02$ rad/s
18-6. $\omega = 1.78$ rad/s
18-7. $T = 283$ ft · lb
18-9. $\omega = 21.5$ rad/s
18-10. $s = 5.16$ m, $T = 78.5$ N
18-11. $\omega = 14.9$ rad/s
18-13. $\omega = 6.11$ rad/s
18-14. $\omega = 8.64$ rad/s
18-15. $\omega = 3.16$ rad/s
18-17. $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{g}{r^2}s \operatorname{sen}\theta}$
18-18. $v_C = 7.49$ m/s
18-19. $\omega = 6.92$ rad/s
18-21. $s = 0.304$ ft
18-22. $v_C = 19.6$ ft/s
18-23. $\theta = 0.445$ rev
18-25. $s_G = 1.60$ m
18-26. $\omega_2 = 5.37$ rad/s
18-27. $\omega = 44.6$ rad/s
18-29. $v_G = 11.9$ ft/s
18-30. $\omega = 2.50$ rad/s
18-31. $\omega = 5.40$ rad/s
18-33. $\theta = 0.891$ rev, sin importar la orientación
18-34. $\omega = 5.74$ rad/s
18-35. $\omega_{AB} = 5.92$ rad/s
18-37. $s_C = 78.0$ mm
18-38. $s = 0.301$ m, $T = 163$ N
18-39. $v_A = 1.29$ m/s
18-41. $s_b = 242$ mm, $T = 67.8$ N
18-42. $v_b = 2.52$ m/s
18-43. $\theta = 48.2°$
18-45. $\omega = 3.78$ rad/s
18-46. $\omega = 3.75$ rad/s
18-47. $\omega = 3.28$ rad/s
18-49. $(\omega_{AB})_2 = (\omega_{BC})_2 = 1.12$ rad/s
18-50. $v_A = 1.40$ m/s
18-51. $\theta_0 = 8.94$ rev
18-53. $\omega_{BC} = 1.34$ rad/s
18-54. $v_b = 15.5$ ft/s
18-55. $v_A = 4.00$ m/s
18-57. $\omega = 12.8$ rad/s
18-58. $k = 18.4$ N/m
18-59. $\omega = 2.67$ rad/s
18-61. $\omega_{AB} = 3.70$ rad/s
18-62. $\omega = 1.80$ rad/s
18-63. $v_A = 21.0$ ft/s
18-65. $\omega = 2.71$ rad/s
18-66. $k = 100$ lb/ft
18-67. $(v_A)_2 = 7.24$ m/s

Capítulo 19

19-5. $\int M\,dt = 0.833\,\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$

19-6. $\omega = 0.0178\ \text{rad/s}$

19-7. $v_B = 24.1\ \text{m/s}$

19-9. $\omega_2 = 103\ \text{rad/s}$

19-10. $t = 0.6125\ \text{s}$

19-11. $\omega_2 = 53.7\ \text{rad/s}$

19-13. $y = \frac{2}{3}l$

19-14. $d = \frac{2}{3}l$

19-15. (a) $\omega_{BC} = 68.7\ \text{rad/s}$,
(b) $\omega_{BC} = 66.8\ \text{rad/s}$,
(c) $\omega_{BC} = 68.7\ \text{rad/s}$

19-17. $v_G = 26.8\ \text{ft/s}$

19-18. $v_G = 2\ \text{m/s},\ \omega = 3.90\ \text{rad/s}$

19-19. $v_A = 24.1\ \text{m/s}$

19-21. $\omega = 12.7\ \text{rad/s}$

19-22. $\omega_A = 47.3\ \text{rad/s}$

19-23. $t = 1.32\ \text{s}$

19-25. $t = 1.04\ \text{s}$

19-26. $\omega = 9\ \text{rad/s}$

19-27. $v_B = 1.59\ \text{m/s}$

19-29. $\omega = 1.91\ \text{rad/s}$

19-30. $\omega_2 = 0.656\ \text{rad/s},\ \theta = 18.8°$

19-31. $\omega_2 = 0.577\ \text{rad/s},\ \theta = 15.8°$

19-33. $\omega_2 = 2.55\ \text{rev/s}$

19-34. $\omega = 0.190\ \text{rad/s}$

19-35. $\omega = 0.0906\ \text{rad/s}$

19-37. $\omega = 22.7\ \text{rad/s}$

19-38. $h_C = 0.500\ \text{ft}$

19-39. $\omega_2 = 1.01\ \text{rad/s}$

19-41. $\theta = 66.9°$

19-42. $\omega_2 = 57\ \text{rad/s},\ U_F = 367\ \text{J}$

19-43. $\omega_2 = 3.47\ \text{rad/s}$

19-45. $v = 5.96\ \text{ft/s}$

19-46. $h = \frac{7}{5}r$

19-47. $\theta = 50.2°$

19-49. $(v_D)_3 = 1.54\ \text{m/s},\ \omega_3 = 0.934\ \text{rad/s}$

19-50. $\omega_1 = 7.17\ \text{rad/s}$

19-51. $\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{7}{5}e}\right)$

19-53. $\omega_3 = 2.73\ \text{rad/s}$

19-54. $\omega = \sqrt{7.5\,\frac{g}{L}}$

19-55. $h_B = 0.980\ \text{ft}$

19-57. $(v_G)_{y2} = e(v_G)_{y1}\uparrow$,
$(v_G)_{x2} = \frac{5}{7}\left((v_G)_{x1} - \frac{2}{5}\omega_1 r\right)\leftarrow$

19-58. $\theta_1 = 39.8°$

Capítulo 20

20-1. (a) $\boldsymbol{\alpha} = \omega_s\omega_t\,\mathbf{j}$,
(b) $\boldsymbol{\alpha} = -\omega_s\omega_t\,\mathbf{k}$

20-2. $\mathbf{v}_A = \{-0.225\mathbf{i}\}\ \text{m/s}$,
$\mathbf{a}_A = \{-0.1125\mathbf{j} - 0.130\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$

20-3. $\mathbf{v}_A = \{-5.20\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 20.8\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}$,
$\mathbf{a}_A = \{-24.1\mathbf{i} - 13.3\mathbf{j} - 7.20\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}^2$

20-5. $(\omega_C)_{DE} = 40\ \text{rad/s},\ (\omega_{DE})_y = 5\ \text{rad/s}$

20-6. $\boldsymbol{\omega} = \{-8.24\mathbf{j}\}\ \text{rad/s},\ \boldsymbol{\alpha} = \{24.7\mathbf{i} - 5.49\mathbf{j}\}\ \text{rad/s}^2$

20-7. $\mathbf{v}_A = \{-7.79\mathbf{i} - 2.25\mathbf{j} + 3.90\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}$,
$\mathbf{a}_A = \{8.30\mathbf{i} - 35.2\mathbf{j} + 7.02\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}^2$

20-9. $\mathbf{v}_B = \{-0.4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\}\ \text{m/s}$,
$\mathbf{a}_B = \{-8.20\mathbf{i} + 40.6\mathbf{j} - \mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2$

20-10. $\boldsymbol{\omega} = \{42.4\mathbf{j} + 43.4\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}$,
$\boldsymbol{\alpha} = \{-42.4\mathbf{i}\}\ \text{rad/s}^2$

20-11. $\boldsymbol{\omega} = \{2\mathbf{i} + 42.4\mathbf{j} + 43.4\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}$,
$\boldsymbol{\alpha} = \{-42.4\mathbf{i} - 82.9\mathbf{j} + 84.9\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2$

20-13. $v_B = 0,\ v_C = 0.283\ \text{m/s},\ a_B = 1.13\ \text{m/s}^2$,
$a_C = 1.60\ \text{m/s}^2$

20-14. $\mathbf{v}_C = \{1.8\mathbf{j} - 1.5\mathbf{k}\}\ \text{m/s}$,
$\mathbf{a}_C = \{-36.6\mathbf{i} + 0.45\mathbf{j} - 0.9\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$

20-15. $\mathbf{v}_A = \{-8.66\mathbf{i} + 8.00\mathbf{j} - 13.9\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}$,
$\mathbf{a}_A = \{-24.8\mathbf{i} + 8.29\mathbf{j} - 30.9\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}^2$

20-17. $\mathbf{v}_A = \{-1.80\mathbf{i}\}\ \text{ft/s}$,
$\mathbf{a}_A = \{-0.750\mathbf{i} - 0.720\mathbf{j} - 0.831\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}^2$

20-18. $\boldsymbol{\omega}_P = \{-40\mathbf{j}\}\ \text{rad/s},\ \boldsymbol{\alpha}_B = \{-6400\mathbf{i}\}\ \text{rad/s}^2$

20-19. $\boldsymbol{\omega} = \{4.35\mathbf{i} + 12.7\mathbf{j}\}\ \text{rad/s}$,
$\boldsymbol{\alpha} = \{-26.1\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2$

20-21. $\boldsymbol{\omega} = \{30\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\}\ \text{rad/s},\ \boldsymbol{\alpha} = \{150\mathbf{i}\}\ \text{rad/s}^2$

20-22. $\mathbf{v}_A = \{10\mathbf{i} + 14.7\mathbf{j} - 19.6\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}$,
$\mathbf{a}_A = \{-6.12\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}^2$

20-23. $\omega_A = 47.8\ \text{rad/s},\ \omega_B = 7.78\ \text{rad/s}$

20-25. $\boldsymbol{\omega}_{BC} = \{0.204\mathbf{i} - 0.612\mathbf{j} + 1.36\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}$,
$\mathbf{v}_B = \{-0.333\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$

20-26. $\boldsymbol{\omega}_{AB} = \{-1.00\mathbf{i} - 0.500\mathbf{j} + 2.50\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}$,
$\mathbf{v}_B = \{-2.50\mathbf{j} - 2.50\mathbf{k}\}\ \text{m/s}$

20-27. $\boldsymbol{\alpha}_{AB} = \{-7.9\mathbf{i} - 3.95\mathbf{j} + 4.75\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2$,
$\mathbf{a}_B = \{-19.75\mathbf{j} - 19.75\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$

20-29. $\mathbf{a}_B = \{-37.6\mathbf{j}\}\ \text{ft/s}^2$

20-30. $\mathbf{v}_B = \{-1.92\mathbf{j} + 2.56\mathbf{k}\}\ \text{m/s}$

20-31. $v_B = 5.00\ \text{m/s}$,
$\boldsymbol{\omega}_{AB} = \{-4.00\mathbf{i} - 0.600\mathbf{j} - 1.20\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}$

20-33. $\boldsymbol{\omega}_{BD} = \{-1.20\mathbf{j}\}\ \text{rad/s}$

20-34. $\boldsymbol{\alpha}_{BD} = \{-8.00\mathbf{j}\}\ \text{rad/s}^2$
20-35. $\boldsymbol{\omega}_{AB} = \{-0.500\mathbf{i} + 0.667\mathbf{j} - 1.00\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}$
$\mathbf{v}_B = \{-7.50\mathbf{j}\}\ \text{ft/s}$
20-37. $\mathbf{v}_C = \{-1.00\mathbf{i} + 5.00\mathbf{j} + 0.800\mathbf{k}\}\ \text{m/s},$
$\mathbf{a}_C = \{-28.8\mathbf{i} - 5.45\mathbf{j} + 32.3\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$
20-38. $\mathbf{v}_C = \{-1\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 0.8\mathbf{k}\}\ \text{m/s},$
$\mathbf{a}_C = \{-28.2\mathbf{i} - 5.45\mathbf{j} + 32.3\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$
20-39. $\mathbf{v}_B = \{-2.75\mathbf{i} - 2.50\mathbf{j} + 3.17\mathbf{k}\}\ \text{m/s},$
$\mathbf{a}_B = \{2.50\mathbf{i} - 2.24\mathbf{j} - 0.00389\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}^2$
20-41. $\mathbf{v}_C = \{3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\}\ \text{m/s},$
$\mathbf{a}_C = \{-13.0\mathbf{i} + 28.5\mathbf{j} - 10.2\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$
20-42. $\mathbf{v}_B = \{-17.8\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5.20\mathbf{k}\}\ \text{m/s},$
$\mathbf{a}_B = \{9\mathbf{i} - 29.4\mathbf{j} - 1.5\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$
20-43. $\mathbf{v}_B = \{-17.8\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5.20\mathbf{k}\}\ \text{m/s},$
$\mathbf{a}_B = \{3.05\mathbf{i} - 30.9\mathbf{j} + 1.10\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$
20-45. $\mathbf{v}_P = \{-0.849\mathbf{i} + 0.849\mathbf{j} + 0.566\mathbf{k}\}\ \text{m/s},$
$\mathbf{a}_P = \{-5.09\mathbf{i} - 7.35\mathbf{j} + 6.79\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$
20-46. $\mathbf{v}_A = \{-8.66\mathbf{i} + 2.26\mathbf{j} + 2.26\mathbf{k}\}\ \text{m/s},$
$\mathbf{a}_A = \{-22.6\mathbf{i} - 47.8\mathbf{j} + 45.3\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$
20-47. $\mathbf{v}_A = \{-8.66\mathbf{i} + 2.26\mathbf{j} + 2.26\mathbf{k}\}\ \text{m/s},$
$\mathbf{a}_A = \{-26.1\mathbf{i} - 44.4\mathbf{j} + 7.92\mathbf{k}\}\ \text{m/s}^2$
20-49. $\mathbf{v}_P = \{-9.80\mathbf{i} + 14.4\mathbf{j} + 48.0\mathbf{k}\}\ \text{ft/s},$
$\mathbf{a}_P = \{-160\mathbf{i} + 5.16\mathbf{j} - 13\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}^2$
20-50. $\mathbf{v}_P = \{-25.5\mathbf{i} - 13.4\mathbf{j} + 20.5\mathbf{k}\}\ \text{ft/s},$
$\mathbf{a}_P = \{161\mathbf{i} - 249\mathbf{j} - 39.6\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}^2$
20-51. $\mathbf{v}_P = \{-25.5\mathbf{i} - 13.4\mathbf{j} + 20.5\mathbf{k}\}\ \text{ft/s},$
$\mathbf{a}_P = \{161\mathbf{i} - 243\mathbf{j} - 33.9\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}^2$
20-53. $\mathbf{v}_A = \{-8.66\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 13.9\mathbf{k}\}\ \text{ft/s},$
$\mathbf{a}_A = \{-17.9\mathbf{i} + 8.29\mathbf{j} - 30.9\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}^2$
20-54. $\mathbf{v}_C = \{-1.73\mathbf{i} - 5.77\mathbf{j} + 7.06\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}$
$\mathbf{a}_C = \{9.88\mathbf{i} - 72.8\mathbf{j} + 0.365\mathbf{k}\}\ \text{ft/s}^2$

Capítulo 21

21-2. $I_{\bar{y}} = \frac{3m}{80}(h^2 + 4a^2),\ I_{y'} = \frac{m}{20}(2h^2 + 3a^2)$
21-3. $I_y = 2614\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2$
21-5. $I_{yz} = \frac{m}{6}ah$
21-6. $I_{xy} = \frac{m}{12}a^2$
21-7. $I_{xy} = 636\rho$
21-9. $I_{z'z'} = 0.0961\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2$
21-10. $k_y = 2.35\ \text{ft},\ k_x = 1.80\ \text{ft}$
21-11. $I_{aa} = \frac{m}{12}(3a^2 + 4h^2)$
21-13. $I_{yz} = 0$
21-14. $I_{xy} = 0.32\ \text{kg}\cdot\text{m}^2,\ I_{yz} = 0.08\ \text{kg}\cdot\text{m}^2,\ I_{xz} = 0$
21-15. $I_{z'} = 0.0595\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
21-17. $\bar{y} = 0.5\ \text{ft},\ \bar{x} = -0.667\ \text{ft},\ I_{x'} = 0.0272\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2,$
$I_{y'} = 0.0155\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2,\ I_{z'} = 0.0427\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2$
21-18. $I_x = 0.455\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2$
21-19. $I_{aa} = 1.13\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2$
21-21. $I_z = 0.0880\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2$
21-25. $\mathbf{H} = \{-477(10^{-6})\mathbf{i} + 198(10^{-6})\mathbf{j} + 0.169\,\mathbf{k}\}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$
21-26. $\omega_2 = 61.7\ \text{rad/s}$
21-27. $\omega_2 = 87.2\ \text{rad/s}$
21-29. $\omega_x = 19.7\ \text{rad/s}$
21-30. $h = 2.24\ \text{in}$
21-31. $T = 0.0920\ \text{ft}\cdot\text{lb}$
21-33. $\omega_p = 4.82\ \text{rad/s}$
21-34. $\mathbf{H}_A = \{-2000\mathbf{i} - 55\,000\mathbf{j} + 22\,500\mathbf{k}\}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$
21-35. $T = 37.0\ \text{MJ}$
21-37. $\boldsymbol{\omega} = \{-0.750\mathbf{j} + 1.00\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}$
21-38. $T = 1.14\ \text{J}$
21-39. $H_z = 0.4575\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$
21-41. $\Sigma M_x = (I_x\dot{\omega}_x - I_{xy}\dot{\omega}_y - I_{xz}\dot{\omega}_z),$
$-\Omega_z(I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z - I_{yx}\omega_x),$
$+\Omega_y(I_z\omega_z - I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y)$
De manera similar para ΣM_y y ΣM_z.
21-43. $B_z = 4\ \text{lb},\ A_x = -2.00\ \text{lb},\ A_y = 0.627\ \text{lb},$
$B_x = 2.00\ \text{lb},\ B_y = -1.37\ \text{lb}$
21-45. $A_z = 1.46\ \text{lb},\ B_z = 13.5\ \text{lb},\ A_X = A_Y = B_X = 0,$
21-46. $\dot{\omega}_x = -14.7\ \text{rad/s}^2,\ B_z = 77.7\ \text{N},\ B_y = 3.33\ \text{N},$
$A_x = 0,\ A_y = 6.67\ \text{N},\ A_z = 81.75\ \text{N}$
21-47. $\dot{\omega}_x = 9.285\ \text{rad/s}^2,\ B_z = 97.7\ \text{N},\ B_y = 3.33\ \text{N},$
$A_x = 0,\ A_y = 6.67\ \text{N},\ A_z = 122\ \text{N}$
21-49. $\dot{\omega}_z = 200\ \text{rad/s}^2,\ D_y = -12.9\ \text{N},\ D_x = -37.5\ \text{N},$
$C_x = -37.5\ \text{N},\ C_y = -11.1\ \text{N},\ C_z = 36.8\ \text{N}$
21-50. $T_B = 47.1\ \text{lb},\ M_y = 0,\ M_z = 0,\ A_x = 0,$
$A_y = -93.2\ \text{lb},\ A_z = 57.1\ \text{lb}$
21-51. $\dot{\omega}_y = -102\ \text{rad/s}^2,\ A_x = B_x = 0,\ A_y = 0,$
$A_z = 297\ \text{N},\ B_z = -143\ \text{N}$
21-53. $M_z = 0,\ A_x = 0,\ M_y = 0,\ \theta = 64.1°,$
$A_y = 1.30\ \text{lb},\ A_z = 20.2\ \text{lb}$
21-54. $N = 148\ \text{N},\ F_f = 0$
21-55. $(M_0)_x = 72.0\ \text{N}\cdot\text{m},\ (M_0)_z = 0$
21-57. $M_x = -\frac{4}{3}ml^2\omega_s\omega_p\cos\theta,$
$M_y = \frac{1}{3}ml^2\omega_p^2\ \text{sen}\ 2\theta,\ M_z = 0$
21-58. $B_x = 0,\ B_y = -3.90\ \text{lb},\ A_y = -1.69\ \text{lb},$
$A_z = B_z = 7.5\ \text{lb}$
21-59. $\Sigma M_x = 0,\ \Sigma M_y = (-0.036\ \text{sen}\ \theta)\ \text{N}\cdot\text{m},$
$\Sigma M_z = (0.003\ \text{sen}\ 2\theta)\ \text{N}\cdot\text{m}$
21-61. $\alpha = 69.3°, \beta = 128°, \gamma = 45°$. No, la orientación no será la misma para cualquier orden. Las rotaciones finitas no son vectores.
21-62. $\omega_P = 27.9\ \text{rad/s}$
21-63. $\omega_R = 368\ \text{rad/s}$
21-65. $\omega_P = 1.19\ \text{rad/s}$
21-66. $M_x = 328\ \text{N}\cdot\text{m}$

21-67. $\dot{\phi} = \left(\dfrac{2g\cos\theta}{a + r\cos\theta}\right)^{1/2}$
21-69. $\omega_s = 3.63(10^3)$ rad/s
21-70. $\theta = 68.1°$
21-71. $\dot{\phi} = 81.7$ rad/s, $\dot{\psi} = 212$ rad/s, precesión regular
21-74. $\dot{\psi} = 2.35$ rev/h
21-75. $\alpha = 90°$, $\beta = 9.12°$, $\gamma = 80.9°$
21-77. $H_G = 12.5\ \text{Mg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$
21-78. $\dot{\phi} = 3.32$ rad/s

Capítulo 22

22-1. $\ddot{y} + 56.1\,y = 0$, $y\big|_{t=0.22\,\text{s}} = 0.192$ m
22-2. $x = -0.05\cos(20t)$
22-3. $y = 0.107\,\text{sen}(7.00t) + 0.100\cos(7.00t)$, $\phi = 43.0°$
22-5. $\omega_n = 49.5$ rad/s, $\tau = 0.127$ s
22-6. $x = \{-0.126\,\text{sen}(3.16t) - 0.09\cos(3.16t)\}$ m, $C = 0.155$ m
22-7. $\omega_n = 19.7$ rad/s, $C = 1$ in, $y = (0.0833\cos 19.7t)$ ft
22-9. $\omega_n = 8.16$ rad/s, $x = -0.05\cos(8.16t)$, $C = 50$ mm
22-10. $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{2mL}{3mg + 6kL}}$
22-11. $\tau = 1.45$ s
22-13. $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{k_G^2 + d^2}{gd}}$
22-14. $k = 90.8\ \text{lb}\cdot\text{ft/rad}$
22-15. $k = 1.36$ N/m, $m_B = 3.58$ kg
22-17. $k_1 = 2067$ N/m, $k_2 = 302$ N/m, o viceversa
22-18. $m_B = 21.2$ kg, $k = 609$ N/m
22-19. $y = 503$ mm
22-21. $x = 0.167\cos 6.55\,t$
22-22. $\omega_n = \sqrt{\dfrac{3g(4R^2 - l^2)^{1/2}}{6R^2 - l^2}}$
22-23. $\tau = 1.66$ s
22-25. $f = 0.900$ Hz
22-26. $\tau = 2\pi k_O\sqrt{\dfrac{m}{C}}$
22-27. $\omega_n = 3.45$ rad/s
22-29. $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2g}}$
22-30. $\ddot{x} + 333x = 0$
22-31. $\tau = 1.52$ s
22-33. $\tau = 0.774$ s
22-34. $\ddot{\theta} + 468\theta = 0$
22-35. $\tau = 0.487$ s
22-37. $E = 0.175\dot{\theta}^2 + 10\,\theta^2$, $\tau = 0.830$ s
22-38. $\tau = \pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$
22-39. $f = 1.28$ Hz
22-41. $x = A\,\text{sen}\,\omega_n t + B\cos\omega_n t + \dfrac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\cos\omega t$
22-42. $y = A\,\text{sen}\,\omega_n t + B\cos\omega_n t + \dfrac{F_O}{k}$
22-43. $y = \{-0.0232\,\text{sen}\,8.97\,t + 0.333\cos 8.97\,t + 0.0520\,\text{sen}\,4t\}$ ft
22-45. $y = A\,\text{sen}\,\omega_n t + B\cos\omega_n t + \dfrac{\delta_0}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\,\text{sen}\,\omega t$
22-46. $y = (361\,\text{sen}\,7.75t + 100\cos 7.75t, - 350\,\text{sen}\,8t)$ mm
22-47. $C = \dfrac{3F_O}{\frac{3}{2}(mg + Lk) - mL\omega^2}$
22-49. $(x_p)_{\text{máx}} = 29.5$ mm
22-50. $\ddot{\theta} + \dfrac{4c}{m}\dot{\theta} + \dfrac{k}{m}\dot{\theta} = 0$
22-51. $(v_p)_{\text{máx}} = 0.3125$ m/s
22-53. $\omega = 14.0$ rad/s
22-54. $(x_p)_{\text{máx}} = 14.6$ mm
22-55. $(x_p)_{\text{máx}} = 35.5$ mm
22-57. $\omega = 19.7$ rad/s
22-58. $C = 0.490$ in
22-59. $\omega = 19.0$ rad/s
22-61. $(x_p)_{\text{máx}} = 4.53$ mm
22-62. $Y = \dfrac{mr\omega^2L^3}{48EI - M\omega^2L^3}$
22-63. $\omega = 12.2$ rad/s, $\omega = 7.07$ rad/s
22-65. $\phi' = 9.89°$
22-66. MF $= 0.997$
22-67. $y = \{-0.0702\,e^{-3.57t}\,\text{sen}\,(8.540)\}$ m
22-69. $F = 2c\dot{y}$, $c_c = 2m\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $c < \sqrt{mk}$
22-71. $\omega = 21.1$ rad/s
22-73. $1.55\ddot{\theta} + 540\dot{\theta} + 200\theta = 0$, $(c_{dp})_c = 3.92\ \text{lb}\cdot\text{s/ft}$
22-74. $c_c = \sqrt{8(m + M)k}$, $x_{\text{máx}} = \left[\dfrac{m}{e}\sqrt{\dfrac{1}{2k(m + M)}}\right]v_0$
22-75. $x_{\text{máx}} = \dfrac{2mv_0}{\sqrt{8k(m + M) - c^2}}\,e^{-\pi c/(2\sqrt{8k(m+M)-c^2})}$
22-77. $Lq + Rq + \left(\dfrac{1}{C}\right)q = E_0\cos\omega t$
22-78. $L\ddot{q} + R\dot{q} + \left(\dfrac{2}{C}\right)q = 0$
22-79. $L\ddot{q} + R\dot{q} + \dfrac{1}{C}q = 0$

Índice

A

Aceleración (a), 7-8, 20-22, 35, 37, 57-58, 73, 92, 106, 112-177, 321, 323, 325-326, 373-380, 392-393, 404-405, 408-471, 563-564, 580
- absoluta, 92, 373
- análisis de movimiento relativo y, 92, 373-380, 392-393, 405, 580
- angular (θ), 73, 323, 409, 563-564
- centrípeta, 58
- cinemática
  - de partículas y, 7-8, 35-37, 57-58, 73, 92, 106
  - plana de cuerpos rígidos y, 321, 323, 325-326, 373-380, 404-405
  - rectilínea y, 7-8, 20-22, 106
- cinética
  - de partículas, 112-177
  - plana de cuerpos rígidos, 408-471
- componentes
  - cilíndricos y, 73, 152-156, 175
  - normales (n) de, 57-58, 138-143, 175, 325-326, 441-442
  - rectangulares y, 37, 120-126, 175
  - tangenciales (t) de, 57-58, 138-143, 175, 325-326, 441-442
- constante, 8, 323
- convención de signos para, 7
- de Coriolis, 393, 405
- de ejes giratorios, 392-393, 405, 580
- derivada con respecto al tiempo y, 564
- ecuaciones de movimiento para la, 116-126, 138-143, 152-156, 175, 423-431, 441-447, 456-461, 469
- ejes de traslación, 92, 373-380, 405, 580
- fuerza
  - (**F**) y, 112-177, 408-471
  - normal (N) y, 152-156
  - tangencial (tan) y, 152-156
- gráficas de variables, 20-22, 106
- gravitacional (g), 115
- hodógrafos y, 35
- inercia y, 113
- instantánea, 7, 35
- magnitud de, 37, 57-58, 73, 373, 392, 441-442
- masa (m) y, 113-114
- momento de inercia (I) y, 409-417, 442-443, 456-457, 469
- movimiento
  - circular y, 325-326, 373-375
  - continuo y, 7-8
  - curvilíneo y, 35, 37, 57-58, 73
  - errático y, 20-22
  - plano general y, 373-380, 392-393, 404-405, 456-461, 469
  - tridimensional de un cuerpo rígido, 563-564, 580
- procedimiento para el análisis de, 375
- promedio, 7, 35
- punto fijo de rotación y, 563-564
- relativa, 92, 405
- resistencia del cuerpo a la, 409
- rotación
  - del eje fijo y, 323, 325-326, 404, 441-447, 469
  - y, 323, 325-326, 373-380, 405, 424-425, 441-447, 469
- traslación y, 321, 380-381, 405, 423, 426-431, 469
- velocidad (v) y, 7-8

Amortiguación, 667

Amplitud de la vibración, 645-646

Análisis de movimiento
- absoluto, 338-341, 404
- dependiente, 85-90, 109
  - coordenadas de posición para el, 85-86, 109
  - derivadas con respecto al tiempo para el, 86, 109
  - partículas, 85-90, 109
  - procedimiento para el, 86
- relativo, 91-95, 109, 346-352, 360-366, 373-380, 389-397, 405, 578-585, 589
  - aceleración (a) y, 92, 373-380, 392-393, 405, 580
  - centro instantáneo (CI) de velocidad cero, 360-366, 405
  - cinemática de una partícula, 91-95, 109
  - circular, 347-348, 360-366, 373-375, 405
  - de un cuerpo rígido en tres dimensiones, 578-585, 589
  - desplazamiento y, 346
  - ejes de rotación, 389-397, 405, 578-585, 589
  - ejes móviles, 91-95, 109, 346-352, 373-380, 405, 578-585, 589
  - elementos con extremo articulado, 346-352, 373-380
  - marcos de referencia de coordenadas fijos y móviles, 346-352, 373-380, 405
  - plano de un cuerpo rígido, 346-352, 360-366, 373-380, 389-397, 405
  - procedimientos para el análisis usando, 92, 349, 375, 394, 581
  - rotación y, 346-352, 373-380, 405
  - sistema de coordenadas móvil para, 578
  - vectores de posición (**r**) y, 91, 346, 389, 579
  - velocidad (v) y, 91, 346-352, 360-366, 390-391, 405, 579

Análisis vectorial, 684-688

Ángulo(s)
- de fase (θ), 647
- director (ψ), 152-153
- de Euler, 626

Apogeo, 169

Atracción gravitacional (G), 114-115, 165-166
- ley de Newton de la, 114-115
- movimiento de fuerza central y, 165-166

B

Brazo de momento, 410

C

Caballos de fuerza (hp), unidad de, 204

Calor, fuerzas de fricción por deslizamiento y, 187

Cantidad de movimiento, 236-317, 516-559, 601-604, 640
- angular (**H**), 280-289, 315, 518-522, 523-524, 540-543, 544-547, 556-557, 601-604, 629, 640
  - centro de masa (G) para, 601-602
  - cinética de una partícula, 280-289
  - componentes rectangulares de la cantidad de movimiento, 602-603
  - conservación de, 286, 540-543, 557
  - cuerpos rígidos en tres dimensiones, 601-604, 629, 640
  - diagramas de cuerpo libre para, 280-281, 286
  - ejes principales de inercia a partir de, 603
  - formulación escalar, 280, 285
  - formulación vectorial, 280, 285
  - giroscópico y, 629
  - impacto excéntrico y, 544-547, 557
  - impulso angular y, 284-289, 315
  - magnitud de, 280
  - momento de la cantidad de movimiento, 280, 315
  - plano de un cuerpo rígido, 518-522, 523-524, 540-547, 556-557
  - plano general y, 521, 556
  - principio de impulso y, 284-289, 315, 523-524, 604, 640
  - procedimientos para el análisis de, 286, 541
  - punto arbitrario A para, 602
  - punto fijo O para, 602
  - regla de la mano derecha para, 280
  - relaciones entre el momento de una fuerza y la, 281-283
  - rotación de un eje fijo y, 520, 556
  - sistema de partículas, 282, 284-285
  - traducción y, 520, 556
  - unidades de, 280
- cinética de una partícula, 236-317
- conservación de, 254-260, 267, 269-272, 286, 314, 540-543, 557
- cuerpos rígidos en tres dimensiones, 601-604, 640
- de impacto (excéntrica) y, 266-272, 314-315, 544-547, 557
- diagramas de, 234
- ecuaciones de, 239
- flujo estable y, 295-299, 315
- forma vectorial, 238
- impulso y, 236-317, 516-559
- lineal (L), 237-244, 254-260, 296, 314, 517, 520-522, 523-524, 540-543, 556-557
- momentos de fuerza y, 281-283
- movimiento plano
  - de un cuerpo rígido, 516-559
  - general y, 521
- principio del impulso y, 237-244, 284-289, 295-299, 314-315, 523-530, 556, 604, 640
- procedimientos para el análisis de, 241, 255, 269, 286, 525, 541
- propulsión y, 300-304, 315
- rotación de ejes fijos y, 520
- sistemas de partículas, 240-244, 254-260, 282, 314
- traslación y, 520
- volúmenes de control, 295-304, 315

Cantidad vectorial, posición y desplazamiento de partículas como, 5, 36

Centro(s)
de curvatura, 56
de masa (*G*), 119, 518-519, 601-602, 605
instantáneo (CI), 360-366, 405, 456
centrodo, 362
ecuación de momento con respecto a un, 456
movimiento circular y, 360-366, 405
movimiento plano general, 456
procedimiento para el análisis de, 362
ubicación del, 361-366
velocidad cero, 360-366, 405, 456
Centrodo, 362
Ciclo, 646
Cinemática, 2-111, 318-407, 560-589. *Vea también* Movimiento plano
análisis de movimiento
dependiente, 85-90, 109
relativo, 91-95, 109, 346-352, 373-380, 389-397, 405, 578-585, 589
componentes cilíndricos, 71-78, 108
convenciones de signos para, 5-7
coordenadas (para), 36-38, 56-58, 71-78, 107-108, 569-571
cilíndricas (r, θ, z), 74
polares, 71-73
radiales (r), 71-73
rectangulares (x, y, z), 36-40, 107
transversales (θ), 71-73
cuerpos rígidos, 318-407, 560-589
derivadas con respecto al tiempo, 564-568
ejes
de traslación, 91-95, 109, 389-397, 578-585, 589
giratorios, 389-397, 405, 564-568, 578-585, 589
normales (n), 56-62, 108
tangenciales (t), 56-62, 108
gráficas para la solución de, 20-25, 106
movimiento
continuo, 5-14
curvilíneo, 34-40, 56-62, 71-78, 107-108, 320-321
de proyectiles, 41-45, 107
en tres dimensiones, 560-589
errático, 20-25
partículas y, 2-111
plana, 318-407
procedimientos para el análisis de, 9, 38, 42, 59, 86, 92, 327, 338, 349, 362, 375, 394, 581
rectilínea, 5, 15, 20-25, 106, 320-321
aceleración (a), 7-8, 20-22, 106
convenciones de signos para, 5-7
desplazamiento (Δ), 5
gráficas para la solución de, 20-25, 106
movimiento continuo 5-15
movimiento errático, 20-25
partículas y, 5-15, 20-25, 106
posición (s), 5, 8, 20-22, 106
procedimiento para el análisis de, 9
tiempo (t) y, 8, 20-21, 106
velocidad (v), 6-8, 20-22, 106
rotación (y), 320, 322-329, 338-341, 346-352, 404
de un eje fijo, 320, 322-329, 404
de un punto fijo, 561-568, 589
sistemas de traslación-rotación, 564-568
traslación y, 320-321, 338-341, 346-352, 404-405
Cinética, 3, 112-177, 178-235, 236-317, 408-471, 472-515, 516-559, 590-641. *Vea también* Movimiento plano; Mecánica espacial
aceleración (a) y, 112-177, 408-471
cantidad de movimiento
angular (**H**), 280-289, 315, 518-522, 523-524, 540-543, 556-557, 601-604, 640
conservación de la, 254-260, 286, 314, 540-543, 557
lineal, 517, 520-522, 540-543
conservación de la energía, 217-221, 233
coordenadas
cilíndricas (r, θ, z), 152-156, 175
normales (n), 138-143, 175
rectangulares (x, y, z), 120-126, 175, 602-603, 614-616, 641
tangenciales (t), 138-143, 175
cuerpos rígidos, 408-471, 472-515, 516-559, 590-641
en tres dimensiones, 590-641
diagramas de cuerpo libre para, 116-117, 175, 423-428
ecuaciones de movimiento, 114-126, 138-143, 152-156, 423-431, 441-447, 456-461, 469, 612-621, 641
eficiencia (e) y, 204-207, 233
energía (E) y, 178-235, 472-515, 604-607
flujo constante, 295-299, 315
fuerza (F) y, 112-177, 179-183, 213-221, 232-233, 408-471
fuerzas conservativas y, 213-221, 233
impacto y, 266-272, 314-315, 544-547, 557
impulso y cantidad de movimiento, 236-317, 516-559, 640
inercia (I), 409-417, 456-457, 469, 591-596, 640
leyes de Newton y, 113-115, 175
marco de referencia inercial para, 116-117, 175
momentos de inercia de masa, 409-417, 469
movimiento
de fuerza central, 164-170, 175
giroscópico, 615-616, 626-631, 641
plano, 408-471, 472-515, 516-559
sin par de torsión, 632-635, 641
partículas, 112-177, 178-235, 236-317
potencia (P), 204-207, 233
principio (de), 3
del impulso y la cantidad de movimiento, 523-530, 640
del trabajo y la energía, 184-192, 232, 605, 640-641
procedimientos para el análisis de, 120-121, 139, 153, 185, 205, 218, 241, 255, 269, 286, 297, 411, 428, 443, 457, 481, 525, 616
propulsión, 300-304, 315
rotación y, 424-425, 441-447, 469, 520, 556
trabajo (U) y, 178-235, 472-515, 605, 640-641
traslación y, 423, 426-431, 469, 520, 556
trayectorias, 165-170, 175
volúmenes de control, 295-304, 315
Circuitos eléctricos análogos, vibraciones y, 673, 681
Coeficiente
de amortiguación
crítico, 668
viscoso, 667
de restitución, 267-269, 297, 315, 544-547, 557
Componente(s)
cilíndricos, 71-78, 108, 152-156, 175
aceleración (a) y, 73, 152-156, 175
ángulo direccional (ψ), 152-153
coordenadas cilíndricas (r, θ, z), 74, 152-156, 175
coordenadas polares para, 71-73, 108
derivadas con respecto al tiempo de, 74
ecuaciones de movimiento y, 152-156, 175
fuerza normal (N) y, 152-156
fuerza tangencial y, 152-156
movimiento curvilíneo, 71-78, 108
procedimientos para el análisis utilizando, 74, 153
vector de posición (**r**) para, 72
velocidad (v) y, 72
radial ($\mathbf{v}_r$), 72
transversal ($\mathbf{v}_\theta$), 72
Cono
corporal, 634
espacial, 634
Conservación
de la cantidad de movimiento, 254-260, 267, 269-272, 286, 314-315, 540-543, 557
angular, 286, 540-543, 557
cinética de partículas, 254-260, 267, 269-272, 268, 296
fuerzas impulsoras y, 254-255
impacto y, 267, 269-272, 314-315
lineal, 254-260, 267, 269-272, 314, 540-543, 557
movimiento plano de un cuerpo rígido, 540-543, 557
procedimientos para el análisis de, 255, 269, 286, 541
sistemas de partículas, 254-260, 286
de la energía, 217-221, 233, 496-501, 513, 657-660, 680
cinética de una partícula, 217-221, 233
ecuaciones diferenciales para, 657
energía cinética y, 217-218
energía potencial (V) y, 217-221, 233, 496-501, 513
energía potencial elástica, 496, 513
energía potencial gravitacional, 496, 513
frecuencias naturales (ω_n) a partir de, 657-660, 680
fuerzas conservativas y, 217-221, 233, 496-501, 657
movimiento plano de un cuerpo rígido, 496-501, 513
peso (W), desplazamiento de, 217
procedimientos de análisis utilizando, 218, 498, 658
sistema de partículas, 218
trabajo (W) y, 217-221, 233, 496-501, 513
vibración y, 657-660, 680

Coordenadas, 5, 36-40, 56-58, 71-78, 85-91, 107-109, 120-126, 138-143, 152-156, 175, 322, 324-326, 346, 404, 423-426, 569-571, 578, 601-603, 614-616, 641
aceleración (**a**) y, 37, 57-58, 73, 120-126, 138-143, 152-156, 175, 325-326
análisis de movimiento
dependiente y, 85-90, 109
relativo y, 91, 109, 346, 578
ángulo director (ψ), 152-153
cantidad de movimiento angular (**H**) y, 601-603
cilíndricas (r, θ, z), 74, 152-156, 175
cinemática de una partícula, 5, 36-40, 56-58, 71-78, 85-90, 107-109
cinética de una partícula, 120-126, 138-143, 152-156, 175
ecuaciones
coordenadas de posición, 85-90, 109
de movimiento y, 120-126, 138-143, 152-156, 175, 423-426, 614-616, 641
ejes de traslación y, 91, 109
fuerza(s)
(F) y, 120-126, 138-143
centrípeta, 138-143
de fricción (**F**) y, 152
normales (**N**) y, 152
tangenciales (tan) y, 152-153
marcos de referencia coordenados fijos y móviles, 346, 404
movimiento
angular, 322
circular, 324-326
continuo, 5
curvilíneo, 36-40, 56-58, 71-78, 107-108
plano, 56-58, 423-426
tridimensional, 58, 569-571, 578, 601-603, 614-616, 641
normal (n), 56-58, 108, 138-143, 175, 325-326. *Vea también* Coordenadas normales
origen fijo (O), 5
polar(es), 67-70, 71-73, 108
posición (s), 5
procedimientos para el análisis utilizando, 38, 58, 74, 120-121, 139, 153
radial(es) (r), 71-73
rectangulares (x, y, z), 36-40, 107, 120-126, 175, 423-426, 602-603, 614-616, 641
sistemas de traslación, 569-571, 578
tangencial (t), 56-58, 108, 138-143, 175, 325-326
transversal(es) (θ), 71-73
vector de posición (**r**), 36, 72, 91, 324
velocidad (**v**) y, 36-37, 56, 72, 324
Coordenadas normales (n), 56-62, 138-143, 175, 325-326, 441-442
aceleración (a) y, 57-58, 325-326, 441-442
cinética de partículas, 138-143, 175
componentes de movimiento
circular, 325-326
curvilíneo, 56-62
ecuaciones de movimiento y, 138-143, 175
movimiento
en tres dimensiones, 58
plano y, 56
de un cuerpo rígido, 325-326, 441-442
procedimiento para el análisis de, 59
rectangulares (x, y, z), 36-40, 107, 120-126, 175, 602-603, 614-616, 641
cinemática de una partícula, 36-40, 107
cinética de una partícula, 120-126, 175
componentes de la cantidad de movimiento angular, 602-603
ecuaciones de movimiento y, 120-126, 175, 614-616, 641
movimiento curvilíneo, 36-40, 107
movimiento plano rígido en tres dimensiones y, 602-603, 614-616, 641
notación de puntos para, 36-37
procedimientos para el análisis usando, 38, 120-121
rotación con respecto a un eje fijo, 325-326, 441-442
tangenciales (t), 56-62, 138-143, 175, 325-326, 440-441
aceleración (a) y, 57-58, 325-326, 440-441
cinética de partículas, 138-143, 175
componentes de movimiento circular, 325-326
componentes de movimiento curvilíneo, 56-62
ecuaciones de movimiento y, 138-143, 175, 440-441
movimiento en tres dimensiones, 58
movimiento plano de un cuerpo rígido, 325-326, 440-441
movimiento plano y, 56
procedimiento para el análisis de, 59
rotación respecto a un eje fijo, 325-326, 440-441
velocidad (v) y, 56
velocidad (v) y, 56
Correderas, 187, 389
análisis de movimiento relativo para, 389
trabajo de fricción por, 187
Corriente de fluido, flujo estable de, 295-299, 315
Cuerpos compuestos, momento de inercia para, 415
Cuerpos rígidos, 186, 318-407, 408-471, 472-515, 516-559, 560-589, 590-64
aceleración (a) y, 321, 322, 325-326, 373-380, 392-393, 404-405, 408-471, 580
análisis de movimiento
(dependiente) absoluto, 338-341, 402
relativo, 346-352, 373-380, 389-397, 405, 578-585, 589
centro instantáneo (CI) de velocidad cero, 360-366, 405, 456
cinemática de, 318-407, 560-589
cinética de, 408-471, 472-515, 516-559, 590-641
conservación
de la cantidad de movimiento, 540-543, 557
de la energía, 496-501, 513
de velocidad cero, 360-366, 405
derivadas con respecto al tiempo para, 564-568, 589
desplazamiento (Δ) de, 322, 324, 477-478, 512
diagramas de cuerpo libre para, 423-428
ecuaciones de movimiento para, 421-431, 441-447, 456-461, 469, 612-621, 641
ejes
de rotación, 389-397, 405, 578-585, 589
móviles, 389-397, 405, 578-585, 589
en tres dimensiones, 560-589, 590-641
energía
(E) y, 472-515
cinética y, 473-476, 511, 604-607, 640-641
potencial (V) de, 496-501, 513
fuerza (F) y, 408-471, 476-479, 512
impacto (excéntrico), 544-547, 557
impulso y cantidad de movimiento, 516-559, 601-604, 640
inercia y, 591-596, 640
momento(s)
de par (M) en, 478-479, 512
de inercia (I) para, 409-417, 442-443, 456-457, 469
movimiento
angular, 322-323, 327, 561-564
circular, 324-327, 347-348, 360-366, 373-375, 404-405
giroscópico, 626-631, 641
plano de, 318-407, 408-471, 472-515
plano general, 320, 338-352, 456-461, 469, 475, 511, 521, 556
sin par de torsión, 632-635, 641
posición (**r**), 321, 322, 324, 389, 579
principio
de trabajo y energía, 186, 480-486, 513
del impulso y la cantidad de movimiento, 523-530
procedimientos para el análisis de, 327, 338, 349, 362, 375, 394, 428, 443, 457, 481, 498, 525, 541, 581, 616
rotación de, 320, 322-329, 338-331, 346-352, 373-380, 404-405, 424-425, 441-447, 469, 475, 511, 520, 556
un eje fijo, 320, 322-329, 404, 441-447, 469, 475, 511, 556
un punto fijo, 561-568, 589, 602, 605
sistemas de partículas y, 186, 476
trabajo (U) y, 472-515
traslación de, 320-321, 338-341, 346-352, 373-380, 404-405, 423, 426-431, 469, 475, 511, 520, 556
velocidad (v), 321, 322, 324, 346-352, 360-366, 390-391, 404-405, 579

D

Deformación, 186-187, 266-272, 544-547
coeficiente de restitución (e), 267-268, 544-547
fase de restitución, 266-269, 544
fuerza de fricción y, 187

impacto y, 266-272, 544-547
excéntrico y, 544-547
localizada, 187
máxima, 266
periodo de, 266
principios de trabajo y energía y, 186-187
separación de puntos de contacto, 546
velocidad angular (ω) y, 544-547
Derivadas con respecto al tiempo, 74, 86, 108-109, 564-568, 589
movimiento
absoluto dependiente, 86, 109
curvilíneo, 74, 108
en tres dimensiones, 564-568, 589
rotación de un punto fijo, 564-568, 589
sistemas de traslación-rotación, 564-568, 589
Desaceleración, 7
Deslizamiento, 348, 374, 456, 477, 512
análisis de movimiento relativo y, 348, 374
ecuaciones de movimiento y, 456
fuerzas que no realizan trabajo, 477, 512
movimiento
circular y, 348, 374
plano de un cuerpo rígido, 477, 512
plano general, 456
velocidad cero y, 348, 477
Desplazamiento (Δ), 5, 21, 34, 179-180, 322, 324, 346, 477-478, 512, 644-651, 665
amplitud, 645-646
análisis del movimiento relativo y, 346
angular ($d\theta$), 322
cambio de posición como, 5, 322, 324
cinemática
de una partícula, 5, 21, 34
plana de cuerpos rígidos y, 322, 324, 346
de apoyo periódico, 665
fuerza de resorte, 477
momento de par (M) y, 478, 512
movimiento
armónico simple, 644
circular y, 324
curvilíneo, 34
errático, 21
periódico del soporte, 665
regla de la mano derecha para la dirección del, 322, 324
rotación con respecto a un punto fijo, 322, 324
trabajo
de un peso y, 477
de una fuerza y, 179-180, 477-478
traslación y rotación que causan, 346
vertical (Δ), 477
vibraciones y, 644-651, 665
Diagrama(s)
cinético, 116
de cuerpo libre, 116-117, 175, 241, 280-281, 286, 423-428
cantidad de movimiento angular, 280-281, 286
cantidad de movimiento lineal, 241
cinética de partículas usando, 116-117, 175
ecuaciones de movimiento y, 116-117, 423-428
marcos de referencia inerciales, 116-117, 423-426
movimiento de rotación, 424-425
movimiento de traslación, 423, 426-428
movimiento plano de cuerpo rígido, 423-428
para el impulso y la cantidad de movimiento, 238-239
Dinámica, 3-4
estudio de, 3
principios de, 3-4
procedimiento para la resolución de problemas, 4
Directriz, 166

E

Ecuación(es)
de Euler, 614-615
de movimiento, 114-115, 116-126, 138-143, 152-156, 164-166, 175, 237-239, 423-431, 441-447, 456-461, 469, 612-621, 641
aceleración (a) y, 114-126, 138-143, 152-156, 423-431, 441-447, 469
atracción gravitacional, 114-115
centro instantáneo (CI) de velocidad cero y, 456
cinética de una partícula, 114-126, 138-143, 152-156, 164-166, 175
condiciones de equilibrio estático, 116
coordenadas cilíndricas (r, θ, z), 152-156, 175
coordenadas normales (n), 138-143, 175, 441-442
coordenadas rectangulares (x, y, z), 120-126, 175, 423-426, 612-615, 641
coordenadas tangenciales (t), 138-143, 175, 441-442
cuerpos rígidos tridimensionales, 612-621, 641
deslizamiento y, 456
diagrama cinético para, 116
diagramas de cuerpo libre para, 116-117, 175, 423-428
ecuaciones de momento, 442, 456
ejes giratorios simétricos, 615-616
equilibrio y, 116
fuerza ($\mathbf{F}$) y, 114-126, 138-143, 152-156, 423-431, 441-447, 469
fuerza centrípeta, 138-143
fuerza de fricción ($\mathbf{F}$), 121, 152
fuerza de resorte, 121
fuerza externa, 118-119, 424-425
fuerza interna, 118-119, 424-425
fuerza normal ($\mathbf{N}$), 152-156, 175
fuerza tangencial, 152-156, 175
impulso lineal y cantidad de movimiento, 237-239
marco de referencia inercial para, 116-117, 175, 423-426, 612-613
masa (m) y, 113-115, 118-119
momentos de inercia (I) y, 442-443, 456-457
movimiento de fuerza central, 164-166, 175
movimiento de rotación, 424-425, 441-447, 469, 612-613, 641
movimiento de traslación, 423, 426-431, 469, 612, 641
movimiento plano de un cuerpo rígido, 423-431, 441-447, 456-461, 469
movimiento plano general, 426, 456-461, 469
procedimientos para el análisis usando, 120-121, 139, 153, 428, 443, 457, 616
rotación de un eje fijo, 441-447, 469, 614-616
segunda ley de Newton, 115, 175
simetría de los marcos de referencia para, 423-426
sistemas de partículas, 118-119
trayectorias, 165-166
derivadas, 682
diferenciales con respecto al tiempo, 338
integrales, 683
Eficiencia (e), 204-207, 233
energía (E) y, 204-207, 233
mecánica, 204-205
potencia (P) y, 204-207, 233
procedimiento para el análisis de, 205
Eje(s), 91-95, 109, 320, 322-329, 346-352, 373-380, 389-397, 404-405, 441-447, 469, 475, 511, 520, 556, 594-595, 612-616
análisis del movimiento relativo de, 91-95, 109, 346-352, 373-380, 389-397, 405
cinemática
de cuerpos rígidos, 320, 322-329, 346-352, 373-380, 389-397, 404-405
de una partícula, 91-95, 109
de giro, ecuaciones de movimiento para, 615-616
de rotación, 389-397, 405, 564-569, 578-585, 589, 612-613
aceleración (a) de, 392-393, 580
eje de rotación, 564
aceleración de Coriolis, 393, 405
análisis de movimiento relativo para, 389-397, 405, 578-585, 589
cambios de magnitud y, 390, 392
derivadas con respecto al tiempo para, 564-568
marco de referencia fijo, 564-568
movimiento en tres dimensiones y, 564-568, 578-585, 589
procedimiento para el análisis de, 394, 581
sistemas de traslación-rotación, 564-568
vectores de posición ($\mathbf{r}$) para, 389, 579
velocidad (v) de, 390-391, 579
de traslación, 91-95, 109, 346-352, 373-380, 405, 564-568, 578-585, 589
aceleración (a), 92, 373-380, 580
análisis de movimiento relativo, 91-95, 109, 346-352, 373-380, 405, 578-585, 589
cinemática de partículas, 91-95, 109

coordenadas de, 91
cuerpos rígidos en tres dimensiones, 564-568, 578-585, 589
derivadas con respecto al tiempo para sistemas, 564-568
marco de referencia fijo, 91-95
movimiento plano de un cuerpo rígido, 91-95, 109, 346-352, 373-380, 405, 564-568, 578-585
observadores, 91-92, 109
procedimientos para el análisis de, 92, 338, 349, 375, 581
rotación y, 338-341, 346-352, 373-380, 404
sistemas de traslación-rotación, 564-568, 589
vectores de posición (**r**) para, 91, 346, 579
velocidad (v) de, 91, 346-352, 405, 579
ecuaciones
de Euler para, 614-615
de movimiento para, 441-447, 469, 612-616
elementos con extremos articulados, 346-352, 373-380
energía cinética y, 475, 511
fijos, rotación alrededor de, 320, 322-329, 404, 441-447, 469, 475, 614-616
giratorios simétricos, 615-616
impulso y cantidad de movimiento de, 520, 556
marco de referencia
coordenados fijos y móviles, 346-352, 373-380, 404-405
fijo, 91-95
momentos de inercia (I) con respecto a, 442-443, 594-595
móviles, 91-95, 109, 389-397, 405
movimiento
angular y, 322-323, 327
circular y, 324-327, 373-375
de un cuerpo rígido en tres dimensiones, 594-595, 612-616
plano de un cuerpo rígido, 441-447, 469, 475, 511, 520, 556
planos de simetría, 595
principales de inercia (I), 594-595, 603
rotación alrededor de, 320, 322-329, 346-352, 373-380, 404, 441-447, 469, 475, 511, 520, 556
traslación para, 346-352, 373-380, 405
Elemento(s)
con extremo articulado, 346-352, 373-380
aceleración (a) y, 373-380
análisis de movimiento relativo de, 346-352, 373-380
velocidad (v) y, 346-352
de cascarón, momento de inercia para, 411
de disco, momento de inercia para, 411
de volumen, integración de momentos de inercia usando, 410-411
Empuje, 300-301
Energía (E), 178-235, 472-515, 604-607, 640-641, 657-660
cinética, 184-185, 213, 217-218, 232, 473-476, 480-486, 511, 604-607, 640-641
centro de masa (G) para, 605
conservación de la, 217-218
de una partícula, 178-235
energía potencial y, 213, 217-218
losa en una referencia inercial para, 473-474
movimiento de un cuerpo rígido en tres dimensiones, 604-607, 640-641
movimiento plano de un cuerpo rígido y, 473-476, 480-486, 511
movimiento plano general y, 475, 511
partículas e, 184-185, 213, 217-218, 232
principio de trabajo y energía, 184-185, 232, 480-486, 605, 640-641
procedimiento para el análisis de, 481
punto fijo O para, 605
rotación con respecto a un eje fijo y, 475, 511
sistema de cuerpos, 476
traslación para, 475, 511
conservación de la, 217-221, 233, 496-501, 513, 657-660
cuerpos rígidos en tres dimensiones, 604-607, 640-641
eficiencia (e) y, 204-207, 233
elástica potencial, 214, 233, 496, 513
frecuencia natural (ω_n) y, 657-660, 680
interna, 187
mecánica, 217-221. *Vea también* Conservación de la energía
movimiento plano de un cuerpo rígido y, 472-515
potencia (P) y, 204-207, 233
potencial (V), 213-221, 233, 496-501, 513
conservación de la energía y, 217-221, 233, 496-501, 513
ecuaciones para la conservación de la, 497
elástica, 214, 233, 496, 513
energía cinética y, 213, 217-218
fuerza del resorte y, 213-216, 233, 496, 513
fuerzas conservativas y, 213-216, 233, 496-501, 513
función potencial para, 215-216
gravitacional, 213-214, 233, 496, 513
movimiento plano de un cuerpo rígido, 496-501, 513
partículas, 213-216, 233
peso (W), desplazamiento de, 213, 215-216, 233, 496
procedimiento para el análisis de la, 218, 498
trabajos (U) y, 213-216
principio de trabajo y, 184-192, 232-233, 480-486, 513, 615, 640-641
procedimientos para el análisis de la, 185, 205, 218, 481, 498
sistemas de partículas, 186-192
trabajo (U) y, 178-235, 472-515
vibración y, 657-660
Equilibrio
dinámico, 116
ecuaciones de movimiento y, 116
estático, 116
Esferas, rotación de un punto fijo y, 563, 589
Estática, estudio de la, 3
Excentricidad (e), 166-167
Expansiones de series de potencia, 682
Expresiones matemáticas, 682-683

F

Factor
de amortiguación, 669
de magnificación (MF), 664-665, 671
Flujo
de masa, 296-297, 300-302
estable, 295-299, 315
corrientes de fluido, 295-299
de masa, 296-297
impulso y cantidad de movimiento angulares, 296
impulso y cantidad de movimiento lineales, 296
principios del impulso y la cantidad de movimiento para, 295-299, 315
procedimiento para el análisis de, 297
volumen cerrado, 295
volumen de control, 295, 315
volumétrico (descarga), 297
volumétrico (descarga), 297
Foco (F), 166
Fórmula cuadrática, 682
Formulación
escalar de la cantidad de movimiento angular, 280, 285
vectorial de la cantidad de movimiento angular, 280, 285
Frecuencia (f), 644, 646-647, 657-660, 663-665, 669, 680
forzada (ω_0), 663-665, 680
natural (ω_n), 644, 646-647, 657-660, 680
amortiguada (ω_d), 669
conservación de la energía y, 657-660
procedimientos para el análisis de, 647, 658
vibraciones no amortiguadas, 644, 646-647, 680
vibración y, 644, 646-647, 663-665, 680
Fuerza(s) (**F**), 112-177, 179-192, 213-221, 232-233, 254-255, 281-283, 300-304, 408-471, 476-479, 496-501, 512, 643-644, 657, 663-667. *Vea también* Movimiento de fuerza central
aceleración (a) y, 112-177, 408-471
amortiguación viscosa, 667
atracción gravitacional y, 114-115
centrípeta, 138-143
cinética
de cuerpos rígidos, 408-471, 476-479, 512
de partículas, 112-177, 179-192, 213-216, 232-233, 281-283

conservación de
de la cantidad de movimiento lineal y, 254-255
de la energía y, 217-221, 233, 496-501, 657
conservativa, 213-221, 233, 496-501, 657
conservación de la energía, 217-221, 233, 496-501, 513, 657
energía potencial (*V*) y, 213-216, 233, 496-501, 513
energía potencial elástica, 214, 496, 513
energía potencial gravitacional, 213, 496, 513
fuerza de fricción comparada con, 213, 233
fuerza del resorte como, 213-216, 233, 496, 513
función potencial para, 215-216
peso (*W*), desplazamiento de, 213, 215-216, 233
trabajo (*U*) y, 213-216, 496-501, 513
vibración y, 657
constante, 181, 213, 232, 476, 512
de amortiguación viscosa, 667, 681
de empuje, 300-301
de fricción (**F**), 121, 152, 187, 213, 233
ecuaciones de movimiento para, 121, 152
fuerzas conservativas comparadas con, 213, 233
trabajo causado por deslizamiento, 187
de resorte, 121, 182-183, 213-216, 232-233, 477, 496, 512-513, 644
cinética de partículas, 121, 182-183, 213-216, 232-233
conservación de la energía y, 496, 513
desplazamiento por, 477
ecuaciones de movimiento para, 121
energía potencial elástica y, 214, 233, 496, 513
fuerza conservativa de, 213-216
movimiento de un cuerpo rígido, 477, 496, 512-513
peso y, 215-216
trabajo de, 182-183, 213-216, 232, 477, 496, 512
vibraciones y, 644
desequilibrada, 113-114
deslizamiento (sin trabajo) y, 456, 477, 512
desplazamiento (Δ) de, 478, 512
diagramas de cuerpo libre para, 116-117, 175, 423-428
ecuaciones de movimiento para, 114, 116-126, 138-143, 152-156, 423-431, 441-447, 456-461, 469
energía potencial (*V*) y, 213-216, 233, 496-501
externa, 118-119, 282, 240, 423-425
impulsoras, 254-255
interna, 118-119, 282, 424-425
leyes de Newton y, 113-115, 175
masas (*m*) y, 113-114
momento(s)
de par (*M*) y, 478-479, 512
de inercia (*I*) y, 409-417, 456-457, 469
de una, 281-283
movimiento
de fuerza central y, 164-170
plano y, 408-471, 476-479, 512
plano general y, 456-461
no conservativa, 213
no impulsoras, 254
normal (**N**), 152
periódica, 663-666
peso (*W*), 115, 181, 213, 215-216, 232-233, 477, 512
propulsión y, 300-304
relaciones de la cantidad de movimiento angular con, 281-283
resultante, 116, 187, 281-282
rotación (y), 424-425, 441-447, 469
de un eje fijo y, 441-447, 469
sistema de partículas, 118-119, 184-192, 254-255
tangencial, 152-153, 175
trabajo (*U*) de una, 179-192, 213-216, 232-233, 476-479, 512
traslación y, 423, 426-431, 469
trayectorias, 165-170, 175
unidades de, 180
variable, 180, 476
trabajo de una, 180, 476
vector de fuerza inercial, 116
vibraciones y, 643-644, 657, 663-667
Funciones
hiperbólicas, 682
vectoriales, 685

G

Giro, 626, 633
Gráfica(s), 20-25, 106, 238, 314
a-s (aceleración-posición), 22
a-t (aceleración-tiempo), 20-21
impulso representado mediante, 238, 314
magnitud representada mediante, 238
movimiento errático representado mediante, 20-25
soluciones cinemáticas rectilíneas usando, 20-25, 106
s-t (posición-tiempo), 20-21
v-s (velocidad-posición), 22
v-t (velocidad-tiempo), 20-21

H

Hertz (Hz), unidad de, 646
Hodógrafos, aceleración de partículas y, 35

I

Identidades trigonométricas, 682
Impacto, 266-272, 314-315, 544-547, 557
central, 266-268, 269, 314-315
cinética de una partícula, 266-272, 314-315
coeficiente de restitución (*e*), 267-269, 315, 544-547, 557
conservación de la cantidad de movimiento, 267, 269-272, 314-315
deformación e, 266-272, 544-547
elástico, 268
excéntrico, 544-547, 557
línea de impacto, 266, 269, 314-315, 544
movimiento plano de cuerpos rígidos, 544-547, 557
oblicuo, 266, 269, 315
pérdida de energía por, 268, 270
plástico (inelástico), 268
procedimiento para el análisis de, 269
restitución a partir del, 266-269, 544
separación de puntos de contacto debido a, 546
Impulso(s), 236-317, 516-559, 604, 640
angular, 284-289
cantidad de movimiento e, 236-317, 516-559
cinética de una partícula, 236-317
conservación de la cantidad de movimiento
angular e, 286
lineal e, 254-255
cuerpos rígidos en tres dimensiones, 604, 640
diagramas de, 239-240
ecuaciones de movimiento, 238-239
externos, 254
flujo estable e, 295-299, 315
fuerzas
externas, 240, 254
internas, 255-256
impacto e, 266-272, 314-315, 544-547
internos, 254-255
lineal, 237-244, 296, 314, 523-524
magnitud de, 238
movimiento plano de un cuerpo rígido, 516-559
principio de la cantidad de movimiento y el, 237-244, 284-289, 295-299, 314-315, 523-530, 556, 604, 640
procedimientos para el análisis de, 241, 255, 286, 525
propulsión e, 300-304, 315
representación gráfica del, 238, 314
restitución, 266, 545
volúmenes de control, 295-304, 315
y cantidad de movimiento lineales, 237-244, 254-260, 314, 517, 520-522, 523-524, 540-543, 556-557
cinética de una partícula, 237-244, 254-260, 314
conservación de la cantidad de movimiento, 254-260, 540-543, 557
diagramas para, 239-241
fuerza (F) e, 237-244
fuerza externa e, 240
fuerzas impulsoras e, 254-255
movimiento plano de un cuerpo rígido, 517, 520-522, 540-543
movimiento plano general e, 521, 556
principio del impulso e, 237-244, 523-524, 556
procedimientos para el análisis de, 241, 255, 541
rotación de un eje fijo e, 520, 556
sistemas de partículas, 240-244, 254-260, 314
traslación e, 520, 556
vectorial, 238
Inercia (*I*), 409-417, 456-457, 469, 591-596, 604, 640
aceleración (*a*) e, 409-417, 456-457, 469
angular (α) e, 409

cantidad de movimiento angular (**H**) e, 604
cuerpos compuestos, 415
ecuaciones de movimiento e, 456-457
ejes principales de, 594-595, 603
elementos de volumen para la integración de, 410-411
integración de, 410-411, 592
momento de, 409-417, 456-457, 469, 592-597, 640
con respecto a un eje arbitrario, 595
de masa, 409-417
movimiento de
de un cuerpo rígido en tres dimensiones, 591-596, 640
plano de un cuerpo rígido y, 409-417, 456-457, 469
procedimiento para el análisis de, 411
producto de, 592-593, 640
radio de giro, 415
resistencia del cuerpo a la aceleración, 409
tensor, 594-595
teorema
de los ejes paralelos, 414-415, 593
de los planos paralelos, 594
Integración de ecuaciones, 21, 410-411, 592, 604-605
energía cinética, 604-605
momento de inercia, 410-411, 592
movimiento errático, 21

L

Leyes
de Kepler, 170
de Newton, 113-116, 175
atracción gravitacional, 114-115
cinética de partículas y, 113-115, 175
ecuación de movimiento, 114, 175
equilibrio estático y, 116
masa y peso corporales a partir de, 115
primera ley del movimiento, 116
segunda ley del movimiento, 113-115, 175
Línea(s)
de acción, 361, 425
de impacto, 266, 269, 314, 544

M

Magnitud, 5-7, 34, 36-37, 56-58, 72-73, 108, 238, 280, 322, 361, 373, 390, 392, 441-442, 478, 512
aceleración (*a*), 7, 37, 57-58, 73, 373, 392, 441-442
análisis del movimiento relativo y, 373, 390, 392
cantidad de movimiento angular (**H**), 280
cinemática rectilínea y, 5-7
constante, 478, 512
desplazamiento angular y, 322
distancia como, 5
ejes de rotación, cambios en el movimiento a partir de, 390, 392
impulso, 238
momento de par (*M*), trabajo de un, 478, 512
movimiento curvilíneo y, 34, 36-37, 56-58, 72-73, 108
rapidez (como), 6, 34, 36, 57-58, 72
promedio, 6
razón de cambio de, 58
representación gráfica de la, 238
rotación
cambios en el movimiento a partir de la, 322
de un eje fijo y, 441-442
ubicación del centro instantáneo (CI) a partir de la, 361
vector de posición (**r**) y, 36
velocidad (*v*), 6, 34, 36-37, 56, 72, 361, 390
Marco(s) de referencia, 91-95, 116-117, 175, 322-329, 346-352, 404-405, 423-426, 564-568
análisis de movimiento relativo, 346-352
cinética de partículas, 116-117, 175
derivada con respecto al tiempo de, 564-568
ecuaciones de movimiento y, 116-117, 175, 423-426
eje(s)
de coordenadas fijos y móviles, 346-352, 405
de rotación, 564
fijo(s), 91-95, 322-329, 404, 564-568
inercial(es), 116-117, 175, 423-426, 473-474, 612-613
cantidad de movimiento angular (**H**), 601-602
cinética de una partícula, 116-117, 175
ecuaciones de movimiento, 116-117, 175, 423-426, 612-613
energía cinética, 473-474
losa en, 473-474
movimiento de rotación, 424-425
movimiento de traslación, 423
movimiento de un cuerpo rígido en tres dimensiones, 612-613
movimiento plano de un cuerpo rígido, 423-426, 473
simetría de, 423-426
vector de fuerza, 116
movimiento
angular y, 322-324
de rotación, 424-425
de traslación, 423
de un cuerpo rígido en tres dimensiones, 564-568
plano de un cuerpo rígido, 423-425
relativo de partículas usando, 91-95
rotación alrededor de un eje fijo, 322-329
simetría de, 423-426
sistemas de traslación-rotación, 564-568
traslación, 91-95
trayectoria circular, 324-326
Masa (*m*), 113-115, 118-119, 296-297, 300-304, 315, 409-417, 517-522
atracción gravitacional y, 114-115
cantidad de movimiento y, 517-522
centro (*G*) de, 119, 518-519
continuidad de, 297
cuerpo de partícula, 113-115
ecuaciones de movimiento y, 114-115, 118-119
flujo estable de sistemas de fluidos y, 296-297, 315
ganancia de, 301-302, 315
leyes de Newton y, 113-115
momentos (*M*) de inercia (*I*), 409-417
movimiento plano de un cuerpo rígido, 409-417, 517-522
pérdida de, 300-301, 315
propulsión y, 300-304, 315
sistema de partículas y, 118-119
volúmenes de control y, 296-297, 300-304, 315
Mecánica espacial, 164-170, 175, 300-304, 315, 591-596, 632-635, 641
cinética de partículas y, 164-170, 175
empuje, 300-301
flujo de masa, 300-302
inercia (I) y, 591-596
leyes de Kepler, 170
movimiento
de fuerza central y, 164-170, 175
de un cuerpo rígido en tres dimensiones y, 591-596, 632-635, 641
sin par de torsión, 632-635, 641
órbita
circular, 168
elíptica, 169-170
propulsión, 300-304, 315
trayectoria(s), 165-170, 175
de vuelo libre, 166
de vuelo propulsado, 167
parabólica, 168
volumen de control de partículas, 300-304, 315
Mecánica, estudio de la, 3
Momento
de inercia, 409-417, 442-443, 456-457, 469, 592-597, 640
aceleración (*a*) y, 409-417, 442-443, 456-457, 469
cuerpos compuestos, 415
de masa, 409-417
deslizamiento y, 456
ecuaciones de movimiento y, 442-443, 456-461
ejes arbitrarios, con respecto a, 597
elementos de caparazón, 411
elementos de disco, 411
elementos de volumen para la integración de, 410-411
fuerza (F) y, 456-457
integración de, 410-411, 592
movimiento de un cuerpo rígido en tres dimensiones, 592-597, 640
movimiento plano de un cuerpo rígido, 409-417, 442-443, 456-461, 469
principal, 594, 640
procedimiento para el análisis de, 411
radio de giro para, 415
resistencia del cuerpo a la aceleración, 409
rotación de un eje fijo, 442-443

teorema de los ejes paralelos para, 414-415, 593
teorema de los planos paralelos para, 594
de par (M), trabajo (W) de un, 478-479, 512
principales de inercia, 594, 640
trabajo de un par, 478-479, 512
Movimiento
angular, 322-323, 327, 338, 404, 563-564
armónico simple, 644, 680
circular, 324-327, 347-348, 360-366, 373-375, 405
aceleración (a), 325-326, 373-375
análisis de movimiento relativo del, 347-348, 373-375
centro instantáneo (CI) de velocidad cero, 360-366, 405
deslizamiento y, 348, 374
movimiento plano de un cuerpo rígido, 324-326, 347-348, 373-375
posición y desplazamiento a partir del, 324
procedimientos para el análisis de, 327, 362
rotación alrededor de un eje fijo, 324-327
velocidad (v), 324, 347-348, 360-366, 405
velocidad relativa y, 347-348
continuo, 5-14, 106
aceleración (a), 7-8
cinemática de partículas rectilíneas y, 5-14
cinemática rectilínea de, 5-14, 106
desplazamiento (Δ), 5
posición (s), 5, 8
procedimiento para el análisis de, 9
velocidad (v), 6-8
curvilíneo, 34-40, 56-62, 71-78, 107-108
aceleración (a), 35, 37, 57-58, 73
centro de curvatura, 56
cinemática de una partícula, 34-40, 56-62, 71-78, 107-108
componentes cilíndricos, 71-78, 107-108
coordenada radial (r), 71-73
coordenada transversal (θ), 71-73
coordenadas cilíndricas (r, θ, z), 74
coordenadas para, 36-40, 56-59, 71-78, 107-108
coordenadas polares, 71-73, 108
coordenadas rectangulares (x, y, z), 36-40, 107
derivadas con respecto al tiempo de, 74
desplazamiento (Δ), 34
ejes normales (n), 56-62, 108
ejes tangenciales (t), 56-62, 108
general, 34-40
movimiento plano, 56-58
movimiento tridimensional, 58
posición (s), 34, 36, 72
procedimientos para el análisis de, 38, 59, 74
radio de curvatura (ρ), 56
velocidad (v), 34-37, 56, 72
de fuerza central, 164-170, 175
atracción gravitacional (G), 165-166
directriz, 166
ecuaciones de movimiento, 164-166
excentricidad (e), 166-167
foco (F), 166
leyes de Kepler, 170
mecánica espacial y, 164-170
órbita circular, 168
órbita elíptica, 169-170
trayectoria(s), 165-170, 175
trayectoria del movimiento, 164-165
trayectoria parabólica, 168
velocidad areolar, 164
de un proyectil, 41-45, 107
cinemática de una partícula y, 41-45, 107
horizontal, 41
procedimiento para el análisis del, 42
vertical, 41
en tres dimensiones, 58, 560-589, 590-641
análisis de movimiento relativo de, 578-585, 589
angular, 561-564
cantidad de movimiento angular de, 601-604, 629, 640
cinemática de, 58, 560-589
cinética de, 590-641
coordenadas inerciales para, 601-602
coordenadas rectangulares (x, y, z), 602-603, 614-616, 641
curvilíneo, 58
derivadas con respecto al tiempo para, 564-568, 589
ecuaciones de Euler para, 614-615
ecuaciones de movimiento para, 612-621, 641
ejes giratorios, 564-568, 578-585, 589
ejes móviles, 578-585
energía cinética de los, 604-607, 640-641
inercia, momentos y productos de, 591-596, 640
marcos de referencia para, 564-568
movimiento general de, 569-571, 589
movimiento giroscópico, 615-616, 626-631, 641
movimiento sin par de torsión, 632-635, 641
partículas, 58
principio de trabajo y energía de, 605, 640-641
principio del impulso y la cantidad de movimiento, 604, 640
procedimientos para el análisis de, 581, 616
rotación de un punto fijo, 561-568, 589, 626-631
sistemas coordenados de traslación para, 569-571
sistemas de traslación-rotación, 564-568, 589
errático, 20-25, 106
a-s (aceleración-posición), 22
a-t (aceleración-tiempo), 20-21
cinemática rectilínea de partículas para, 20-25, 106
integración de ecuaciones para, 21
s-t (posición-tiempo), 20-21
v-s (velocidad-posición), 22
v-t (velocidad-tiempo), 20-21
giroscópico, 615-616, 626-631, 641
ángulos de Euler para, 626
ecuaciones de movimiento para, 615-616
efecto giroscópico, 628-629
ejes giratorios simétricos, 615-616
giroscopio, 629
momento angular (**H**) y, 629
velocidad angular (ω) y, 626-628
horizontal de un proyectil, 41-45
plano, 56-58, 318-407, 408-471, 472-515, 516-559
aceleración (a) y, 57-58, 321, 323, 325-326, 373-380, 392-393, 404-405, 408-471
análisis de movimiento (dependiente) absoluto, 338-341, 404
análisis de movimiento relativo, 346-352, 373-380, 389-397, 405
centro instantáneo de velocidad cero, 360-366, 405, 456
cinemática, 56-58, 318-407
cinética, 408-471, 472-515, 516-559
conservación de la cantidad de movimiento, 540-543, 557
conservación de la energía, 496-501, 513
coordenadas de componente normal (n), 56-58, 441-442
coordenadas de la componente tangencial (t), 56-58, 441-442
cuerpos rígidos, 318-407, 408-471, 472-515
curvilíneo, 56-58
desplazamiento, 322, 324, 346
ecuaciones de movimiento para, 423-431, 441-447, 456-461, 469
ejes giratorios, 389-397, 405
energía (E) y, 472-515
energía cinética y, 473-476, 480-481, 511
energía potencial (V) de, 496-501, 513
fuerza (F) y, 408-471, 476-479, 512
general, 320, 338-397, 404-405, 456-461, 469, 521, 556
impacto (excéntrico), 544-547, 557
impulso y cantidad de movimiento, 516-559
momento de inercia (I) para, 409-417, 442-443, 456-457, 469
momento de par (M) en, 478-479, 512
movimiento angular y, 322-323, 404
posición (**r**) y, 321, 322, 324, 346, 389
principio del trabajo y la energía, 480-486, 513
principios del impulso y la cantidad de movimiento, 523-530, 556
procedimientos para el análisis de, 327, 338, 349, 362, 375, 394, 411, 428, 443, 457, 481, 498, 525, 541

rotación de un eje fijo, 320, 322-329, 404, 441-447, 469, 520, 556
rotación y, 320, 322-329, 338-341, 346-352, 373-380, 404-405, 424-425, 441-447, 469, 520
trabajo (U) y, 472-515
traslación, 320-321, 338-341, 346-352, 373-380, 404-405, 423, 426-431, 469, 520, 556
velocidad (v) y, 56, 321, 322, 324, 346-352, 360-366, 390-391, 404-405
plano general, 320, 338-397, 404-405, 456-461, 469, 475, 511, 521, 556. *Vea también* Movimiento plano
aceleración (a), 373-380, 373-380, 392-393, 405, 456-461
análisis de movimiento relativo para el, 346-352, 373-380, 389-397, 404-405
análisis del movimiento absoluto para, 338-341, 404
centro instantáneo (CI) de velocidad cero, 360-366, 405, 456
cinemática de cuerpos rígidos, 320, 338-352
cinética de cuerpos rígidos, 456-461, 469, 475, 511, 521, 556
deslizamiento y, 456
desplazamiento (Δ) a partir del, 346
ecuación de momento con respecto al centro instantáneo (CI), 456
ecuaciones de movimiento para, 456-461, 469
ejes de rotación, 389-397, 405
energía cinética y, 475, 511
fuerza (**F**) y, 456-461
impulso y cantidad de movimiento para el, 521, 556
procedimiento para el análisis del, 338, 349, 375, 394, 457
rotación y traslación de, 338-341
velocidad (v), 346-352, 360-366, 390-391, 405
sin par de torsión, 632-635, 641
tridimensional general, 564-568, 589
vertical de proyectiles, 41-45

N

Notación
de puntos, 36-37
vectorial cartesiana, 685
Nutación, 626

O

Órbita
circular, 168
elíptica, 169-170
trayectoria y, 158-170
Origen fijo (O), 5

P

Partículas, 2-111, 112-177, 178-235, 236-317
aceleración (a), 7-8, 35, 37, 57-58, 73, 92, 106, 112-177
análisis
del movimiento dependiente, 85-90, 109
del movimiento relativo, 91-95, 109
atracción gravitacional (G), 114-115, 165-166
cantidad de movimiento angular (H) de, 280-289, 314
cinemática (de), 2-111
rectilínea de, 5-14, 20-25, 106
cinética de, 112-177, 178-235, 236-317
conservación
de la cantidad de movimiento angular, 286, 315
de la cantidad de movimiento lineal, 254-260, 267, 269-272, 315
de la energía, 217-221, 233
coordenadas de, 36-38, 56-58, 71-78, 107-109, 120-126, 138-143, 152-156
deformación de, 186-187, 266-272
derivadas con respecto al tiempo, 74, 86
desplazamiento (Δ), 5, 34
diagramas de cuerpo libre, 116-117, 175
ecuaciones
de coordenada de posición, 85-90
de movimiento, 114-126, 138-143, 152-156, 164-165, 175
ejes de traslación, dos partículas sobre, 91-95, 109
energía
(E) y, 178-235
cinética de, 184-185, 213, 217-218
potencial, 213-221
fuerza(s)
(**F**) y, 112-177, 179-183, 213-221, 233
conservativas y, 213-221, 233
hodógrafos, 35
impacto, 266-272, 314-315
impulso y cantidad de movimiento de, 236-317
marco de referencia inercial, 116-117, 175
masa (m), 113-115
movimiento
continuo de, 5-14
curvilíneo de, 34-40, 56-62, 71-78, 107-108
de fuerza central de, 164-170, 175
de proyectiles de, 41-45, 107
errático de, 20-25, 106
plano de, 56-58
tridimensional, 58
posición (s), 5, 8, 34, 36, 72, 91, 106
potencia (P) y, 204-207, 233
principio()
de trabajo y energía para, 184-192, 233
del impulso y la cantidad de movimiento, 237-244, 284-289
procedimientos para el análisis de, 9, 38, 42, 58, 74, 86, 92, 120-121, 139, 153, 185, 205, 218, 241, 255, 269, 286, 297
propulsión de, 300-304, 315
rapidez (magnitud), 6, 34, 36, 37, 72
segunda ley de Newton del movimiento, 113-115, 175
sistema de, 118-119, 186-192, 240-244, 254-260, 314
trabajo (U) y, 178-235
velocidad (v), 6-8, 34-37, 56, 72, 91, 106
volumen de control, 295-304, 315
Perigeo, 169
Periodo
de deformación, 266
de vibración, 646
Peso (W), 115, 181, 213, 215-217, 232-233, 477, 496, 512
atracción gravitacional y, 115
conservación de la energía, 217, 233, 496
constante, 213
desplazamiento vertical (Δ) de, 477
energía potencial
(V) y, 213, 215-216, 496
gravitacional y, 213, 496
fuerza(s)
de resorte y, 215-216
conservativas y desplazamiento, 213, 215-216, 233
trabajo (U) de una, 181, 213, 215-216, 232, 477, 496, 512
Plano osculador, 56
Posición (s), 5, 8, 20-22, 34, 36, 72, 85-90, 91-95, 106, 109, 321, 322, 324, 346, 389, 579
análisis de movimiento
dependiente y, 85-90, 109
relativo y, 91-95, 109, 346, 389, 579
angular (θ), 322
cinemática
de partículas y, 5, 8, 34, 72, 91-95
plana de cuerpos rígidos y, 321, 322, 324, 346, 389
rectilínea y, 5, 8, 20-22, 106
componentes rectangulares, 36
coordenada, 5
de equilibrio, vibraciones, 644-646
del origen de coordenadas (O), 5
desplazamiento (Δ) a partir de los cambios de, 5, 322, 324
ecuaciones de coordenada de posición, 85-90, 109
ejes
de traslación, 91-95, 579
giratorios, 389, 579
gráficas de variables, 20-22
magnitud y, 36
movimiento
continuo y, 5, 8
curvilíneo y, 34, 36, 72
de un cuerpo rígido en tres dimensiones, 579
dependiente absoluto y, 85-90
errático y, 20-22
rotación alrededor del eje fijo, 322, 324, 346
tiempo (t), como una función de, 8
traslación y, 321, 346
vectores (**r**), 34, 36, 72, 91, 321, 346, 389
velocidad (v) como función de, 8, 91
Potencia (P), 204-207, 233
eficiencia (e) y, 204-207, 233
energía (E) y, 204-207, 233
procedimiento para el análisis de, 205
unidades de, 204
Precesión, 626, 633-634
retrógrada, 634
Principio(s)
de D'Alembert, 116

de trabajo y energía, 184-192, 232-233, 480-486, 513, 605, 640-641
cinética de partículas, 184-192, 232-233
cuerpos rígidos en tres dimensiones, 605, 640-641
deformación y, 186-187
ecuación para, 184, 232
energía cinética y, 184-185, 232, 480-486, 513, 605, 640-641
movimiento plano de cuerpo rígido, 480-486, 513
procedimientos de análisis usando, 185, 481
sistemas de partículas, 186-192
trabajo de fricción causado por deslizamiento, 187
unidades de, 184
del impulso y la cantidad de movimiento, 237-244, 284-289, 295-299, 314-315, 523-530, 556, 604, 640
angular, 284-289, 296, 315, 523-530, 556
cinética de partículas, 237-244, 284-289, 314-315
diagramas para, 238-239
flujo estable y, 295-299
fuerzas externas, 240
lineal, 237-244, 296, 314, 523-530, 556
movimiento de un cuerpo rígido en tres dimensiones, 604, 640
procedimientos de análisis utilizando los, 241, 286, 525
sistemas de partículas, 240-244
Procedimiento para la resolución de problemas, 4
Producto
de inercia, 592-593, 640
punto, 180, 687-688
vectorial, 685-686
Propulsión, 300-304, 315. *Vea también* Volumen de control

R

Radio
de curvatura (ρ), 56
de giro, 415
Rapidez, 6, 32, 57-58. *Vea también* Magnitud
promedio, 6
Regla
de la cadena, 689-691
de la mano derecha, 280, 322, 324
Resonancia, 665, 681
Restitución, 266-269, 544-547
coeficiente (e) de, 267-269, 544-547
deformación por impacto, 266-269, 544-547
impacto excéntrico y, 544-547
impulso y, 266, 545
movimiento plano de un cuerpo rígido, 544-547
periodo de, 266, 544
velocidad angular (ω) y, 544-547
Rotación, 320, 322-329, 338-341, 346-352, 360-366, 404-405, 424-425, 441-447, 469, 475, 511, 520, 556, 561-571, 589, 612-616, 641
aceleración (a) y, 323, 325-326, 424-425, 441-447
análisis de movimiento
dependiente absoluto, 338-341, 404
relativo, 346-352, 405
centro instantáneo de velocidad cero, 360-366, 405
cuerpos rígidos en tres dimensiones, 561-568, 589, 612-616, 641
de un eje fijo, 320, 322-329, 404, 441-447, 469, 475, 511, 520, 556, 614-616
aceleración (a) de, 323, 325-327, 404, 441-447, 469
aceleración angular (α), 323
coordenadas normales (n), 325-326, 441-442
coordenadas tangenciales (t), 325-326, 441-442
cuerpos rígidos en tres dimensiones, 614-616
desplazamiento angular ($d\theta$), 322
ecuación de momento con respecto a un punto O, 442
ecuaciones de Euler para, 615-616
ecuaciones de movimiento para, 441-447, 469, 614-616
energía cinética y, 475, 511
fuerza (F) de, 441-447, 469
impulso y cantidad de movimiento para, 520, 556
magnitud de, 441-442
movimiento angular y, 322-323, 327, 404
movimiento circular, 324-327
movimiento plano de un cuerpo rígido, 320, 322-329, 404, 441-447, 475, 511, 520, 556
posición angular (θ), 322
posición y desplazamiento, 322, 324
procedimiento para el análisis de, 327, 443
regla de la mano derecha para, 322, 324
trayectoria circular de un punto, 324-326, 441
velocidad (v) de, 322, 324, 404
velocidad angular (ω), 322
de un punto fijo, 561-568, 589, 602, 605, 626-631
aceleración (a) y, 564
aceleración angular (α) de, 563-564
ángulos de Euler para, 626
cuerpos rígidos en tres dimensiones, 561-568, 589, 602, 605, 626-631
derivadas con respecto al tiempo para, 564-568, 589
desplazamientos giratorios, 560-564
energía cinética y, 605
esfera como representación de, 563, 589
movimiento angular (**H**) y, 602
movimiento giroscópico, 626-631
rotación finita, 562
rotación infinitesimal, 563
teorema de Euler para, 562
velocidad (v) y, 564
velocidad angular (ω) de, 563-564, 626-628
derivadas con respecto al tiempo para, 564-568, 589
desplazamiento y, 322, 324, 346
ecuaciones de movimiento para, 424-425, 441-447, 469, 612-616, 641
eje(s)
instantáneo de, 563-564
giratorios simétricos, 615-616
energía cinética y, 475, 511
finita, 562
fuerza (F) y, 424-425, 441-447, 469
impulso y cantidad de movimiento, 520, 556
infinitesimal, 563
línea de acción de, 361, 425, 442
momento de inercia de, 442-443
movimiento
angular y, 322-323, 327, 563-568
circular y, 324-327, 360-366, 404-405
general en tres dimensiones, 564-568
plano de un cuerpo rígido y, 320, 322-329, 338-341, 346-352, 404-405, 424-425, 441-447, 469, 475, 511, 520, 556
posición y, 322, 324, 346
procedimientos para el análisis de, 327, 338, 349, 362, 616
punto fijo, 561-568, 589
regla de la mano derecha para, 322, 324
simetría de los marcos de referencia para, 424-425
teorema de Euler para, 562
traslación y, 338-341, 346-352
velocidad (v) y, 322, 324, 346-352, 360-366

S

Separación de los puntos de contacto después del impacto, 546
Sistema(s), 118-119, 186-192, 218, 240-244, 282, 476, 564-568, 589
cantidad de movimiento angular de, 282
centro de masa (G), 119
cinética de partículas, 118-119, 186-192, 240-244, 282
conservación de la energía, 218
coordenados de traslación, 569-571, 578, 589
cuerpos
no rígidos, 186
rígidos, 186, 476, 564-568, 589
de traslación y rotación, 564-568, 589
de vibración
críticamente amortiguados, 668
sobreamortiguados, 668
subamortiguados, 669
deformación en cuerpos, 186-187
derivadas con respecto al tiempo para, 564-568, 589
deslizantes y, 187
ecuaciones de movimiento para, 118-119

energía
cinética y, 476
potencial (*V*) y, 218
fuerzas
conservativas y, 218
externas, 118-119, 240
internas, 118-119
giratorios fijos, 564-568
principio
del impulso y la cantidad de movimiento para, 240-244
del trabajo y la energía para, 186-192
trabajo de fricción y, 187

T

Teorema
de Euler, 562
de los ejes paralelos, 414-415, 593
de los planos paralelos, 594
Tiempo (*t*), 8, 20-21, 106, 170, 646
ciclo, 646
cinemática rectilínea y, 8, 20-21, 106
gráficas de variables, 20-21, 106
movimiento
continuo y, 8
errático y, 20-21
periodo, 646
posición (*s*), como una función, 8
revolución orbital, 170
velocidad (*v*) como una función de, 8
vibración y, 646
Trabajo (*U*), 178-235, 472-515, 605, 640-641
cinética de una partícula, 178-235
conservación de la energía y, 217-221, 233, 496-501, 513
cuerpos rígidos en tres dimensiones, 605, 640-641
deformación y, 186-187
deslizamiento y, 477
desplazamiento (Δ) y, 179-180, 477-478, 512
energía
(*E*) y, 178-235, 472-515, 605
cinética y, 187, 605
potencial (*V*) y, 213-216, 496-501, 513
externo, 187
fricción causada por deslizamiento, 187
fuerza(s)
(**F**) como, 179-183, 186-192, 232-233, 476-479, 512
conservativas y, 213-216, 233
constante, 181, 232, 476, 512
de resorte como, 182-183, 213-216, 232, 477, 512
variable, de un, 180, 476
función potencial y, 215-216
interno, 187
momento de par (*M*), de un, 478-479, 512
movimiento plano de un cuerpo rígido, 472-515
peso (*W*) como, 181, 213, 215-216, 232, 477, 512
principio de la energía y, 184-192, 232-233, 480-486, 513, 605, 640-641
procedimientos para el análisis de, 185, 481, 498
sistema de partículas, 186-192
unidades de, 180
velocidad cero (sin trabajo), 477
Traslación, 320-321, 338-341, 389-397, 404-405, 423, 426-431, 469, 475, 511, 520, 556, 612, 641
aceleración (*a*) y, 321, 392-393, 404
análisis de movimiento
dependiente absoluto, 338-341, 404
relativo, 389-397, 405
curvilínea, 320-321, 404, 427, 469
desplazamiento y, 346
ecuaciones de movimiento para, 423, 426-431, 469, 612, 641
ejes del sistema coordenado de, 346-352, 404
giratorios con, 389-397, 405
energía cinética y, 475, 511
impulso y cantidad de movimiento, 520, 556
movimiento
circular y, 347-348
de un cuerpo rígido en tres dimensiones, 612, 641
plano de un cuerpo rígido, 320-321, 338-341, 389-397, 404-405, 423, 426-431, 469, 475, 511, 520, 556, 641
procedimientos de análisis utilizando, 394, 428, 616
rectilínea, 320-321, 404, 426-427, 469
simetría de marcos de referencia para, 423
trayectorias de, 320
vectores de posición (**r**), 321, 389
velocidad (*v*) y, 321, 390-391, 404
Trayectoria(s), 165-170, 175
atracción gravitacional y, 165-166
circular de un punto, 324-326, 360, 374, 441
de movimiento, 164-165
de órbita
circular, 168
elíptica, 169-170
de vuelo libre, 166
de vuelo propulsado, 167
excentricidad de, 166-167, 175
parabólica, 168

V

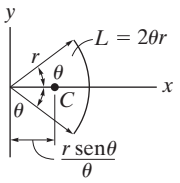
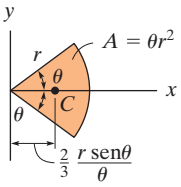
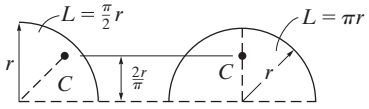
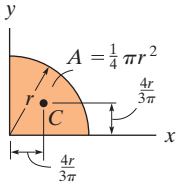
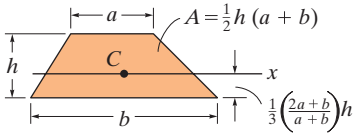
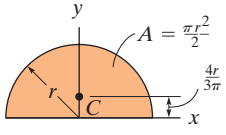
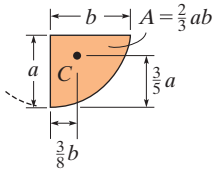
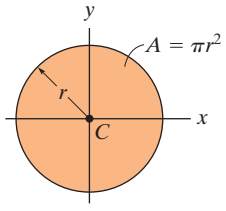
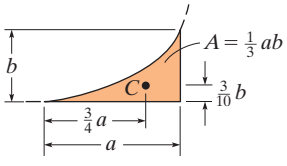
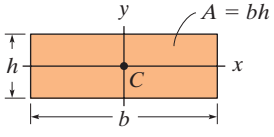
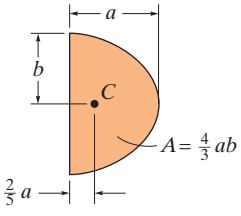
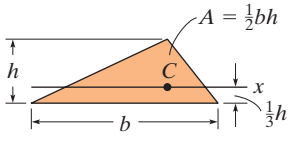
Vectores unitarios, 684
Velocidad (*v*), 6-8, 20-22, 34-37, 56, 72, 91, 106, 164, 168, 321, 322, 324, 346-352, 360-366, 390-391, 404-405, 477, 544-547, 563-564, 579, 626-628
absoluta, 91, 347
aceleración (*a*) y, 7-8
análisis de movimiento relativo y, 91, 346-352, 390-391, 405, 579
angular (*ω*), 72, 322, 544-547, 563-564, 626-628
areolar, 164
centro instantáneo (CI) de, cero, 360-366, 405
cero, 348, 360-366, 405, 456, 477
análisis de movimiento relativo, 348
centro instantáneo (CI) de, 360-366, 405
deslizamiento (sin trabajo) y, 348, 477
movimiento plano general, 456
cinemática
de partículas y, 6-8, 20-22, 34-37, 56, 72, 91, 106
rectilínea y, 6-8, 20-22, 106
componente(s)
cilíndricos y, 72
radial ($\mathbf{v}_r$), 72
rectangulares y, 36-37
transversal ($\mathbf{v}_\theta$), 72
constante, 7
convención de signos para, 6
coordenadas de componente
normal (*n*), 56, 404
tangencial (*t*), 56, 72, 404
de área, 164
de escape, 168
derivada con respecto al tiempo y, 564
deslizamiento y, 348, 477
eje(s)
de rotación y, 390-391, 405, 579
de traslación y, 91, 346-352, 405, 579
fuerzas que no realizan trabajo, 477
gráficas de variables, 20-22, 106
impacto excéntrico y, 544-547
instantánea, 6, 34
magnitud, 6, 34, 36-37, 56, 72, 390, 404
movimiento
circular y, 324, 347-348
continuo y, 6-8
curvilíneo y, 34-37, 56, 72
de fuerza central y, 164, 168
de un cuerpo rígido en tres dimensiones, 563-564, 579, 626-628
errático y, 20-22
giroscópico y, 626-628
plano de un cuerpo rígido, 321, 322, 324, 346-352, 360-366, 390-391, 404-405, 544-547
posición (*s*), como una función de, 8
procedimientos para el análisis de, 349, 362
promedio, 6, 34
rapidez (magnitud), 6, 34, 36, 72
relativa, 91, 347-348, 405
rotación (y), 322, 324, 346-352, 404-405
de un punto fijo y, 322, 324, 404, 563-564, 626-628
tiempo (*t*), como una función de, 8
traslación y, 321, 390-391, 404
Vibraciones, 642-681
amortiguadas, 643, 667-672, 681
movimiento de, 643
resonancia a partir de, 665, 681
sistemas críticamente amortiguados, 668
sistemas sobreamortiguados, 668
sistemas subamortiguados, 669
viscosas forzadas, 670-672, 681
viscosas libres, 667-669, 681
amplitud de, 645-646
ángulo de fase (*ϕ*), 646
ciclo, 646
circuitos eléctricos análogos y, 673, 681
de estado estable, 670

desplazamiento y, 644-651
de soporte periódico de, 665
factor de magnificación (FM) para, 664-665, 671
forzadas, 643, 663-666, 670-672, 680-681
amortiguadas viscosas, 670-672, 681
desplazamiento de apoyo periódico de, 665
frecuencia forzada (ω_0) para, 663-665, 680
fuerza periódica y, 663-666
movimiento de, 643
no amortiguadas, 663-666, 680
frecuencia
(f), 644, 646-647, 663, 669
forzada (ω_θ), 663-666, 680
natural (ω_n), 644, 646-647, 657-660, 680
fuerza periódica y, 663-666
libre(s), 643-651, 667-669, 680-681
amortiguadas viscosas, 667-669, 681
movimiento de, 643
no amortiguadas, 643-651, 680
métodos para la conservación de la energía, 657-660, 680
movimiento armónico simple de, 644
no amortiguadas, 643-651, 663-666, 680
desplazamiento de soporte periódico, 665
forzadas, 663-666, 680
frecuencia forzada (ω_θ) para, 663-665, 680
frecuencia natural (ω_n) para, 644, 646-647, 680
fuerza periódica y, 663-666
libres, 643-651, 680
procedimiento para el análisis de, 647
periodo, 646
posición de equilibrio, 644-646
procedimientos para el análisis de, 647, 658
resonancia, 665, 681
sistemas
críticamente amortiguados, 668
sobreamortiguados, 668
subamortiguados, 666
viscosa, 667-672, 681
amortiguada, 667-672, 681
coeficiente de amortiguación, 667
de estado estable, 670
forzada, 670-672, 681
fuerza de amortiguación, 667
libre, 667-669, 681
sistemas críticamente amortiguados, 668
sistemas sobreamortiguados, 668
sistemas subamortiguados, 669
Volumen de control, 295-304, 315
cinemática de una partícula, 295-304, 315
corrientes de fluido, 295-299
empuje (**T**), 300-301
flujo
de masa, 296-297, 300-302
estable, 295-299, 315
volumétrico (descarga), 297
ganancia de masa (m), 301-302, 315
pérdida de masa (m), 300-301, 315
principios del impulso y de la cantidad de movimiento para, 295-299
procedimiento para el análisis del, 297
propulsión y, 300-304, 315
Volumen cerrado, 295

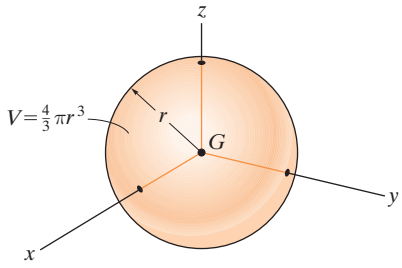
W

Watts (W), unidad de, 204

Propiedades geométricas de elementos lineales y de área

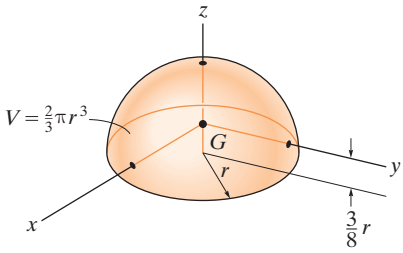
Ubicación del centroide	Ubicación del centroide	Momento de inercia de área
 Segmento de arco circular	 Área de un sector circular	$I_x = \frac{1}{4}r^4\left(\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right)$ $I_y = \frac{1}{4}r^4\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right)$
 Arcos de un cuarto de círculo y de un semicírculo	 Área de un cuarto de círculo	$I_x = \frac{1}{16}\pi r^4$ $I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$
 Área trapezoidal	 Área semicircular	$I_x = \frac{1}{8}\pi r^4$ $I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$
 Área semiparabólica	 Área circular	$I_x = \frac{1}{4}\pi r^4$ $I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$
 Área exparabólica	 Área rectangular	$I_x = \frac{1}{12}bh^3$ $I_y = \frac{1}{12}hb^3$
 Área parabólica	 Área triangular	$I_x = \frac{1}{36}bh^3$

Centro de gravedad y momento de inercia de masa de sólidos homogéneos



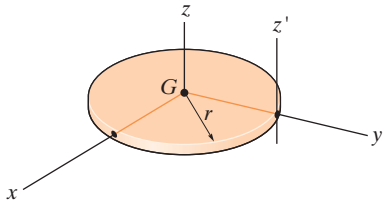
Esfera

$$I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}=\frac{2}{5}mr^2$$



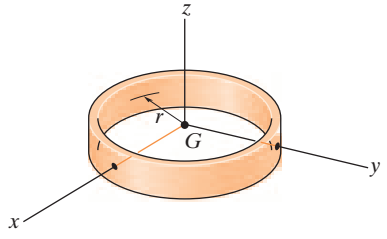
Semiesfera

$$I_{xx}=I_{yy}=0.259\,mr^2 \quad I_{zz}=\frac{2}{5}mr^2$$



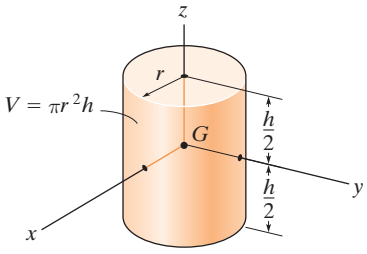
Disco circular delgado

$$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{4}mr^2 \quad I_{zz}=\frac{1}{2}mr^2 \quad I_{z'z'}=\frac{3}{2}mr^2$$



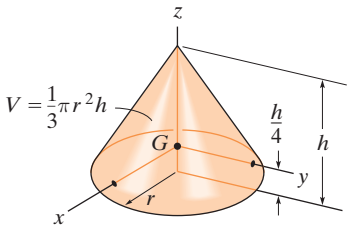
Anillo delgado

$$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{2}mr^2 \quad I_{zz}=mr^2$$



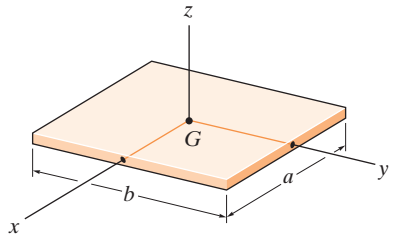
Cilindro

$$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{12}m(3r^2+h^2) \quad I_{zz}=\frac{1}{2}mr^2$$



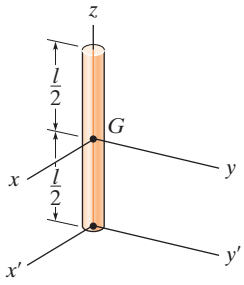
Cono

$$I_{xx}=I_{yy}=\frac{3}{80}m(4r^2+h^2) \quad I_{zz}=\frac{3}{10}mr^2$$



Placa delgada

$$I_{xx}=\frac{1}{12}mb^2 \quad I_{yy}=\frac{1}{12}ma^2 \quad I_{zz}=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$$



Varilla delgada

$$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{12}ml^2 \quad I_{x'x'}=I_{y'y'}=\frac{1}{3}ml^2 \quad I_{z'z'}=0$$

Esta nueva edición de Ingeniería mecánica ha sido mejorada significativamente en relación con la anterior y proporciona ahora una presentación más clara y completa de la teoría y las aplicaciones de esta materia, por lo tanto profesor y estudiantes se beneficiarán en gran medida de estas innovaciones.

Dentro de las mejoras más importantes, se hace un firme soporte en el aspecto pedagógico y un amplio uso de ejemplos (muchos de ellos sobre ingeniería petrolera y aeronáutica) para reforzar el aprendizaje; y para mayor claridad de los conceptos, ahora las definiciones importantes se presentan en negritas para resaltar su importancia.

Entre las nuevas características sobresalen las siguientes:

- **Problemas preliminares.** Esta nueva característica se encuentra a lo largo de todo el texto y se presenta justo antes de los Problemas fundamentales.
- **Ampliación de las secciones de puntos importantes.** Se han añadido resúmenes que refuerzan el material de lectura y destacan las definiciones y los conceptos importantes.
- **Problemas de repaso al final del capítulo.** En esta edición se proporcionan soluciones a todos los problemas de repaso.
- **Nuevos problemas.** Se han añadido cerca de 30% de problemas nuevos, los cuales involucran aplicaciones en diferentes campos de la ingeniería.

Para mayor información visite la página web del libro en:
www.pearsonenespañol.com/hibbeler

ISBN 978-607-32-3697-3
90000
9 786073 236973

Visítenos en:
www.pearsonenespañol.com